



论文

月球探测器精确相对动力学模型及其应用

荆武兴*, 高长生

哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

* E-mail: jingwuxing@hit.edu.cn

收稿日期: 2009-05-11; 接受日期: 2010-01-06

国家自然科学基金资助项目(批准号: 60535010)

摘要 在地月会合坐标系下建立了月球探测器的相对动力学模型, 模型中考虑了太阳、地球和月球的真实天体力学环境. 给出了太阳引力摄动下地月会合坐标系绝对角速度的简单但精确的表达式. 所提供的相对动力学模型与 J2000 坐标系下的绝对动力学模型完全等价. 如果将太阳引力常数置为零, 模型则退化为椭圆型限制性三体问题模型; 如果再将月球轨道偏心率置为零, 模型则进一步退化为圆型限制性三体问题模型. 基于本文模型导出了计算地月系统的共线和三角拉格朗日平动点更精确位置的迭代格式, 它与儒略时刻以及所考虑的时间范围有关. 所提供的相对动力学模型对经由拉格朗日点的探月轨道设计有重要参考价值.

关键词 月球探测器, 相对轨道动力学, 拉格朗日点, 四体问题, 太阳引力摄动

PACS: 05.45.-a, 45.50.Jf, 45.50.Pk, 95.55.Pe, 96.12.De

自欧拉(1750)和拉格朗日(1772)发现限制性三体问题的五个平动点即拉格朗日点(L_i , $i=1, 2, 3, 4, 5$)以来, 有关限制性三体问题和平动点的研究吸引了大批天文界和航天界的学者. 前者关心 L_i 点旨在发现 L_i 点附近的自然天体及其轨道演化(如 Trojan asteroid^[1]), 后者关心的是能否利用 L_i 点实现深空探测从而为人类服务(如 ISEE-3^[2]). Hill^[3], Brown^[4], Szebehely^[5], Farquhar^[6]等对限制性三体问题的解及其应用做出了突破性的贡献.

限制性三体问题的核心是用相对运动的观点描述第三个小物体相对于两个大天体的运动形态. 这种观点可以追溯到古希腊时代喜帕克斯创立的均轮-本轮模型和托勒密著述的《天文学大成》^[7]. 利用限制性三体问题的结论, Conley^[8], Koon 等人^[9]建立了共面低能地月转移轨道, Parker^[10]建立了三维地月低能转移轨道, 给出了从地球到月球附近 L_2 点 Halo 轨

道的低能连接, 这种从地球到达月球的低能过渡轨道比传统的 Hohmann 转移轨道节省 20% 的燃料. 这些工作充分利用了拉格朗日平动点的优势, 大大丰富了用相对运动观点处理地月空间中探测器的最省燃料受控运动问题.

限制性三体问题遵循三个基本假设: (i) 两个大天体绕其共同质心作圆或椭圆运动; (ii) 两个大天体的共同质心为惯性点; (iii) 两个大天体的运动平面在惯性空间固定. 对于“太阳-行星-卫星”系统, 限制性三体问题模型是一种很好的近似, 但是对于“地球-月球-卫星”系统则不然. 实际上, 地球和月球是太阳系中的基本天体, 受太阳引力的影响, 月球绕地球的运动不再是严格的椭圆运动, 偏心率在 1/15~1/23 之间变化(周期为 31.8 d)^[11]; 地月系统质心也不再是惯性点, 而是绕太阳做椭圆运动; 月球运动的轨道平面(白道面)也不再是惯性空间中的固定平面, 而

是既有章动(平均周期为 173 d)也有进动(平均周期 18.6 Y)^[12]. 这些影响属于太阳引力的间接影响. 而太阳对探测器的引力和地月系统质心非惯性的叠加属于太阳引力的直接影响.

当用限制性三体问题模型描述探测器在地月空间中的相对运动时, 上述三个基本假设则成为限制性三体问题模型的三大缺陷. 20 世纪 60 年代, 随着美国阿波罗计划的开展, 一大批学者论述了地月空间中人造卫星的运动, 其中拉格朗日点的特性及其可利用性得到大量的研究. Tapley 等人^[13]考虑了太阳对地月系统三角平动点的影响, 给出的模型虽然考虑了白道面与黄道面的夹角, 但没有考虑白道面的进动和月球轨道偏心率的影响. Schechter^[14]改进了 Tapley 的工作, 给出的模型考虑了白道面的进动, 但是月球轨道的偏心率却假设为零. Nicholson^[15]考虑了太阳对地月系统共线平动点的影响, 建立相对动力学模型时假设了白道面与黄道面重合以及月球轨道和太阳轨道均为圆轨道(即双圆模型). Farquhar 等人^[16]系统地研究了地月系统 L_2 点附近的周期轨道(Halo 轨道)存在性, 给出了探测器相对于 L_2 点的动力学模型, 模型中包括了太阳引力的影响, 在表示这种影响时用了无穷级数的有限项截断并且使用了月球轨道的平均根数, 使得相对动力学模型仍存在尚待评估的截断误差和平均化误差. 另外, L_2 点的建立尚没有考虑太阳引力的影响. Mohn^[17], Howell^[18]将限制性三体问题扩展为限制性四体问题, 仍没有克服限制性三体问题的第三缺陷(假设了白道面在惯性空间固定).

随着我国探月工程的展开, 更经济地探测月球是任务设计的重要指标. 先前研究表明, 借助拉格朗日点实现探月有潜在的省能优势. 但这需要建立一个更精确的相对动力学模型来方便地设计和评估这种省能方案. 目前国内学者刘林^[19]、徐明^[20]和车征^[21]等人在这方面已经开展了大量研究工作, 但所使用的相对动力学模型尚缺少对太阳引力间接影响的考虑. 由于借助拉格朗日点实现探月的轨道对模型误差敏感(引起混沌现象^[22]), 因此建立更精确的相对动力学模型就有了相当重要的意义.

本文在地月会合坐标系中建立月球探测器的相对动力学模型, 考虑了太阳引力的直接影响和间接影响, 克服了限制性三体问题模型的三大缺陷. 该模型与 J2000 坐标系中的绝对动力学模型完全等价. 利

用该模型计算出了地月系统精确的共线拉格朗日点和三角拉格朗日点的位置. 所提供的相对动力学模型对重新评估拉格朗日平动点的特性以及经由拉格朗日平动点的探月轨道设计有重要参考价值.

1 地心会合坐标系及其绝对角速度

相对于恒星空间不转动的坐标系取为 J2000 地心赤道坐标系 $OXYZ$: 原点在地心, X 轴指向 2000 年 1 月 1 日正午的平春分点, Z 轴指向此时的平北极, Y 轴构成右手直角坐标系.

地心会合坐标系 $Oxyz$: 原点在地心, x 轴指向月心, z 轴指向瞬时月球轨道角动量方向, y 轴构成右手直角坐标系. 由于 $OXYZ$ 相对于恒星空间不转动, 地心会合坐标系的绝对角速度即为其相对于 J2000 地心赤道坐标系的角速度, 记为 ω , $Oxyz$ 的三轴单位矢量分别记为 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, 它们相对 J2000 坐标系的时间导数分别为 $\dot{\hat{x}}$, $\dot{\hat{y}}$, $\dot{\hat{z}}$. 下面给出 ω 与 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 的关系. 在以下的分析中, “ $\cdot$ ”表示矢量点乘, “ $\times$ ”表示矢量叉乘, 除非特别说明, 矢量的一阶时间导数(如 $\dot{\hat{x}}$)和二阶时间导数(如 $\ddot{\hat{r}}_M$)均是在 J2000 坐标系下的导数.

命题 1 会合坐标系绝对角速度与其坐标轴单位矢量存在如下关系:

$$\omega = \frac{1}{2}(\hat{x} \times \dot{\hat{x}} + \hat{y} \times \dot{\hat{y}} + \hat{z} \times \dot{\hat{z}}). \quad (1)$$

证明: 根据空间矢量旋转的基本关系 $\dot{\hat{x}} = \omega \times \hat{x}$, $\dot{\hat{y}} = \omega \times \hat{y}$, $\dot{\hat{z}} = \omega \times \hat{z}$ 可得

$$\hat{x} \times \dot{\hat{x}} = \hat{x} \times (\omega \times \hat{x}) = \omega - (\omega \cdot \hat{x})\hat{x},$$

$$\hat{y} \times \dot{\hat{y}} = \hat{y} \times (\omega \times \hat{y}) = \omega - (\omega \cdot \hat{y})\hat{y},$$

$$\hat{z} \times \dot{\hat{z}} = \hat{z} \times (\omega \times \hat{z}) = \omega - (\omega \cdot \hat{z})\hat{z}.$$

易知, ω 在会合坐标系 $Oxyz$ 中表示为 $\omega = (\omega \cdot \hat{x})\hat{x} + (\omega \cdot \hat{y})\hat{y} + (\omega \cdot \hat{z})\hat{z}$, 上面三个式子相加, 立即得到 $\omega = \frac{1}{2}(\hat{x} \times \dot{\hat{x}} + \hat{y} \times \dot{\hat{y}} + \hat{z} \times \dot{\hat{z}})$. 命题 1 得证.

ω 是由月球的轨道运动决定的, 月球的轨道动力学方程为^[15]

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{\mu_E + \mu_M}{r_M^3} \mathbf{r}_M + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_M}{r_{MS}^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right). \quad (2)$$

其中, $\mathbf{r}_M$, $\mathbf{r}_S$ 分别为月球质心和太阳质心相对于地

球质心的位置矢量, μ_E , μ_M , μ_S 分别为地球、月球和太阳的引力常数. $r_M = \|\mathbf{r}_M\|$, $r_S = \|\mathbf{r}_S\|$, $r_{MS} = \|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_M\|$, $\|\cdot\|$ 表示向量的大小.

月球的单位质量轨道角动量为 $\mathbf{h}_M = \mathbf{r}_M \times \dot{\mathbf{r}}_M$, 令 $h_M = \|\mathbf{h}_M\|$, 根据会合坐标系的定义, 有

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{r}_M}{r_M}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{h}_M}{h_M}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{h}_M \times \mathbf{r}_M}{r_M h_M}. \quad (3)$$

经过矢量运算推导, 得到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} &= \frac{h_M}{r_M^2} \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} &= \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \dot{\mathbf{h}}_M}{h_M} = \frac{r_M (\hat{\mathbf{z}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_M)}{h_M} \hat{\mathbf{x}}, \\ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{y}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) = -(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{r_M (\hat{\mathbf{z}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_M)}{h_M} \hat{\mathbf{x}} + \frac{h_M}{r_M^2} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

利用动力学模型(2), 将上式代入(1)式, 得到用日、月星历计算并且在地心会合坐标系中表示的 $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\frac{r_M}{h_M^2} \left(\frac{\mu_S}{r_{MS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) (\mathbf{r}_S \cdot \mathbf{h}_M) \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{h_M}{r_M^2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4)$$

在不考虑太阳摄动的情况下, 月球单位质量的轨道角动量为常值, 实际情况下, 月球单位质量轨道角动量是变化的. 利用月球动力学模型(2), 月球单位质量轨道角动量变化的规律为

$$\begin{aligned} \dot{h}_M &= \frac{\mathbf{h}_M \cdot \dot{\mathbf{h}}_M}{h_M} = \left(\frac{\mu_S}{r_{MS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) \frac{(\mathbf{r}_M \times \mathbf{r}_S) \cdot \mathbf{h}_M}{h_M} \\ &= \left(\frac{\mu_S}{r_{MS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) r_M (\mathbf{r}_S \cdot \hat{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

可以看到, 在真实日、地、月天体力学环境下, 由于太阳的引力摄动, 月球的轨道角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不再与白道面的法线重合, 月球的单位质量轨道角动量也不再为常数. 这些因素我们称之为太阳引力的间接影响. (4)式是关于地月会合坐标系角速度的简单但精确的表达, 其中所涉及到的日月轨道参数可以直接用 J2000 坐标系下的标准日月星历计算(如 DE405 星历). Farquhar^[16]用月球平均轨道要素的时间变化率表示 $\boldsymbol{\omega}$, 给出的表达式十分复杂, 而且使用了无穷级数的有限项截断, 因此存在截断误差. 目前还未见到关于这种截断误差的评估.

2 月球探测器精确相对动力学模型

忽略地球的非球形影响和其它行星的引力影响, 月球探测器的绝对动力学模型为^[15,23]

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_P &= -\frac{\mu_E}{r_P^3} \mathbf{r}_P + \mu_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P}{r_{PM}^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{r_M^3} \right) \\ &\quad + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P}{r_{PS}^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{r}_P$ 为月球探测器相对于地球质心的位置矢量,

$$r_{PM} = \|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P\|, \quad r_{PS} = \|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P\|.$$

令

$\mathbf{r}_P = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\dot{\mathbf{r}}_P^b = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}$, $\ddot{\mathbf{r}}_P^b = \ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}}$, 其中 $\dot{\mathbf{r}}_P^b$, $\ddot{\mathbf{r}}_P^b$ 分别为探测器在地月会合坐标系中的相对速度和相对加速度. 根据相对微分法则, 得到

$$\ddot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P^b + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_P^b + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_P, \quad (6)$$

将(6)式代入到(5)式, 得到

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_P^b &= -2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_P^b - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_P \\ &\quad - \frac{\mu_E}{r_P^3} \mathbf{r}_P + \mu_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P}{r_{PM}^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{r_M^3} \right) \\ &\quad + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P}{r_{PS}^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

式中最后一项为太阳引力的直接影响.

利用(4)式, 对(7)式进行展开, 得到月球探测器在日、地、月引力环境下的精确相对动力学模型如下:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_z \dot{y} + \omega_z^2 x - \omega_x \omega_z z + \dot{\omega}_z y \\ &\quad - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} + \frac{\mu_S}{r_{PS}^3} \right) x + \left(\frac{\mu_M}{r_{PM}^3} - \frac{\mu_M}{r_M^3} \right) r_M \\ &\quad + \left(\frac{\mu_S}{r_{PS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) r_{Sx}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= 2\omega_x \dot{z} - 2\omega_z \dot{x} + (\omega_x^2 + \omega_z^2) y + \dot{\omega}_x z - \dot{\omega}_z x \\ &\quad - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} + \frac{\mu_S}{r_{PS}^3} \right) y + \left(\frac{\mu_S}{r_{PS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) r_{Sy}, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -2\omega_x \dot{y} + \omega_x^2 z - \omega_x \omega_z x - \dot{\omega}_x y \\ &\quad - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} + \frac{\mu_S}{r_{PS}^3} \right) z + \left(\frac{\mu_S}{r_{PS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) r_{Sz}, \end{aligned} \quad (8c)$$

其中,

$$\omega_x = \frac{r_M}{h_M} \left(\frac{\mu_S}{r_{MS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) r_{Sz}, \quad \omega_z = \frac{h_M}{r_M^2},$$

$$r_{Sx} = r_S \cdot \frac{r_M}{r_M}, \quad r_{Sy} = r_S \cdot \frac{h_M \times r_M}{r_M h_M}, \quad r_{Sz} = r_S \cdot \frac{h_M}{h_M},$$

由于矢量点乘与坐标系无关, 因此这里所涉及到的日月轨道参数可以直接用 J2000 坐标系下的标准日月星历计算(如 DE405 星历).

如果忽略太阳的引力影响, 动力学方程组(8)蜕化为

$$\ddot{x} = 2\omega_z \dot{y} + \dot{\omega}_z y + \omega_z^2 x - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) x + \left(\frac{\mu_M}{r_{PM}^3} - \frac{\mu_M}{r_M^3} \right) r_M, \quad (9a)$$

$$\ddot{y} = -2\omega_z \dot{x} + \omega_z^2 y - \dot{\omega}_z x - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) y, \quad (9b)$$

$$\ddot{z} = - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) z, \quad (9c)$$

其中

$$\omega_z = \frac{\sqrt{(\mu_E + \mu_M)a_M(1-e_M^2)}}{r_M^2}, \quad r_M = \frac{a_M(1-e_M^2)}{1+e_M \cos \theta_M},$$

a_M , e_M , θ_M 分别为月球轨道的无摄动半长轴、偏心率和真近点角. 动力学方程组(9)为地心会合坐标系下的椭圆形限制性三体问题的一般动力学模型. 如果忽略月球轨道偏心率, 则动力学模型(9)进一步蜕化为

$$\ddot{x} = 2\omega_z \dot{y} + \left(\omega_z^2 - \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} - \frac{\mu_E}{r_P^3} \right) x - \left(\omega_z^2 - \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) r_M, \quad (10a)$$

$$\ddot{y} = -2\omega_z \dot{x} + \left(\omega_z^2 - \frac{\mu_E}{r_P^3} - \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) y, \quad (10b)$$

$$\ddot{z} = - \left(\frac{\mu_E}{r_P^3} + \frac{\mu_M}{r_{PM}^3} \right) z, \quad (10c)$$

其中, $\omega_z = \sqrt{\frac{(\mu_E + \mu_M)}{a_M^3}}$. 动力学方程组(10)为地心会合坐标系下的圆形限制性三体问题的一般动力学模型.

可见, 本文给出的动力学模型(8)是更一般情况下的模型, 椭圆形限制性三体问题模型和圆形限制性三体问题模型是本文模型(8)的特例. 相对动力学模型(8)的导出是严密的, 理论上与绝对动力学模型(5)完全等价.

3 共线拉格朗日点的精确位置

共线拉格朗日点有特殊的空间应用, 如在 L_1 点放置空间站可以作为探月的中转站, 在 L_2 点附近的 Halo 轨道上放置卫星可以作为探测月球背面活动的信息中继站等. Szebehely^[5], Farquhar^[6], Nicholson^[15]对共线拉格朗日点的位置进行了深入研究, 给出了求解共线拉格朗日点的方程及其解. 由于没有考虑太阳引力的间接影响, 如果把探测器放置在所给出的共线拉格朗日点上, 在实际的天体力学环境下, 要么探测器逐渐远离理论点, 要么必须付出较多的控制能量来克服太阳引力的影响. 下面我们用严格的动力学方程组(8)求解太阳引力摄动情况下, 共线拉格朗日点的精确位置.

设动力学方程组(8)以

$$[x(t_0), y(t_0), z(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)] \\ = [\lambda r_M(t_0), 0, 0, \lambda \dot{r}_M(t_0), 0, 0] \quad (11)$$

为初始条件的解为 $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$, λ 为待定常数. 如果 λ 选择得合适, 点 $P = [x, y, z]^T$ 应在点 $L = [\lambda r_M, 0, 0]^T$ 附近运动, 点 L 即为共线拉格朗日点. 在太阳引力摄动下, 为了保证点 P 在点 L 附近运动, 我们求取使得下式达到极小值的参数 λ :

$$J(\lambda, t_0, \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (\mathbf{P} - \mathbf{L})^T (\mathbf{P} - \mathbf{L}) d\tau \\ + (\mathbf{P}(\Delta t) - \mathbf{L}(\Delta t))^T (\mathbf{P}(\Delta t) - \mathbf{L}(\Delta t)) \Delta t, \quad (12)$$

其中, 上标“T”表示矩阵转置(以下同). 一般情况下, λ 与 t_0 , Δt 有关. 在空间任务中, 任务开始时刻 t_0 以及任务持续时间 Δt 通常是给定的, 对于给定的 t_0 , Δt , 我们给出极小化 $J(\lambda, t_0, \Delta t)$ 时, λ 的迭代算法如下:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{J(\lambda_i, t_0, \Delta t)}{J(\lambda_i + \Delta \lambda, t_0, \Delta t) - J(\lambda_i, t_0, \Delta t)} \Delta \lambda, \quad (13) \\ (i = 0, 1, 2, \dots),$$

其中, $\Delta \lambda$ 为小的正数. 将 Δt 作为变量, 对(12)式求导数, 得到

$$\dot{J}(\lambda, t_0, t) = 2(\mathbf{P}(t) - \mathbf{L}(t))^T (\dot{\mathbf{P}}(t) - \dot{\mathbf{L}}(t)) \\ + 2(\mathbf{P}(t) - \mathbf{L}(t))^T (\dot{\mathbf{P}}(t) - \dot{\mathbf{L}}(t))t. \quad (14)$$

显然, $J(\lambda, t_0, 0) = 0$. 方程(14)与动力学方程组(8)构成一个新系统, 从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 可以数值积分得到 $J(\lambda_i, t_0, \Delta t)$.

迭代初值 λ_0 取为无太阳引力摄动时, $[x, y, z, \dot{x},$

$\dot{y}, \dot{z}] = [\lambda \dot{r}_M, 0, 0, \lambda \dot{r}_M, 0, 0]$ 能够成为动力学方程组(9)的特解的 λ 值. 将 $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] = [\lambda \dot{r}_M, 0, 0, \lambda \dot{r}_M, 0, 0]$ 代入到模型(9), 利用(3)式和会合坐标系的定义, 经过一定的推导, 可以验证方程(9b)和(9c)成立.

将月球动力学方程(2)投影到地心会合坐标系下, 得到

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \omega_z^2 \mathbf{r}_M - \frac{\mu_E + \mu_M}{r_M^3} \mathbf{r}_M - \frac{\mu_S}{r_{MS}^3} \mathbf{r}_M + \left(\frac{\mu_S}{r_{MS}^3} - \frac{\mu_S}{r_S^3} \right) \mathbf{r}_{Sx}, \quad (15)$$

代入到(9a)式并忽略太阳引力的影响, 得到(9a)式成立的条件为

$$\mu_E + \mu_M - \frac{\mu_E}{|\lambda|^3} + \left[\frac{1-\lambda}{|(1-\lambda)|^3} - 1 \right] \frac{\mu_M}{\lambda} = 0, \quad (16)$$

上式与时间无关, 只与地月质量有关. 求解上式(地月质量比取为 81.3006559788989), 得到模型(9)的三个共线拉格朗日点参数如下:

$$\bar{\lambda}_{L_1} = 0.849065766935798,$$

$$\bar{\lambda}_{L_2} = 1.16783268238542,$$

$$\bar{\lambda}_{L_3} = -0.99291206846683,$$

这与 Farquhar^[6]和 Nicholson^[15]得到的结果一致, 称为经典的共线拉格朗日点参数, 可以作为算法(13)的迭代初值.

由于月球的轨道存在偏心率, 即使不考虑太阳引力的影响, 共线拉格朗日点在地月连线上也不是固定的, 而是随着月球轨道半径的变化而变动, 即

$$\mathbf{L}_i = [\bar{\lambda}_{L_i} \mathbf{r}_M(t), 0, 0], \quad (i=1, 2, 3).$$

当存在太阳引力摄动时, 假设初始时刻为 2012 年 10 月 1 日 12 时(GMT), 此时将探测器放置到经典的拉格朗日点上(对应于 $\bar{\lambda}_{L_1}, \bar{\lambda}_{L_2}, \bar{\lambda}_{L_3}$), 并且探测器具有与经典的拉格朗日点相同的初始速度 $[\bar{\lambda}_{L_i} \dot{\mathbf{r}}_M(t_0), 0, 0]$, 探测器被动飞行后就很快离开相应的拉格朗日点. 对应于 $\bar{\lambda}_{L_1}$, 被动飞行 30 d 时最大偏差达到约 8×10^4 km(见图 1, 绕月飞行); 对应于 $\bar{\lambda}_{L_2}$, 被动飞行 40 d 时最大偏差达到约 70×10^4 km(见图 2); 对应于 $\bar{\lambda}_{L_3}$, 被动飞行 90 d 时最大偏差达到约 3500 km(见图 3), 而且发散趋势比较明显.

利用(13)式计算得到的三个新的共线拉格朗日点参数如下:

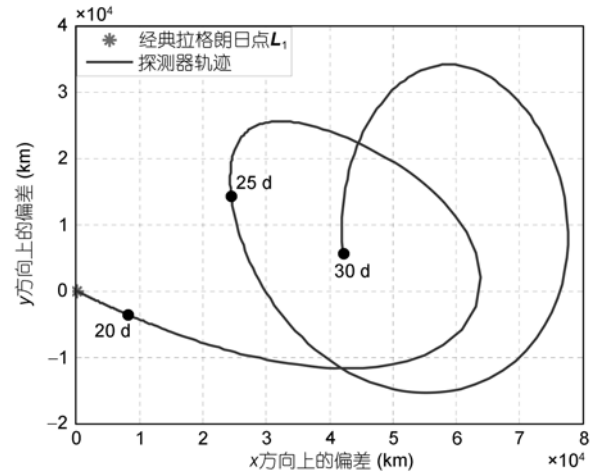


图 1 探测器相对经典拉格朗日点 L_1 的被动飞行轨迹(30 d)

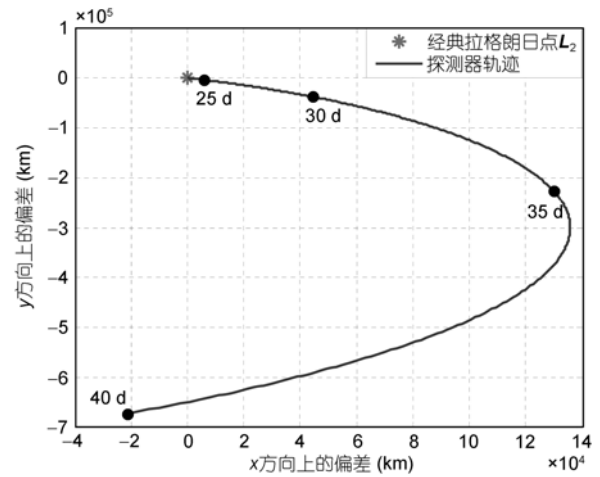


图 2 探测器相对经典拉格朗日点 L_2 的被动飞行轨迹(40 d)

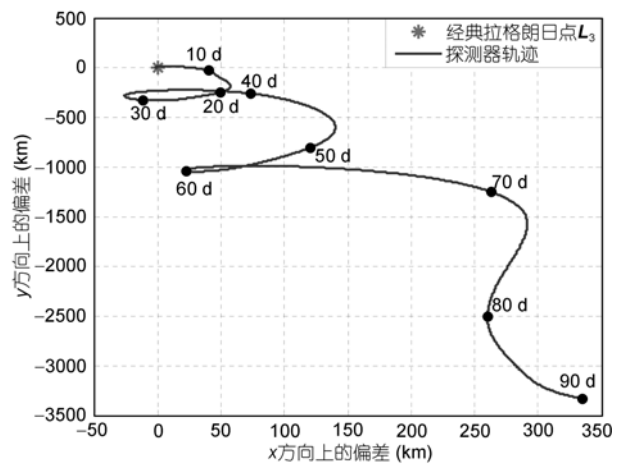


图 3 探测器相对经典拉格朗日点 L_3 的被动飞行轨迹(90 d)

$$\begin{aligned}\lambda_{L_1} &= 0.8490657250818, \\ \lambda_{L_2} &= 1.16783259631133, \\ \lambda_{L_3} &= -0.992925947730611.\end{aligned}$$

λ_{L_1} 所对应的时间区间到 2012 年 10 月 31 日 12 时(GMT), 共 30 d; λ_{L_2} 所对应的时间区间到 2012 年 11 月 10 日 12 时(GMT), 共 40 d; λ_{L_3} 所对应的时间区间到 2013 年 4 月 29 日 12 时(GMT), 共 210 d. 新的拉格朗日点 L_1 , L_2 和 L_3 与经典的拉格朗日点 L_1 , L_2 和 L_3 相差分别为 -15.2 m (新的拉格朗日点 L_1 更接近地球)、-31.3 m (新的拉格朗日点 L_2 更接近月球)、-5054.8 m (新的拉格朗日点 L_3 更远离地球). 尽管新的拉格朗日点 L_1 和 L_2 与经典的拉格朗日点 L_1 和 L_2 相近, 但是在他们所处的位置上动力学比较复杂, 动力学平衡对位置十分敏感, 因此, 探测器放置到经典的拉格朗日点 L_1 和 L_2 上, 动力学平衡很快被打破, 图 1 和 2 说明了这种情况.

若将探测器放置到新求得的拉格朗日点上, 并且与对应的拉格朗日点同初速, 对应于 λ_{L_1} , 被动飞行 30 d 时最大偏差不超过 2 km (见图 4); 对应于 λ_{L_2} , 被动飞行 40 d 时最大偏差不超过 3 km (见图 5); 对应于 λ_{L_3} , 被动飞行 90 d 时最大偏差不超过 400 km, 远低于经典拉格朗日点 L_3 情况下的 3500 km (见图 3), 而且直到 210 d 时才明显离开新的拉格朗日点 L_3 (见图 6). 这一结果表明, 将探测器发射到本文给出的精确共线拉格朗日点 L_1 , L_2 和 L_3 上, 由于充分利用了太

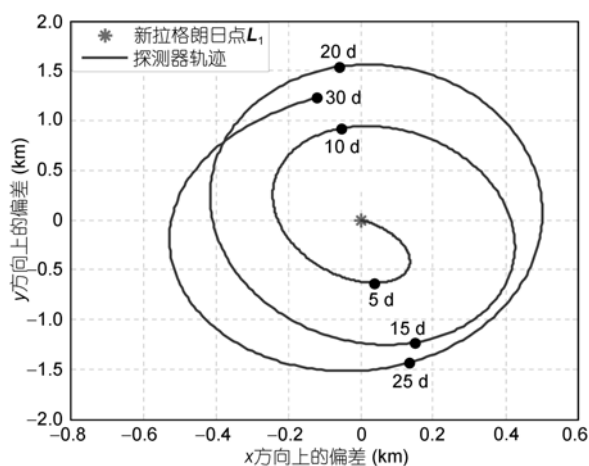


图 4 探测器相对精确拉格朗日点 L_1 的被动飞行轨迹 (30 d)

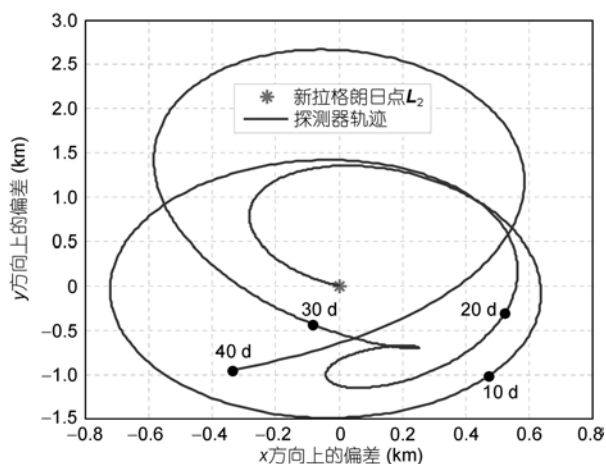


图 5 探测器相对精确拉格朗日点 L_2 的被动飞行轨迹 (40 d)

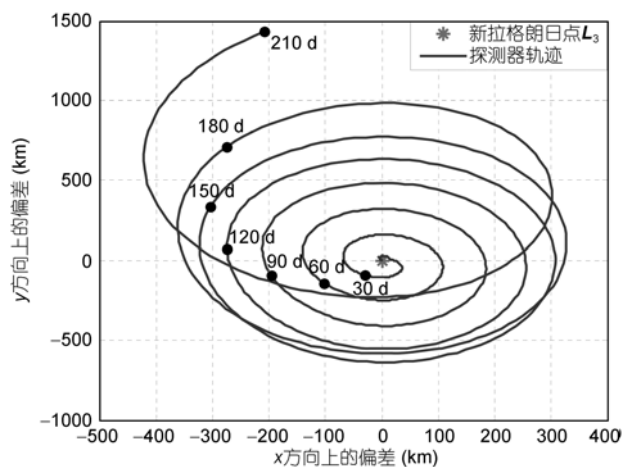


图 6 探测器相对精确拉格朗日点 L_3 的被动飞行轨迹 (210 d)

阳引力影响, 探测器可以被动飞行更长的时间, 从而可以大大节省轨道保持需要的燃料.

4 三角拉格朗日点的精确位置

三角拉格朗日点亦有特殊的应用, 例如在三角拉格朗日点其中的一个点上放置一颗卫星, 在月球背面的共线拉格朗日点上放置另一颗卫星, 可以实现月球背面的通讯^[6,24]. 最近利用三角拉格朗日点的特殊位置, 进行卫星编队实现深空观测也得到研究^[25]. 当不考虑太阳的引力影响时, 即使月球轨道是椭圆轨道, 在月球轨道面内, 与地心、月心成等边三

角形的点仍是平衡点. 但是太阳引力是客观存在的, 当考虑太阳影响时, 与地心、月心成等边三角形的点将不再是平衡点^[26], 更谈不上稳定性问题. 把卫星放置到此点, 如果不加控制, 卫星将离开该点^[19]. 那么是否存在这样的点, 它与地心、月心近似构成等边三角形, 在某一时刻把卫星放置到此点上后, 在相当长的时间内卫星不用控制也不会离开此点呢? 这是一个很有实际意义的问题. 下面给出求取这样的点的方法.

设动力学方程组(8)以

$$[x(t_0), y(t_0), z(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)] \\ = [\lambda_x r_M(t_0), \lambda_y r_M(t_0), 0, \lambda_x \dot{r}_M(t_0), \lambda_y \dot{r}_M(t_0), 0] \quad (17)$$

为初始条件的解为 $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$, 其中, $\lambda_y = \pm\sqrt{3}/2$, λ_x 为待定常数. 如果 λ_x 选择得合适, 点 $P = [x, y, z]^T$ 应在点 $L = [\lambda_x r_M, \lambda_y r_M, 0]^T$ 附近运动, 点 L 即为三角拉格朗日点. $\lambda_y = +\sqrt{3}/2$ 时, 点 L 即为 L_4 点, $\lambda_y = -\sqrt{3}/2$ 时, 点 L 即为 L_5 点. 在太阳引力摄动下, 为了保证点 P 在点 L 附近运动, 我们求取使得下式达到极小值的参数 λ_x :

$$J(\lambda_x, t_0, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} (x - \lambda_x r_M)^2 (t - t_0) dt, \quad (18)$$

与共线拉格朗日点类似, 参数 λ_x 与初始时刻 t_0 和空间任务持续的时间 T 有关. 对于给定的 t_0, T , 极小化 $J(\lambda_x, t_0, T)$ 时 λ_x 的迭代算法如下:

$$\lambda_{xi+1} = \lambda_{xi} - \frac{J(\lambda_{xi}, t_0, T)}{J(\lambda_{xi} + \Delta\lambda, t_0, T) - J(\lambda_{xi}, t_0, T)} \Delta\lambda, \quad (19) \\ (i = 0, 1, 2, \dots),$$

其中, $\Delta\lambda$ 为小的正数.

λ_x 的迭代初值取为无太阳引力摄动时, 动力学方程组(9)的三角拉格朗日点对应的值, 即椭圆形限制性三体问题的 L_4 点: $\bar{\lambda}_x = 0.5$, $\bar{\lambda}_y = +\sqrt{3}/2$; L_5 点: $\bar{\lambda}_x = 0.5$, $\bar{\lambda}_y = -\sqrt{3}/2$. 此二点称为经典三角拉格朗日点.

当存在太阳引力摄动时, 假设初始时刻为 2010 年 5 月 29 日 12 时(GMT), 所考虑的任务到 2012 年 4 月 28 日 12 时(GMT), 共 700 d. 利用算法(19)得到 L_4 点:

$$\lambda_x = 0.488469597243412, \quad \lambda_y = +\sqrt{3}/2;$$

L_5 点:

$$\lambda_x = 0.487541133669390, \quad \lambda_y = -\sqrt{3}/2,$$

若在 2010 年 5 月 29 日 12 时(GMT)将探测器放置到新求得的三角拉格朗日点上, 并且与新的三角拉格朗日点同初速, 在 700 d 之内的运动轨迹如图 7 和 8 所示. 可见在大约两年内, 探测器能够被动飞行在新的三角拉格朗日点附近, L_4 附近最大误差在 4×10^4 km 之内, 从地球上观察, 探测器在月球前方 54° 至 67° 地心角之内运动; L_5 附近最大误差在 8.5×10^4 km 之内, 从地球上观察, 探测器在月球后方 $51^\circ \sim 75^\circ$ 地心角之内运动. 若把探测器放置到经典的三角拉格朗日

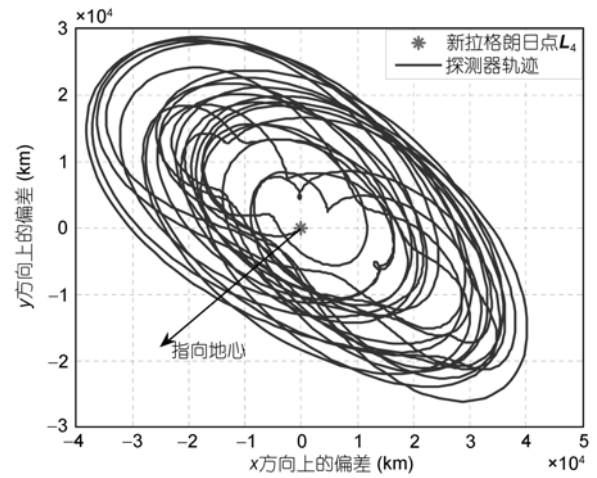


图 7 探测器相对精确拉格朗日点 L_4 的被动飞行轨迹 (700 d)

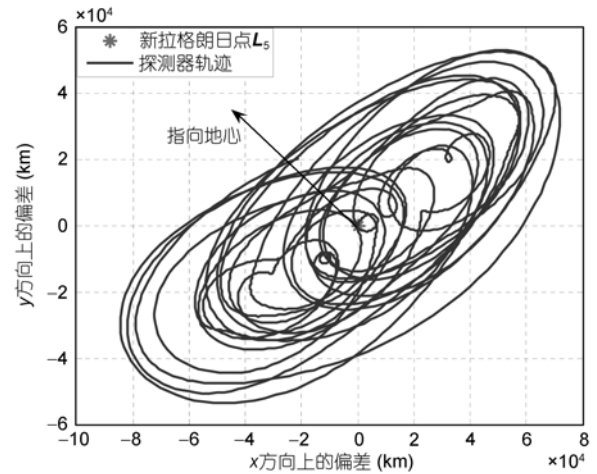


图 8 探测器相对精确拉格朗日点 L_5 的被动飞行轨迹 (700 d)

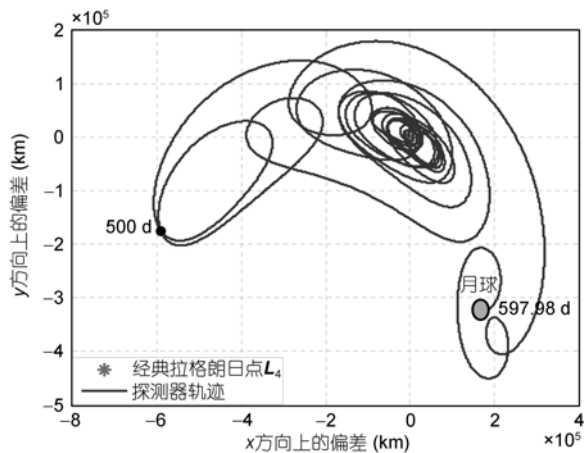


图 9 探测器相对经典拉格朗日点 L_4 的被动飞行轨迹 (撞击到月球)

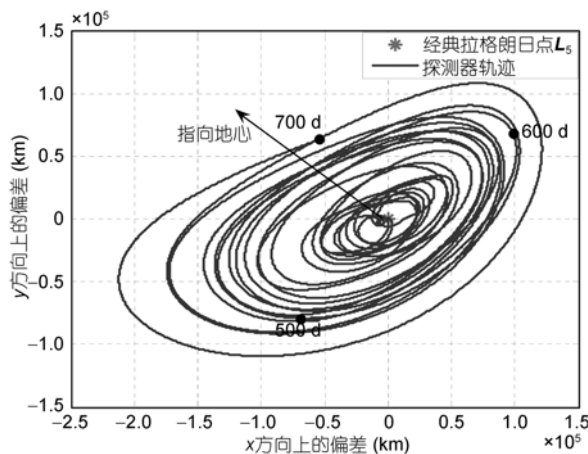


图 10 探测器相对经典拉格朗日点 L_5 的被动飞行轨迹 (700 d)

点上, 探测器将离开相应的拉格朗日点, 最大误差分别达到约 61×10^4 km (L_4 , 见图 9, 在 597.976 d 时撞击到月球), 21×10^4 km (L_5 , 见图 10). 将探测器发射到本文给出的精确三角拉格朗日点 L_4 和 L_5 上, 由于充分利用了太阳引力的直接和间接影响, 可以降低轨道保持的燃料消耗.

5 结论

导出了月球探测器在地月会合坐标系下的精确相对动力学模型, 模型中嵌入了太阳引力的直接影响和间接影响. 特别是间接影响在过去的文献中没有得到重视. 月球轨道平面的进动和章动以及白道面内运动的非开普勒特性对会合坐标系的角速度影响得到准确模化. 模化的方法是十分精简的, 克服了传统方法模化该问题的繁杂性和对无穷级数截断带来的不精确性(文献[16]). 相对动力学模型与经典绝对动力学模型是完全等价的. 利用精确相对动力学模型给出了精确拉格朗日点的求取方法, 精确拉格朗日点与儒略时间和关心的时间范围有关. 利用计算机迭代求得了特定时间段的精确共线拉格朗日点和三角拉格朗日点, 并与经典共线和三角拉格朗日点进行了比较, 验证了改进的拉格朗日点更符合动力学特性. 探测器放置到改进的拉格朗日点上, 长期漂移小, 可以大大降低用于轨道保持的燃料消耗. 所提供的相对动力学模型可以用于精确地月转移轨道设计, 特别对经由拉格朗日点的轨道设计有重要参考价值, 值得进一步探讨.

参考文献

- 1 Brown E W, Shook C A. Planetary Theory. New York: Dover Publications, Inc., 1964
- 2 Farquhar R W, Muhonen D P, Newman C R. Trajectories and orbital maneuvers for the first libration-point satellite. J Guidance Cont, 1980, 3(6): 549—554
- 3 Hill G W. Researches in Lunar theory. Am J Math, 1878(1): 129—147
- 4 Brown E W. An Introductory Treatise on the Lunar Theory. New York: Dover Publications, Inc., 1960
- 5 Szebehely V. Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. New York: Academic Press, Inc., 1967
- 6 Farquhar R W. The Control and Use of Libration-Point Satellites. NASA TR R-346, 1970
- 7 王鸿生. 世界科学技术史. 修订版. 北京: 中国人民大学出版社, 2001. 66—74
- 8 Conley C. Low energy transit orbits in the restricted three body problem. SIAM J Appl Math, 1968, 16(4): 732—746
- 9 Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Low energy transfer to the moon. Celestial Mech Dyn Astron. 2001, 81(1): 63—73
- 10 Parker J S, Born G H. Modeling a low energy ballistic lunar transfer using dynamical systems theory. J Spacecr Rockets, 2008, 45(6): 1269—1281

- 11 郝晓宁, 王威. 近地航天器轨道基础. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003
- 12 刘林, 王歆. 月球探测器轨道力学. 北京: 国防工业出版社, 2006
- 13 Tapley B D, Lewallen J M. Solar influence on satellite motion near the stable earth-moon libration points. *AIAA J*, 1964, 2(4): 728—732
- 14 Schechter H B. Three-dimensional nonlinear stability analysis of the sun-perturbed earth-moon equilateral points. *AIAA J*, 1968, 6(7): 1223—1228
- 15 Nicholson F T. Effect of solar perturbation on motion near the collinear earth-moon libration points. *AIAA J*, 1967, 5(12): 2237—2241
- 16 Farquhar R W, Kamel A A. Quasi-periodic orbit about the translunar libration. *Celestial Mech*, 1973, 7: 458—473
- 17 Mohn L, Kevorkian J. Some limiting cases of the restricted four-body problem. *Astron J*, 1967, 72(8): 959—963
- 18 Howell K C, Spencer D B. Periodic orbits in the restricted four-body problem. *Acta Astron*, 1986, 13(8): 473—479
- 19 刘林, 刘慧根. 地月系中探测器定点在三角平动点附近的位置漂移及其控制问题. *宇航学报*, 2008, 29(4): 1222—1227
- 20 徐明, 徐世杰. 地-月系平动点及 Halo 轨道的应用研究. *宇航学报*, 2006, 27(4): 695—699
- 21 车征, 李俊峰, 宝音贺西. 考虑太阳引力摄动的 Halo 轨道保持控制. *清华大学学报(自然科学版)*, 2009, 49(2): 285—288
- 22 Bolit E M, Meiss J D. Targeting chaotic orbit to the moon through recurrence. *Phys Lett A*, 1995, 204: 373—378
- 23 杨维廉. 发射极月卫星的转移轨道研究. *航天器工程*, 1997, 12(3): 19—33
- 24 Farquhar R W. The flight of ISEE-3/ICE origins, mission history and a legacy. *J Astron Sci*, 2001, 49(1): 23—73
- 25 Catlin K A, McLaughlin C A. Earth-moon triangular libration point spacecraft formations. *J Spacecr Rockets*, 2007, 44(3): 660—670
- 26 Danby J M A. Inclusion of extra forces in the problem of three bodies. *Astron J*, 1965, 70(3): 181—189

Precise relative dynamics model of a lunar probe and its application

JING WuXing* & GAO ChangSheng

School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

A precise dynamical model to describe the relative motion of a lunar probe in a rotating coordinate system is presented. Real celestial mechanics background of the sun, the earth and the moon is considered. An accurate and simple formula of the absolute angular velocity of the rotating coordinate system including solar gravitational perturbation is derived. The model would be the one for elliptical restricted three-body problem if the solar gravitation was neglected, and the one for circular restricted three-body problem if the lunar orbit eccentricity was zero. An iterative method to calculate accurate collinear and triangular Lagrange points, which are relevant to the Julian date and time period concerned, was established. The model can be used to design transfer orbit to the moon passing through the Lagrange points.

lunar probe, relative orbital dynamics, Lagrange point, four-body problem, solar gravitational perurbation

PACS: 05.45.-a, 45.50.Jf, 45.50.Pk, 95.55.Pe, 96.12.De