

关于 Morse 对度量传递性的猜想*

丁同仁

(北京大学数学系, 北京 100871)

摘 要

度量传递性蕴含拓扑传递性为一已知的结论. 然而, 反之如何, 则是一个没有得到解决的问题. 在 1946 和 1973 年, Morse 曾先后两次提到这个问题, 并猜想说: 对于解析系统或具有某种光滑性的系统, 上述逆定理恐怕是对的. 本文对几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 系统否定了 Morse 的猜想, 而对二维环面上的解析系统证实了他的猜想是正确的.

关键词: 度量传递性, 拓扑传递性, 常微解析系统, Morse 猜想

一、引 言

设在 n 维的紧致流形 M 上有一个动力系统 f^t . 如果 f^t 有一个在相空间 M 内到处稠密的运动轨道, 则称该动力系统是拓扑传递的. Birkhoff 首先在环面 T^2 上给出这种拓扑传递性的例子.

Birkhoff 和 Smith^[1] 还定义了度量传递性, 即: f^t 是度量传递的, 只要它的任何不变集 A 的测度等于零或者等于空间 M 的测度 $\text{mes}(M)$. 不难证明: 度量传递性蕴含拓扑传递性. 但是, 这个逆命题是否成立呢? 这是一个尚未解决的问题. Morse 在 1946 和 1973 年 (文献 [2, 3]) 曾先后两次指出: 非常需要对这个逆定理进行肯定的或否定的证明; 在不解决上述逆定理是否成立的问题之前很难对 Birkhoff 的各态经历定理在统计或符号动力系统的数学中的重要性作出正确的评价. 另外, Morse 还对这逆定理作了下述猜想: 对解析系统或具有某种光滑度的系统, 它恐怕是正确的.

在本文的第二节中, 我们将在 n 维的环面 $T^n (n \geq 2)$ 上构造一个几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统, 使它具有拓扑传递性而没有度量传递性. 因此, 这是一个反例, 对几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统它否定了上述 Morse 猜想. 而且, 根据我们同样的构造法, 还可以直接证明下述定理 1 和 2.

定理 1. 设 M 为一紧致的 n 维 $C^{(r)}$ 流形 ($n \geq 2$). 如果在 M 上有一个具有拓扑传递性的 $C^{(r)}$ 动力系统 ($r \geq 1$), 则在 M 上可以找到一个 $C^{(r)}$ 动力系统, 使它也具有拓扑传递性,

本文 1988 年 12 月 23 日收到.

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.

但没有度量传递性.

定理 2. 设 M 为一紧致的 n 维解析流形 ($n \geq 2$). 如果在 M 上有一个具有拓扑传递性的解析动力系统, 则在 M 上可以找到一个几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统, 使它具有拓扑传递性, 但没有度量传递性.

在第三节中, 我们还将证明下述结果.

定理 3. 对环面 T^2 上的解析动力系统而言, 拓扑传递性蕴含度量传递性.

注意, 定理 3 是在环面 T^2 上对解析动力系统的 Morse 猜想所作的一个肯定的回答. 至于一般 n 维流形上的解析系统, Morse 的猜想仍未得到证实. 无疑, 这是一个更困难的问题.

二、非解析的动力系统

1. 令 T^n 为 n 维的环面, 它具有下述性质: 若 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_n)$ 是 T^n 内的两个点, 则 $x = y$ 当且仅当 $x_i \equiv y_i \pmod{1}$, $i = 1, \dots, n$. 由于对 1 维动力系统而言, Morse 猜想总是正确的, 因此我们不妨只考虑 $n \geq 2$ 的情形. 本节的目的是要在 T^n 上构造一个几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统, 使它具有拓扑传递性, 但没有度量传递性.

为此, 先取一常数向量

$$v_0 = (1, \pi, \dots, \pi^{n-1}),$$

其次, 由公式

$$v(x) = v_0, \text{ 对一切 } x \in T^n,$$

在 T^n 上定义一个向量场 $v(\cdot)$. 然后, 我们得到一个常微系统

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad (x \in T^n), \quad (1)$$

它产生一个解析的动力系统

$$f'(x) = x + tv_0, \quad (x \in T^n). \quad (2)$$

不难证明动力系统 (2) 的每一运动在相空间 T^n 中的轨道是到处稠密的. 为了确定起见, 我们考虑一个特殊运动 $f'(0)$, 令它的轨道为 Γ_0 , 则 Γ_0 在 T^n 内是到处稠密的.

取 T^n 的二个 $(n-1)$ 维的截面:

$$S_1 = \{x \in T^n \mid x_1 = 0\}$$

和

$$S_2 = \left\{x \in T^n \mid x_1 = \frac{1}{2}\right\}.$$

则轨道 Γ_0 与 S_1 和 S_2 分别相交无穷多次, 它们的交点分别为

$$p_i = f^i(0) \text{ 和 } q_i = f^{i+\frac{1}{2}}(0),$$

其中 i 为任何整数. 注意, 交点

$$q_i = p_i + \frac{1}{2}v_0,$$

而且区间

$$[p_i, q_i] := \left\{x \in T^n \mid x = p_i + sv_0, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}\right\}$$

是 Γ_0 在 S_1 和 S_2 之间 $\left(0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\right)$ 以 p_i 和 q_i 为端点的一个弧段.

令 $\text{mes}(\cdot)$ 和 $\text{mes}^*(\cdot)$ 分别表示 T^* 和 T^{*-1} 内的 Lebesgue 测度, 则有

$$\text{mes}(T^*) = 1, \text{mes}(S_1) = \text{mes}(S_2) = 0,$$

$$\text{mes}^*(S_1) = \text{mes}^*(S_2) = 1.$$

现取一个常数 $c > 0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2c}{1+k^2} = \frac{1}{2}.$$

另外, 对任何整数 k , 在 S_1 内以 p_k 为中心作一开球 B_k , 使得

$$\text{mes}^*(B_k) = \frac{c}{1+k^2}.$$

由此可见, 集合

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$$

在 S_1 内是一个开集, 它在 S_1 内的测度满足

$$0 < \text{mes}^*(B) < \frac{1}{2};$$

因而集合

$$F_1 = S_1 \setminus B$$

在 S_1 内是一个闭集, 它的测度满足

$$\frac{1}{2} < \text{mes}^*(F_1) < 1.$$

然后, 对应于 S_1 内的闭集 F_1 , 在 S_2 内规定一个闭集

$$F_2 = \left\{ x \in T^* \mid x = p + \frac{1}{2} \nu_0, p \in F_1 \right\}.$$

因此, 我们有

$$\text{mes}^*(F_2) = \text{mes}^*(F_1).$$

而且, 动力系统 (2) 的连接 F_1 和 F_2 的所有在 S_1 和 S_2 之间 $\left(0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\right)$ 的轨道弧组成 T^* 内的一个闭集

$$E = \left\{ x \in T^* \mid x = p + s\nu_0, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, p \in F_1 \right\},$$

它的测度为

$$\text{mes}(E) = \frac{1}{2} \text{mes}^*(F_1).$$

因此, 我们有

$$\frac{1}{4} < \text{mes}(E) < 1. \quad (3)$$

注意, 集合 $F = F_1 \cup F_2$ 在 T^* 内是闭的, 而且

$$\text{mes}(F) = 0.$$

2. 由于 F 在 T^* 内是一个紧致集, 我们可以找到一个 $C^{(\infty)}$ 光滑的函数

$$\theta: T^* \rightarrow [0, \infty),$$

使得

$$\theta^{-1}(0) = F \quad (4)$$

(参考文献 [4]); 即当 $x \in F$ 时, $\theta(x) = 0$; 而当 $x \in T^* \setminus F$ 时, $\theta(x) > 0$. 而且, 利用 Whitney 定理^[4], 我们可以改造上述函数 $\theta(\cdot)$, 使它在 T^* 内是几乎处处解析的, 而仍保留性质 (4) 和 $C^{(\infty)}$ 光滑性.

这样, 我们就得到一个几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 向量场

$$w(x) = \theta(x)v(x), \quad (x \in T^*).$$

集合 F 的每一点都是向量场 $w(\cdot)$ 的奇点, 而对集合 $(T^* \setminus F)$ 的每一点 y , 向量 $w(y)$ 是非蜕化的, 而且它与 $v(y)$ 有相同的方向.

现在, 考虑常微系统

$$\frac{dx}{dt} = w(x), \quad (x \in T^*), \quad (5)$$

它产生了一个几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统

$$g^t(\cdot): T^* \rightarrow T^*. \quad (6)$$

根据上述集合 F 的结构, $f'(0)$ 的轨道 Γ_0 没有接触到常微系统 (5) 的奇点. 因此, (5) 式的运动 $g^t(0)$ 和 (1) 式的运动 $f^t(0)$ 有同一的轨道 Γ_0 , 它在 T^* 内是稠密的. 这就是说, 动力系统 (6) 是拓扑传递的.

另一方面, 由于 F 的每一点都是 (5) 式的奇点, 我们有

$$g^t(F) = F, \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (7)$$

而对于集合 $(E \setminus F)$ 的任一点 x_0 , 存在唯一的开区间

$$(p, q) = \left\{ x \in E \mid x = p + sv_0, \quad 0 < s < \frac{1}{2} \right\},$$

它包含 x_0 点, 其中 p 是 F_1 的某一点, 而 $q = p + \frac{1}{2}v_0$ 是 F_2 内的一点. 注意

$$E = \bigcup_{p \in F_1} (p, q) \cup F.$$

由于 (p, q) 是运动 $f^t(x_0)$ 的一个轨道弧, 而且它不含 (5) 式的奇点, 因此 (p, q) 是 $g^t(x_0)$ 的轨道. 由此推出

$$g^t((p, q)) = (p, q), \quad (t \in \mathbb{R}),$$

它与 (7) 式一起蕴含: 集合 E 是动力系统 (6) 的一个闭的不变集. 再利用 (3) 式就知道: 动力系统 (6) 没有度量传递性.

因此, 对于几乎处处解析的 $C^{(\infty)}$ 动力系统, 由 (6) 式规定的动力系统否定了上述 Morse 对度量传递性的猜想.

最后, 对于定理 1 和 2 的证明, 我们只需作如下的注解.

设常微系统

$$\frac{dx}{dt} = u(x), \quad (x \in M)$$

有一运动 $f'(p_0)$, 其轨道 Γ_0 在 n 维的紧致流形 M 内到处稠密. 则在 Γ_0 上可以取两点 p_0 和 $p_1 = f'(p_0)$, 其中 r 是一个充分小的正数(或负数, 则 $|r|$ 充分小), 而且在 p_0 点和 p_1 点分别取 Γ_0 的两个局部的 $(n-1)$ 维的横截面 S_1 和 S_2 , 它们组成上述动力系统的一个局部轨道管子的底面和顶面. 然后, 我们可以应用上面类似的方法构造集合 $F_1 \subset S_1$ 和集合 $F_2 \subset S_2$, 如此等等. 这样一来, 定理 1 和定理 2 的证明就是显然的了.

三、环面 T^2 上的解析动力系统

本节将证明在第一节中叙述的定理 3. 为此, 考虑常微系统

$$\frac{dx}{dt} = u(x), \quad (x \in T^2), \quad (8)$$

其中 $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ 是 $x = (x_1, x_2) \in T^2$ 的解析函数. 假设常微系统 (8) 是拓扑传递的.

要证系统 (8) 也是度量传递的. 我们的证明可分以下的步骤.

第一步. 因为由系统 (8) 所定义的动力系统 f' 是拓扑传递的, 所以存在一个运动 $f'(p_0)$, 它的轨道 Γ_0 在相空间 T^2 内是稠密的. 令

$$h(x_1, x_2) = u_1^2(x_1, x_2) + u_2^2(x_1, x_2).$$

则函数 h 对 $(x_1, x_2) \in T^2$ 是解析的, 而且常微系统 (8) 的奇点集合为

$$F = \{(x_1, x_2) \in T^2 | h(x_1, x_2) = 0\}.$$

显然, F 是 T^2 上的一个闭集. 注意, 稠密轨道 Γ_0 不能与 F 相交. 因此, F 没有内点. 再利用 Weierstrass 的预备定理^[9], 不难证明: F 只包含有限个孤立点和有限条(逐段)解析的闭曲线.

第二步. 假设 F 包含一条闭的曲线 J . 则 J 至少有一分支 J_1 , 它是简单的闭曲线. 如果 J_1 在 T^2 上可以收缩到一点, 则 J_1 把 T^2 分割成两个开区域 D_1 和 D_2 . 因为 Γ_0 不能与 J_1 相交, 所以我们有

$$\Gamma_0 \subset D_1 \text{ 或 } \Gamma_0 \subset D_2.$$

这蕴含 Γ_0 在 T^2 上不是稠密的. 这是矛盾的. 因此, J_1 在 T^2 上不能收缩到到一点.

现在, 取一点 $p^* \in T^2$, 它不是系统 (8) 的奇点. 因此, 通过 p^* 点可以作一个很短的直线段 L^* , 使得系统 (8) 的向量场在 L^* 与 L^* 横截, 而且以 p^* 为中心作一小圆盘 $D(p^*)$, 使得系统 (8) 的每个运动只要进入 $D(p^*)$ 就必定正向(或负向)横截穿过 L^* . 由此推出, 轨道 Γ_0 必定与线段 L^* 无穷多次横截相交. 取 p_1 和 p_2 是其中两个这样的交点, 而且 p_2 是 p_1 的一个后继点, 即

$$p_1 = f'(p_0), \quad p_2 = f'(p_1),$$

其中常数 r 小于常数 s , 而当 $r < t < s$ 时, 运动 $f'(p_0)$ 不与 L^* 相交. 令

$$I^* = \{x \in T^2 | x = f'(p_0), \quad r \leq t \leq s\},$$

它是 Γ_0 的一个闭弧段. 令 (p_1, p_2) 为 L^* 上的开区间. 因此, 我们得到一条简单的闭曲线 $J_2 = I^* \cup (p_1, p_2)$, 它不能与 J_1 相交.

假定 J_2 在 T^2 上可以收缩到一点. 则 J_2 把 T^2 分割成两个开区域 G_1 和 G_2 . 根据 J_2 的构造可见, 运动 $f'(p_0)$ 最终将通过 (p_1, p_2) 而进入 G_1 或 G_2 , 而且永远停留在那里.

这与 $f'(p_0)$ 的轨道 Γ_0 在 T^2 上稠密的假设不能相容. 因此, 闭曲线 J_2 不可能在 T^2 上收缩到一点.

这样, 我们在 T^2 上有两条互不相交的不可收缩(于一点)的闭曲线 J_1 和 J_2 . 因此, 它们把 T^2 分割成两个开区域 D_1 和 D_2 . 注意, 运动 $f'(p_0)$ 不能与 J_1 相交, 而且当 t 充分大时它与 J_2 也不能相交. 因此, 运动 $f'(p_0)$ 将最终停留在 D_1 或 D_2 内. 这也是不可能的. 这矛盾证明了集合 F 不可能包含任何闭曲线.

因此, 我们推出: F 或者是空集, 或者包含 s 个孤立的点, 即

$$F = \{q_1, \dots, q_s\}, \quad (1 \leq s < \infty). \quad (9)$$

第三步. 这一步的目的是证明一个有用的引理.

设常微系统

$$\frac{dx}{dt} = w(x), \quad (x \in T^2), \quad (10)$$

其中 $w(x)$ 对 $x \in T^2$ 是连续的, 并设这系统满足任一初值条件的解是存在和唯一的.

引理 1. 设系统 (10) 是拓扑传递的, 则它没有环轨.

证. 因为系统 (10) 是拓扑传递的, 所以它有一运动的轨道 Γ_0 在 T^2 上到处稠密.

假设系统 (10) 有一个环轨 J_1 . 由于解的存在和唯一性定理, 此环轨 J_1 不能与稠密轨道 Γ_0 相交.

利用与第二步中相似的手法, 我们可以构造一个简单的闭曲线

$$J_2 = I^* \cup (p_1, p_2),$$

其中 I^* 是 Γ_0 的以 p_1 和 p_2 为端点的闭弧段, 而开的直线区间 (p_1, p_2) 不与 J_1 相交, 而与系统 (10) 的向量场 $w(\cdot)$ 在 (p_1, p_2) 上横截. 由此可见, J_2 也不能与 J_1 相交.

现在, 我们可以逐字搬用第二步中的论证, 从而得到一个矛盾. 这样就证明了引理 1.

第四步. 假定 F 是空集. 再由引理 1 可知, 系统 (8) 是既无奇点也无环轨的解析系统.

让我们回顾一下有名的 Schwartz 定理^[6], 它说: 任何二维平面上的 $C^{(2)}$ 动力系统的极小集合只能是一个奇点, 或一个环轨, 或一个环面.

因此, 常微系统 (8) 以整个环面 T^2 作为自己唯一的极小集合. 这样一来, 它不可能有其它任何非空的不变的闭的真子集. 这就证明了系统 (8) 具有度量传递性.

第五步. 假定 (9) 式成立. 我们取 F 中的任一点 q_i , 它是常微系统 (8) 的一个奇点. 由于系统 (8) 式是一个解析系统, 奇点 q_i 只有(有限) E_i 个椭圆角形, H_i 个双曲角形和 P_i 个抛物角形. 因为系统 (8) 有一稠密的轨道 Γ_0 , 所以奇点 q_i 不准有椭圆角形和抛物角形. 因此, 我们有

$$E_i = 0, \quad P_i = 0, \quad H_i > 0.$$

从而利用 Poincaré 的指数公式, 我们推出

$$\text{Ind}(q_i) = \frac{1}{2} (2 - H_i) \leq 0,$$

其中 $H_i = 2k_i$, 而 k_i 是正整数 ($i = 1, \dots, s$).

再利用环面 T^2 上的 Hopf 指数定理, 我们得到

$$\sum_{j=1}^s \text{Ind}(q_j) = \sum_{j=1}^s (1 - k_j) = 0,$$

它蕴含

$$k_j = 1, H_j = 2, (j = 1, \dots, s).$$

这就是说, 奇点 q_i 在它的一个小邻域 $N^*(q_i)$ 内只有两个双曲角形 $G_1(q_i)$ 和 $G_2(q_i)$. 由于 (8) 是一解析的系统, 双曲角形 $G_1(q_i)$ 和 $G_2(q_i)$ 在邻域 $N^*(q_i)$ 内有一条光滑的公共边界 C_i , 而且

$$C_i = K_i^+ \cup \{q_i\} \cup K_i^-,$$

其中 K_i^+ 和 K_i^- 是系统 (8) 在 $N^*(q_i)$ 内的两条轨线, 它们分别按正向和负向趋于奇点 q_i (参考图 1). 在 $N^*(q_i)$ 内除奇点 q_i 外, 系统 (8) 的所有轨线近乎平行.

第六步. 令 v_i 为 C_i 在 q_i 点处的单位切向量, 取它的方向与 K_i^+ 趋于 q_i 的方向一致. 又令

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x)/|u(x)|, & \text{当 } x \in T^2 \setminus F, \\ v_i, & \text{当 } x = q_i \in F, \end{cases}$$

其中 $|u(x)|$ 表示向量 $u(x)$ 的长度. 则易知 $u^*(x)$ 在 T^2 上是一个连续的单位向量场. 然后, 考虑常微系统

$$\frac{dx}{dt} = u^*(x), (x \in T^2), \quad (12)$$

它具有初值问题解的存在性和唯一性. 注意, 除去 $C_i (i = 1, \dots, s)$, 系统 (12) 和系统 (8) 的轨道重合; 而对于每个 C_i , 就系统 (12) 而言, q_i 是一个常点, 它在轨线 C_i 上. 因为系统 (8) 的稠密轨道 Γ_0 不与 F 相交, 所以它也是系统 (12) 的一条(稠密)轨道. 这样一来, 引理 1 对于系统 (12) 是成立的; 即系统 (12) 没有环轨. 注意, 系统 (12) 也没有奇点. 因而我们可以利用文献 [7] 中第 17 章第 6 节的结果推出: 在 T^2 上存在一条简单的闭曲线 K , 它与系统 (12) 的每条轨线横截相交; 而且由常微系统 (12) 的轨线诱导出一个从 K 到 K 的拓扑变换 T .

令 S' 是对应于变换 T 和系统 (12) 的凝聚点集. 则由文献 [7] 中第 17 章的定理 3.2 可知, 或者 $S' = K$, 或者 S' 在 K 上是一个无处稠密的完全集. 由于系统 (12) 有一条稠密的轨道 Γ_0 , 我们推出 $S' = K$. 这蕴含系统 (12) 的每条轨道都在 T^2 上到处稠密. 注意, 系统 (12) 的不通过 q_i 点 ($i = 1, \dots, s$) 的每条轨道也是系统 (8) 的轨道. 因此, 我们有结论: 除了奇点 $q_i (i = 1, \dots, s)$ 和其它与奇点相联的有限条轨道 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ 外, 系统 (8) 的每条轨道都在 T^2 上稠密. 令 Q 表示由 $q_1, \dots, q_s$ 和 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ 组成的点集, 则

$$\text{mes}(Q) = 0.$$

注意, 系统 (8) 在 $(T^2 \setminus Q)$ 中的每条轨道在 T^2 上稠密.

假设 E 是系统 (8) 的一个闭的不变真子集. 易知, E 不可能与 $(T^2 \setminus Q)$ 相交. 因此, 我们有

$$E \subset Q,$$

它蕴含

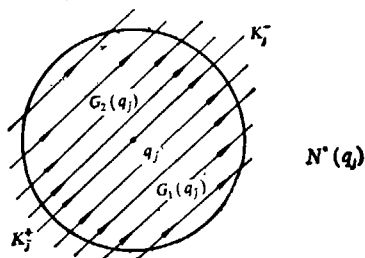


图 1

$$\text{mes}(E) \leq \text{mes}(Q).$$

由此推出

$$\text{mes}(E) = 0.$$

这就证明了系统(8)是度量传递的.

定理 3 由此得到完全的证明.

参 考 文 献

- [1] Birkhoff, G. D. & Smith, P. A., *J. Math. Pures Appl.*, 7(1928), 9: 345—379.
- [2] Morse, M., *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 52(1964), 5: 357—391.
- [3] Morse, M., A Short Biography of George David Birkhoff, *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York, Vol. II, 1973, 143—146.
- [4] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.
- [5] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometrical Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [6] Godbillon, C., *Dynamical Systems on Surfaces*, Springer-Verlag, 1983.
- [7] Coddington, E. & Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.