中国科学
1985 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

论弹性结构理论中两类算子的正定性和紧致性

王大钧　　胡海昌
(北京大学力学系)　　(中国空间技术研究院，北京大学)

摘　　要

关于弹性结构理论中的位移场、应变能和动能表达式可以通过引进适当的简化假设从弹性力学理论中的相应量得到．本文利用这样的关系和一些泛函性质，给出了各种弹性结构理论的"结构理论算子"的正定性和"能量嵌入算子"的紧致性的统一证明．特别是这些结论适用于具有一般的边界条件，如固定、铰支、自由、部分可动边界和它们的组合的壳体以及组合弹性结构．尤其具有重要意义的是，作为这些结论的后果，结构理论中平衡问题和固有振动问题的弱解的存在性，以及 Ritz 法的运用是有保证的．

一、引　　言

下述两个重要性质早已得到证明[1,2]：对于广泛的边界条件，三维弹性力学算子1)是正定的；弹性力学中位移函数组成的其模为两倍应变能的平方根的空间中的有界集，对应于其模为两倍动能系数的平方根的空间中的紧致集2)．

人们相信，对于各种结构理论，例如梁、板、壳等理论的两类算子的上述性质，可以基于各自的方程和边界条件，用不同的方法加以证明．但是这样做对于处理复杂的结构，例如任意壳体就相当困难，对于组合结构尤甚．虽然一些问题已经解决[3-7]，但仍有一些未尽的重要工作．1975 年 Bernadou 和 Ciralet[6] 给出了具有固定的边界段的壳体理论算子的正定性，1980 年武际可[7]处理了简支边界壳的情形．

本文借助于力学背景处理这个问题，阐明了行之有效的结构理论中的允许位移场、应变能和动能表达式都可以通过引进适当的简化假设而从弹性力学的相应量得到，并且证明了弹性力学算子的正定性和能量嵌入算子的紧致性在这些结构理论中被保留为相应的性质．这个结论适用于广泛的结构理论，包括各种类型和壳体和组合结构．作为上述结论的直接后果，结构

本文 1984 年 8 月 18 日收到．

1) 所谓三维弹性力学算子，是指弹性力学中以位移表达的平衡方程中的微分算子．后面将提到的结构理论算子与此类似．

2) 为了说明简便，这样的两类空间可以分别称为应变能模空间和动能模空间．以相同的元素建立起来的由前一空间到后一空间的映射是一个线性算子．虽然这类算子在力学上常被用到，但没有名称．本文暂且称它为能量嵌入算子．于是，应变能模空间中的有界集对应于动能模空间中的紧致集这样一个性质，可简单地表达为能量嵌入算子是紧致的．另外，由弹性力学算子的正定性可知，能量嵌入算子是有界的．

理论中平衡问题和固有振动问题中的弱解的存在性，以及 Ritz 方法的运用是有保证的.

二、两个辅助定理

容易证明下面两个泛函分析的简单结论.考虑三个内积空间 X_1, X_2 和 X_3, 以及后两者的子空间 X_2^r 和 X_3^r. X_i 的内积用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ 表示,模用 $\|\cdot\|_i$ 表示，X_1 上有一个线性、对称的正算子 A. 构造一个新的内积空间 X_4, 其中任意两个元素 x, y 的内积定义为 $\langle x, y\rangle_4 = \langle Ax, y\rangle_1$. 定义算子 $T_{41}: X_4 \to X_1$ 为相同元素的映射. 如已有两个一一对应的算子 $T_{21}: X_2^r \to X_1$ 和 $T_{32}: X_3 \to X_2$, 并且定义算子 T_{32} 的限制

$$T_{32}^r = T_{32}|_{X_3^r}: X_3^r \to X_2^r.$$

于是存在一个一一对应映射 $T_{43} = (T_{32}^r)^{-1} T_{21}^{-1} T_{41}: X_4 \to X_3^r$.

辅助定理 1. 若算子 T_{21}, T_{32} 和 T_{43} 都有界,则算子 T_{41} 也有界.

此定理图示于图 1.

考虑分别作为空间 X_1, X_2, X_3, X_4, X_2^r 和 X_3^r 的完备空间的 Hilbert 空间 $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$, $\bar{X}_4$, $\bar{X}_2^r$ 和 $\bar{X}_3^r$, 对应的四个算子 $\bar{T}_{43}$, $\bar{T}_{32}$, $\bar{T}_{21}$ 和 $\bar{T}_{23}^r$ 可分别由算子 T_{43}, T_{32}, T_{21} 和 T_{32}^r 导出,其中 $\bar{T}_{32}^r$ 是 $\bar{T}_{32}$ 在区域 $\bar{X}_3^r$ 的限制.

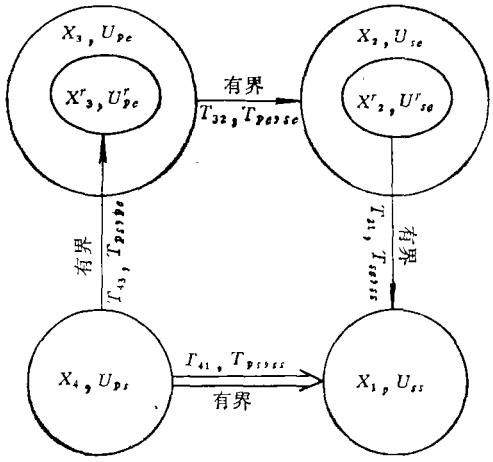


图 1

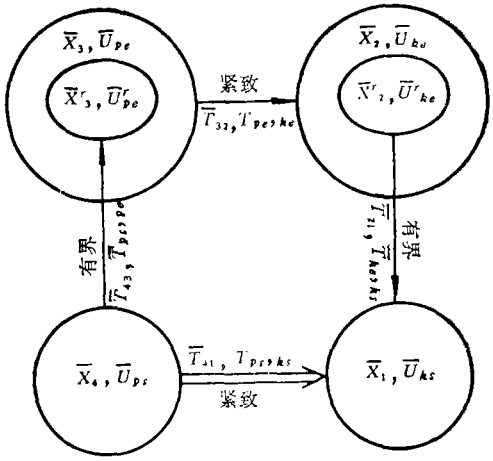


图 2

辅助定理 2. 若算子 $\bar{T}_{43}$ 和 $\bar{T}_{21}$ 有界,算子 $\bar{T}_{32}$ 紧致,则算子 $\bar{T}_{41} = \bar{T}_{21}\bar{T}_{32}^r\bar{T}_{43}$ 也紧致.

此定理图示于图 2.

三、关于弹性结构的定理

在梁、板、壳和其它一维或二维结构的理论中,广义位移向量用 $\boldsymbol{w}(F)$ 表示,其中 F 是结构的中面或中心线所占区域. 对于某一特殊理论,所有的允许广义位移 $\boldsymbol{w}$ 组成一函数集 U_s,它是该结构理论算子 A_s 的定义域. 按下述方法可在 U_s 上定义三个内积空间.

第一个内积空间表示为 U_{ss}, 相应的模是

$$\|\boldsymbol{w}\|_s^2 = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle_s = \int_F \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\,dF, \tag{1}$$

它与平方可积空间 $L^2(F)$ 的模一致. U_{ss} 称为该结构理论的位移空间. U_{ss} 的完备 $\bar{U}_{ss}$ 是 Hilbert 空间.

第二个内积空间表示 U_{ps}, 相应的模定义为两倍应变能的平方根, 即

$$\|\boldsymbol{w}\|_{ps}^2 = 2\Pi_s(\boldsymbol{w}), \tag{2}$$

其中二次型 Π_s 是结构的应变能. 对于所有行之有效的结构理论, 算子 A_s 是线性、对称和正的. U_{ps} 的完备 $\bar{U}_{ps}$, 称为该结构理论的应变能模空间.

第三个内积空间表为 U_{ks}, 相应的模定义为该结构的两倍动能系数的平方根, 即

$$\|\boldsymbol{w}\|_{ks}^2 = 2K_s(\boldsymbol{w}) = \langle m\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle_s, \tag{3}$$

其中 K_s 和 m 分别为结构的动能系数和广义质量密度. U_{ks} 的完备 $\bar{U}_{ks}$ 称为该结构的动能模空间.

由相同元素建立的从 U_{ps} 到 U_{ss} 和从 $\bar{U}_{ps}$ 到 $\bar{U}_{ks}$ 的映射分别记为

$$T_{ps,ss}: U_{ps} \to U_{ss}, \tag{4a}$$

$$T_{ps,ks}: \bar{U}_{ps} \to \bar{U}_{ks}. \tag{4b}$$

$T_{ps,ks}$ 称为该结构理论的能量嵌入算子.

在结构理论中有这样两个重要的数学问题: 算子 $T_{ps,ss}$ 是否有界? (或者, 等价于, 结构理论算子 A_s 是否正定?)进而, 算子 $T_{ps,ks}$ 是否紧致? 本文利用结构理论和弹性力学间的关系来解决这些问题.

事实上, 一个同样的结构可以用弹性力学作更精确的分析. 这样, 弹性体的位移可以用三维向量场 $\boldsymbol{u}(\Omega)$ 描述, Ω 是弹性体所占区域. 所有允许位移 $\boldsymbol{u}$ 组成函数集 U_e, 它是弹性力学算子 A_e 的定义域. 同前面在结构理论中的讨论一样, 可以在 U_e 上构造三个内积空间, 并形成三个 Hilbert 空间.

第一对是弹性力学的位移空间 U_{se} 和它的完备 $\bar{U}_{se}$. 这对空间的模定义为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{se}^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}d\Omega. \tag{5}$$

第二对是空间 U_{pe} 和它的完备 $\bar{U}_{pe}$. 其模定义为:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{pe}^2 = 2\Pi_e(\boldsymbol{u}), \tag{6}$$

二次型 Π_e 是弹性体的应变能. Hilbert 空间 $\bar{U}_{pe}$ 称为弹性力学应变能模空间.

第三对是空间 U_{ke} 和它的完备 $\bar{U}_{ke}$. 其模定义为:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{ke}^2 = 2K_e(\boldsymbol{u}) = \langle \rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e, \tag{7}$$

其中 K_e 和 ρ 分别是弹性体的动能系数和质量密度. Hilbert 空间 $\bar{U}_{ke}$ 称为弹性力学的动能模空间.

对于实际的弹性体, 常有 $\min\rho \geqslant C > 0$, $\max\rho$ 有限. 于是

$$(\min\rho)\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e \leqslant \langle \rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e \leqslant (\max\rho)\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e.$$

所以 U_{se} 和 U_{ke} 是等价模空间, 在许多情况下不需加以区别.

相同元素建立的从 U_{pe} 到 U_{se}, 和从 $\bar{U}_{pe}$ 到 $\bar{U}_{ke}$ 的映射表示为:

$$T_{ke,se}: U_{pe} \to U_{se}, \tag{8a}$$

$$T_{pe,ke}: \bar{U}_{pe} \to \bar{U}_{ke}. \tag{8b}$$

算子 $T_{pe,ke}$ 称为弹性力学的能量嵌入算子.

已经证明[1,2]，对于下面的边界条件，各向同性和各向异性的弹性力学算子 A_e 是正定的（也就是 $T_{pe,se}$ 有界），这些边界条件为：位移向量为零；自由边界[1)]；法向位移和切向力为零；切向位移的法向力为零；上述四种的组合.

现在，让我们指出结构理论和弹性力学间的基本关系. 行之有效的结构理论是弹性力学在某种情况下的近似. 一般地说，它可由弹性力学引进适当的假设而导出. 实际上，结构理论中的允许位移集和能量模可以按下面的办法有规则的导出.

（1）在 U_{se} 中引入某些约束，使 $\boldsymbol{u}$ 依赖于 $\boldsymbol{w}$：

$$\boldsymbol{u} = T_{ss,se}\boldsymbol{w}, \quad \forall \boldsymbol{w} \in U_{ss}. \tag{9}$$

当 $\boldsymbol{w}$ 遍及结构理论的位移集 U_{ss} 时，$\boldsymbol{u}$ 遍及 U_{se} 的子集 U_{se}^r. U_{ss} 和 U_{se}^r 分别是算子 $T_{ss,se}$ 的定义域和值域.

对于结构理论中给定的边界条件

$$\Gamma_i^s \boldsymbol{w}|_{\partial_j F} = 0, \tag{10}$$

经映射(9)式，得弹性力学中对应的边界条件

$$\Gamma_e^i \boldsymbol{u}|_{\partial_j Q} = 0. \tag{11}$$

（2）结构理论中的应变能可从弹性力学经两步而得到. 首先，将位移约束在子集 U_{se}^r 上，得到

$$\Pi_e^r = \Pi_e^r(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{w} \in U_{ss},$$

一般说来，用于实际问题，Π_e^r 是过大的. 所以一些补充的应力分布的假设被引进，从而得到用于结构理论中的应变能 $\Pi_s(\boldsymbol{w})$，而

$$\Pi_s(\boldsymbol{w}) \leqslant \Pi_e^r(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{w} \in U_{ss}.$$

认识到下面的性质是主要的. $\Pi_s(\boldsymbol{w})$和 $\Pi_e^r(\boldsymbol{w})$ 都可看作源于弹性力学的三类变量的广义应变能 $\Pi_3(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$. 一方面，对应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 求 Π_3 的极小得到弹性力学二类变量的广义应变能 $\Pi_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$，再对应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 求 Π_2 的极大得到通常的弹性力学的应变能 $\Pi_e(\boldsymbol{u})$. 然后经（9）式的位移约束得到 $\Pi_e^r(\boldsymbol{w})$. 另一方面，在结构理论中按结构理论对应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 作近似后对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 求 Π_3 的极小，得到 $\Pi_{2s}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$. 再对应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 作近似后对 $\boldsymbol{\sigma}$ 求 π_{2s} 的极大，得到 $\Pi_s(\boldsymbol{u})$. 最后对位移作近似即(9)式，得到结构理论的应变能 $\Pi_s(\boldsymbol{w})$. 因而对应于 $\Pi_e^r(\boldsymbol{w})$和 $\Pi_s(\boldsymbol{w})$ 的密度都可表为结构的广义应变（结构位移 $\boldsymbol{w}$ 和它的导数的线性组合）的代数正定二次型，它们的区别只是系数不同. 由于独立的广义应变的个数又是有限的，因此 $\Pi_s(\boldsymbol{w})$ 和 $\Pi_e^r(\boldsymbol{w})$ 被用于定义模时它们是等价的. 这样，我们得到重要的不等式

$$\Pi_e^r \geqslant \Pi_s \geqslant \alpha^2 \Pi_e^r, \tag{12}$$

其中 α 是非零常数.

（3）结构理论中的动能可通过将 $\boldsymbol{u}$ 约束到子集 U_{se}^r 上，从弹性力学的动能直接得到，或者再略去表达式的某些正项. 所以总是有

$$K_e^r \geqslant K_s, \tag{13a}$$

即

$$\langle \rho \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_e \geqslant \langle m\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle_s, \quad \forall \boldsymbol{w} \in U_{ss}. \tag{13b}$$

1）当边界条件允许某些刚体位移时，应该在允许位移中消去它们.

现在我们利用第二节中两个辅助定理，取

$$X_1 = U_{ss},\quad X_2 = U_{se},\quad X_3 = U_{pe},\quad X_4 = U_{ps},$$
$$\bar{X}_1 = \bar{U}_{ks},\quad \bar{X}_2 = \bar{U}_{ke},\quad \bar{X}_3 = \bar{U}_{pe},\quad \bar{X}_4 = \bar{U}_{ps},$$
$$A = A_s,$$
$$T_{21} = T_{se,ss} = (T_{ss,se})^{-1},\quad T_{32} = T_{pe,se},$$
$$T_{43} = T_{ps,pe}: U_{ps} \to U'_{pe},\quad T_{41} = T_{ps,ss},$$
$$\bar{T}_{21} = \bar{T}_{ke,ks}: \bar{U}'_{ke} \to \bar{U}_{ks},\quad \bar{T}_{21} = T_{pe,ke}: \bar{U}_{pe} \to \bar{U}_{ke},$$
$$\bar{T}_{43} = \bar{T}_{ps,pe}: \bar{U}_{ps} \to \bar{U}'_{pe},\quad \bar{T}_{41} = T_{ps,ks}: \bar{U}_{ps} \to U_{ks},$$

其中每一个 $\bar{T}$ 是对应的算子 T 的有界线性扩张.

如果弹性体的边界条件使得弹性力学算子 A_e 是正定的，而 $T_{pe,ke}$ 是紧致的，辅助定理中的条件就得到满足. 可以验证如下.

注意到(13)式，有

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e \geqslant \frac{1}{\max \rho}\langle \rho \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_e \geqslant \frac{1}{\max \rho}\langle m\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle_s$$
$$\geqslant \frac{\min m}{\max \rho}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle_s,\quad \forall \boldsymbol{w} \in U_{ss}. \tag{14}$$

这表明算子 $T_{se,ss}$ 是有界的.

分别地作为(13)和(12)式的结果，算子 $T_{ke,ks}$ 和 $T_{ps,pe}$ 是有界的.

这样，我们得到:

定理 1. 对于具有给定边界条件的弹性结构，如果对应的弹性力学中的边界条件保证弹性力学算子 A_e 正定，则在给定边界条件下的结构理论算子 A_s 也是正定的.

定理 2. 如果定理 1 中考虑的边界条件保证算子 $T_{pe,ke}$ 的紧致性，则算子 $T_{ps,ks}$ 也是紧致的.

定理 1 和定理 2 分别表示于图 1 和图 2.

四、几 个 例 子

(1) 薄板理论. 在经典薄板理论中采用了 Kirchhoff 假设: 垂直于变形前的中面的直线段仍然是垂直于变形后的中面的直线段. 另外还采用了垂直中面的法应力为零的假设.

在运用三类变量广义变分原理从弹性力学推导板的理论的过程中，需要采用下列三类假设:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -z\dfrac{\partial}{\partial y} \\ 1 \end{Bmatrix} \boldsymbol{w}(x, y) = T_{ss,se}\boldsymbol{w}, \tag{15}$$

关于应力的假设:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3}\boldsymbol{M},\quad \sigma_z = 0,\quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

其中 h 为板的厚度．关于应变的假设：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}e_x\\e_y\\e_z\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\\\gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}z & 0 & 0\\0 & z & 0\\\frac{-\nu}{1-\nu}z & \frac{-\nu}{1-\nu}z & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2z\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x\\\kappa_y\\\kappa_{xy}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B\kappa}. \tag{17}$$

首先按上节 (2) 中所述性质，考虑 Π_c^r 和 Π_s 的关系．弹性力学的三类变量的广义应变能

$$\Pi_3(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{A\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}]\right\}d\Omega, \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为弹性模量矩阵，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}^{-1}$，而

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla})=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 求 Π_3 的极小值，当 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{a\sigma}$ 时得到二类变量的广义应变能

$$\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=\int_\Omega\left\{\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{a\sigma}\right\}d\Omega, \tag{19}$$

再对 $\boldsymbol{\sigma}$ 求 Π_2 的极大值，当 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{AE}^T(\nabla)\boldsymbol{u}$ 时得到通常意义下弹性力学的应变能

$$\Pi_c(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\int_\Omega(\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u})d\Omega. \tag{20}$$

然后，采用位移假设(15)，就得到弹性力学中对应板的变形的应变能

$$\pi_c^r(\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}\int_F\frac{D(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\{(\kappa_x+\kappa_y)^2+(1-2\nu)[(\kappa_x-\kappa_y)^2+4\kappa_{xy}^2]\}dF, \tag{21}$$

其中 D 为板的抗弯刚度，而

$$\kappa_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \kappa_y=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \kappa_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

是板的变形曲率．

另一方面，在板的理论中，先对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 作近似 (17) 式，代入 (18) 式，对 $\boldsymbol{\kappa}$ 求其极小，当

$$\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{D}^{-1}\int\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}dz$$

时得到

$$\pi_{2s}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=-\int_F\left\{\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{B}dz\boldsymbol{D}^{-1}\int\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}dz\right\}dF$$
$$+\int\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{\nabla})d\Omega, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是板的刚度矩阵．再采用应力的假设 (16) 式，将 (16) 式代入 (22) 式，对 $\boldsymbol{M}$ 求其极

大值，当

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}\int\frac{12z}{h^3}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\end{Bmatrix}dz=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}$$

时得到

$$\Pi_s(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\int_F\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}dF+\int_\Omega\frac{12z}{h^3}\left\{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{D}\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]^T\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{8}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)[Q_y,Q_x]\left[\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]^T\right\}d\Omega. \tag{23}$$

最后作位移假设(15)，得板的理论中的应变能

$$\Pi_s(\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}\int_F\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa}dF$$
$$=\frac{1}{2}\int_F\frac{D}{2(1+\nu)}\left\{(\kappa_x+\kappa_y)^2+\frac{1-\nu}{1+\nu}[(\kappa_x-\kappa_y)^2+4\kappa_{xy}^2]\right\}dF. \tag{24}$$

(21) 和 (24) 式的被积函数都是板的三个广义应变分量 κ_x, κ_y, κ_{xy} 的正二次型，比较两式，得

$$\Pi_c^r\geqslant\Pi_s\geqslant\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\Pi_c^r. \tag{25}$$

至于板的动能，通常为：

$$K_s=\frac{1}{2}\int_F mw^2dF$$

而

$$K_c^r=\frac{1}{2}\int_F\left[m\boldsymbol{w}^2+I\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right]dF.$$

所以有

$$K_c^r\geqslant K_s. \tag{26}$$

表达式 (15), (25) 分别是 (9), (12) 式在板理论中的特殊形式.

在弹性力学中有广泛的边界条件都可保证弹性力学算子 A_e 是正定的，以及能量嵌入算子 $T_{fe,ke}$ 是紧致的(详见下面关于壳的例子). 因此，在对应的板的条件下板理论算子 A_s 的正定性和能量嵌入算子的紧致性是有保证的.

(2) 薄壳理论. 在薄壳理论中也采用了 Kirchhoff 假设和垂直中面的法应力为零的假设. 于是有位移假设：

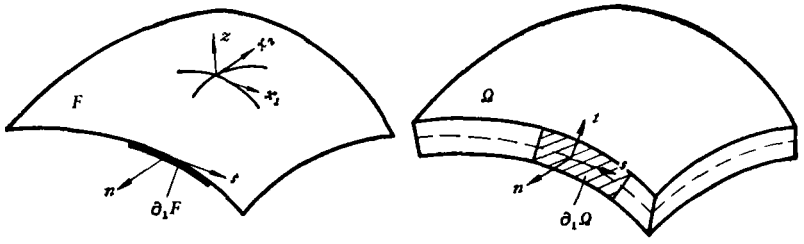
$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{z}{R_1} & 0 & -\dfrac{z}{A_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ 0 & 1+\dfrac{z}{R_2} & -\dfrac{z}{A_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\end{Bmatrix}=T_{ss,se}\boldsymbol{u}_0. \tag{27}$$

在应力假设中

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{1}{h}\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_{12}\end{Bmatrix}+\frac{12z}{h^3}\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_{12}\end{Bmatrix}=\frac{1}{h}\boldsymbol{N}+\frac{12z}{h^3}\boldsymbol{M}.$$

其余同(16)式，应变假设为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B}\left(\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}e_1\\ e_2\\ 2\omega\end{Bmatrix}+\boldsymbol{\kappa}\right)=\boldsymbol{B}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{\kappa}\right).$$



(a)　　(b)

图　3

至于壳的结果，可以仿照板的理论中的作法导出。这里将结果表为更简单的形式：

$$\Pi_s=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{E}{2(1-\nu)}\left\{(e_{11}+e_{22})^2+\frac{1-\nu}{1+\nu}[(e_{11}-e_{22})^2+\gamma_{12}^2]\right\}d\Omega,\tag{28}$$

$$\Pi_e^r=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\{(e_{11}+e_{22})^2+(1-2\nu)[(e_{11}-e_{22})^2+\gamma_{12}^2]\}d\Omega,\tag{29}$$

$$K_s=\frac{1}{2}\int_F m\boldsymbol{u}_0^2dF,\tag{30}$$

$$K_e^r=\frac{1}{2}\int_F[m\boldsymbol{u}_0^2+I(\vartheta^2+\psi^2)]dF.\tag{31}$$

易见，仍有(25)及(26)式的关系。

壳体的六种典型的边条件列于表 1.

表　1

	壳体位移边界条件	对应的弹性力学边界条件
1	固定：$u_0=\theta_n=0$	固定：$\boldsymbol{u}=0$
2	自　由	自　由
3	$(\boldsymbol{u}_0)_n=\theta_n=0$	$\boldsymbol{u}_0=0$
4	$w=(\boldsymbol{u}_0)_s=0$	$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_s=0$
5	铰支：$w=(\boldsymbol{u}_0)_s=(\boldsymbol{u}_0)_n=0$	强子 $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_s=0$
6	$(\boldsymbol{u}_0)_n=(\boldsymbol{u}_0)_s=\theta_n=0$	强子 $\boldsymbol{u}_n=0$

已经证明在表中右边的那些边界条件下，弹性力学算子 A_e 是正定的，能量嵌入算子是紧致的．因此具有表中左边那些边条件的壳体理论的算子 A_s 的正定性，以及能量嵌入算子 $T_{ps,ks}$ 的紧致性能得到保证．

(3) 梁．梁的经典理论中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -x\dfrac{\partial}{\partial z} & -y\dfrac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=T_{ss,se}\boldsymbol{w}. \tag{32}$$

不等式(12)为特殊形式

$$\Pi_e^r \geqslant \Pi_s=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\Pi_e^r. \tag{33}$$

(4) 具有剪切变形的各向异性板．各向异性板可看作具有平行于中面的对称面的各向异性弹性体，应力-应变关系是

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{16}\\ d_{12} & d_{22} & d_{26}\\ d_{16} & d_{26} & d_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_x\\ e_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{d}\boldsymbol{e},$$

$$\begin{Bmatrix}\tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{44} & c_{45}\\ c_{45} & c_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{\gamma}.$$

在位移、应变、应力的假设中，

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-z & 0 & 0\\ 0 & -z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\\ w\end{Bmatrix}=T_{ss,se}\boldsymbol{w}, \tag{34}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\gamma_y\\ \gamma_x\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\gamma}.$$

其余各式与(16)和(17)式中的相同．

应变能的结果是

$$\Pi_e^r=\frac{1}{2}\int_F\left(\frac{h^3}{12}\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{d}\boldsymbol{\kappa}+h\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{\gamma}\right)dF,$$

$$\Pi_s=\frac{1}{2}\int_F(\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\gamma})dF,$$

其中 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$ 为各向异性板的弯曲、剪切刚度矩阵．

因 Π_e^r 和 Π_s 的被积函数都是 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的分量的正二次型，所以不等式(12)成立．

(5) 组合结构．对于梁、板、壳，以及其它结构和二维或三维弹性件组合而成的组合结构，它的应变能和动能是它的元体的相应量的总和．如果不等式(12)和(13)式对每个元件成立，则对组合结构也成立．所以定理 1 和定理 2 也可用于组合结构．

应意注一个有用的情形，组合结构元件的交接处的中面形状不必要求是光滑的，包括壳体中面可以不光滑，因为三维弹性体的边界表面只需要逐片光滑．

王仁、姜礼尚、应隆安、武际可等教授，对本文提出了宝贵的意见，作者在此一并表示感谢．

参　考　文　献

[1] Михлин, С. Г., *Проблема минимума квадратичного функционала*, Государственное издательство технико—теоретинеский литературы, Москва, 1952.

[2] Fichera, G., *Encyclopedia of Physics* (Ed. Flugge, S.), Vol. VI a/2, Springer-Verlag, 1972, 347—389.

[3] Coutris, N., *Journal de Mécanique*, **12**(1973), 463—475.

[4] Гордезиани, Д. Г., *Д. А. Н*, **215** (1974), 1289—1292.

[5] Щойхет, В. А., *П. М. М.* **38** (1974), 567—571.

[6] Bernadou, M., Ciarlet, P. G., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2nd. Inter. Sym., Dec., 15—19, 1975, Springer-Verlag, 1976, 89—136.

[7] 武际可，固体力学学报，1981，4：435—444.