

物理计算的保真与代数动力学算法

——V. 非线性对流方程的代数动力学解法与算法

张华, 卢伟涛, 王顺金*

四川大学物理学院理论物理中心, 成都 610064

* 联系人, E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

收稿日期: 2007-07-26; 接受日期: 2008-02-20

国家自然科学基金(批准号: 90503008, 10775100)、教育部博士点基金和兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助项目

摘要 把非线性偏微分方程的代数动力学解法和算法用于非线性对流方程, 检验了这一方法对非线性对流方程的解析求解和数值求解的有效性.

关键词

对流方程

泛函空间的代数动力学

非线性对流方程的代数动力学解法与算法

在文献[1]中, 提出了非线性偏微分方程的泛函空间的代数动力学解法和算法. 本文将这一方法用于非线性对流方程, 检验代数动力学解法和算法对非线性对流方程的解析求解和数值求解的有效性.

1 一维非线性对流方程

在流体力学方程中, 非线性项常常以对流形式出现. 因此, 非线性对流方程在流体力学问题中具有典型性和重要性^[2,3].

一维非线性对流方程初值问题为

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1-1a)$$

$$u(x, t = 0) = F(x), \quad (1-1b)$$

(1-1)式的解可写成隐函数形式

$$u = F(x - ut), \quad (1-2)$$

(1-2)式显然满足初始条件(1-1b)式. 从(1-2)式也可得(1-1a)式, 因为

$$u_t = -F_y(y = x - ut)(u + tu_t) \rightarrow F_y = \frac{\partial F(y)}{\partial y} = -\frac{u_t}{u + tu_t},$$

$$u_x = F_y(y = x - ut)(1 - tu_x) \rightarrow F_y = \frac{u_x}{1 - tu_x}.$$

所以

$$\frac{u_x}{1 - tu_x} = -\frac{u_t}{u + tu_t} \rightarrow u_t = -u_x u. \tag{1-3}$$

方程(1-3)即(1-1a). 当 t (或当 $(t - t_0)$) 很小时,

$$u = F(x) - F_x(x)ut \rightarrow u = \frac{F(x)}{1 + tF_x(x)},$$

因此, 在 $t = 0$ ($t = t_0$) 附近, (1-1)式有解的条件为

$$1 + tF_x(x) \neq 0, \tag{1-4}$$

或

$$F_x(x) \geq 0, \tag{1-5}$$

从隐函数方程求解 u 时, 应把 u 看作与 x, t 无关的变量. 但当把 u 看成 u, t 的函数时, $F[x - u(x,t)t]$ 中的 $u(x,t)$ 自然是 x, t 的函数, 即

$$u(x,t) = F[x - u(x,t)t]. \tag{1-6}$$

上述说明对于求解 $u(x,t)$, 把它表示成 $F(x)$ 及其各阶导数的泛函非常重要. 隐函数形式的解(1-3)式, 把偏微分方程初值问题变成代数(超越)方程求解问题: 一旦给定初值函数 $F(x)$ 的具体形式, 就可以通过求解 u 的代数方程(1-3)得到 $u(x,t)$. 假定(1-1a)在(1-1b)式附近有 t 的级数解, 则

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \tag{1-7}$$

显然

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \Big|_{t=0}. \tag{1-8}$$

在(1-8)式中计算 $F[x, u(x,t)]$ 对时间的偏导数时应按(1-6)式理解.

利用(1-7)式可以求得(1-1)式的泰勒级数解, 为此要计算 $F[x - u(x,t)t]$ 对各阶偏导:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F_x(x - ut)(-u - u_t t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_t = -FF_x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = F_{xx}(x - ut)(-u - u_t t)^2 + F_x(x - ut)(-2u_t - u_{tt} t),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = F_{tt} = F^2(x)F_{xx}(x) + F_x(-2F_t) = F^2F_{xx} + 2FF_x^2,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = F_{xxx}(x - ut)(-u - u_t t)^3 + 3F_{xx}(x - ut)(-u - u_t t)(-2u_t - u_{tt} t) + F_x(x - ut)(-3u_{tt} - u_{ttt} t),$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= F_{ttt} = F_{xxx}(-F)^3 + 3F_{xx}(-F)(-2F_t) + F_x(-3F_{tt}) = -(F^3 F_{xxx} + 9F^2 F_{xx} F_x + 6FF_x^3), \\ \left. \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \right|_{t=0} &= \dots \end{aligned} \quad (1-9)$$

2 泛函空间的代数动力学解法

按照文献[1], 引进时间平移算子

$$\hat{L} = u_x u \frac{\delta}{\delta u}, \quad (2-1)$$

则偏微分方程(1-1a)可提升为泛函偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\hat{L} \left[u, \frac{\delta}{\delta u} \right] u, \quad (2-2)$$

其解为

$$u(x, t) = e^{-\hat{L}[u(0)]} u(0) = e^{-\hat{L}[F(x)]} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n [F] F(x). \quad (2-3)$$

用代数动力学方程的解(2-3)式求解对流方程, 需要计算

$$\begin{aligned} \hat{L}F(x) &= F_t = FF_x, \\ \hat{L}^2 F(x) &= F_{tt} = F^2 F_x + 2FF_x^2, \\ \hat{L}^3 F(x) &= F_{ttt} = F^3 F_x + 6F^2 F_x F_{xx} + 3F^2 F_x^2 + 6FF_x^3, \\ &\dots \\ \hat{L}^n F(x) &= F^{(n)} = \left. \frac{d^n F}{dt^n} \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (2-4)$$

实例: 现具体计算有显式解析解的实例. 因为3次以下代数方程有解析解, 故研究3次以下 $F(x-ut)$ 为幂函数形式的对流方程的解析解.

(i) $u = F(x-ut) = x-ut$, 解析解为

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n. \quad (2-5)$$

用代数动力学解法计算得同一结果:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= 1, \quad F_{xx}(x) = 0, \\ \hat{L}^2 F(x) &= F^{(2)} = F^2 F_{xx} + 2FF_x^2 = 2!x, \\ \hat{L}^3 F(x) &= F^{(3)} = (-1)^3 (F^3 F_{xxx} + \dots + 3!FF_x^3) = (-1)^3 3!x \dots, \\ \hat{L}^n F(x) &= F^{(n)} = F^n F_x^{(n)} + \dots + (-1)^n n!FF_x^n = (-1)^n n!x, \end{aligned} \quad (2-6)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} n! x = \frac{x}{1+t}. \quad (2-7)$$

(ii) $u = F(x-ut) = (x-ut)^2$, 二次方程的解为

$$u_{\pm}(x,t) = \frac{1}{2t^2} [(2xt+1) \pm \sqrt{4xt+1}]. \quad (2-8)$$

有限解析解为

$$u(x,t) = u_-(x,t) = \frac{1}{2t^2} [(2xt+1) - \sqrt{4xt+1}] = x^2 - 2x^3t + 5x^4t^2 + \dots \quad (2-9)$$

极限情况下

$$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x^2.$$

代数动力学解法得到同一结果: 由

$$\hat{L}F(x) = -2x^3, \quad \hat{L}^2F(x) = F^2F_{xx} + 2FF_x^2 = 2x^4 + 8x^4 = 10x^4,$$

得到

$$u(x,t) = x^2 - 2x^3t + 5x^4t^2 + \dots \quad (2-10)$$

(iii) $u = F(x-ut) = (x-ut)^3$, 上述三次方程的实解(其余两解为复解)为

$$\begin{aligned} \phi &= -9t^5x + \sqrt{3t^9(4+27tx^2)}, \\ u(x,t) &= \frac{x}{t} - \frac{(2/3)^{1/3}}{\phi^{1/3}} + \frac{\phi^{1/3}}{18^{1/3}t^3} = x^3 - 3x^5t + 12x^7t^2 - 55x^9t^3 + \dots \end{aligned} \quad (2-11)$$

极限情况下: $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x^3$. 代数动力学解法得同一结果: 由

$$\hat{L}F(x) = -FF_x = -3x^5, \quad \hat{L}^2F(x) = F^2F_{xx} + 2FF_x^2 = 24x^7, \quad \hat{L}^3F(x) = -330x^9,$$

得到

$$u(x,t) = x^3 - 3x^5t + 12x^7t^2 - 55x^9t^3 + \dots \quad (2-12)$$

(iv) $u = F(x-ut) = \frac{1}{(x-ut)}$ 的解为

$$u_{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{-4t+x^2}}{2t}, \quad (2-13)$$

其中有限的解析解为 $u(x,t) = u_-(x,t)$, 在 $t \in (0, x^2/4)$ 时, 方程有单值连续可微解, 且在极限情况下有

$$u_-(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{x}. \quad (2-14)$$

代数动力学解法得到同一结果: 由

$$\hat{L}F(x) = \frac{1}{x^3}, \quad \hat{L}^2F(x) = \frac{4}{x^5}, \quad \hat{L}^3F(x) = \frac{30}{x^7}, \quad \hat{L}^4F(x) = \frac{336}{x^9},$$

得到

$$u(x,t) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}t + \frac{2}{x^5}t^2 + \frac{5}{x^7}t^3 + \frac{14}{x^9}t^4 + \dots \quad (2-15)$$

(v) $u = F(x-ut) = (x-ut)^{1/2}$, 上述方程的在 $x > 0$ 有单值连续解析解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(-t + \sqrt{t^2 + 4x}). \quad (2-16)$$

极限情况: 在 $t \geq 0$ 时,

$$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sqrt{x}. \quad (2-17)$$

代数动力学解法得到同一结果: 由

$$\hat{L}F(x) = -FF_x = -\frac{1}{2}, \quad \hat{L}^2F(x) = \frac{1}{4x^{1/2}}, \quad \hat{L}^3F(x) = 0, \quad \hat{L}^4F(x) = -\frac{3}{16x^{3/2}},$$

得到

$$u(x,t) = x^{1/2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2x^{1/2}} - \frac{t^4}{128x^{3/2}} \dots \quad (2-18)$$

(vi) $u = F(x-ut) = (x-ut)^{-1/2}$ (该方程在 $t=0$ 附近无有限解)

i) 常规代数解法

上述方程即为 $tu^3 - xu^2 + 1 = 0$,

设 $t \neq 0$, 则为

$$u^3 - \frac{x}{t}u^2 + \frac{1}{t} = 0. \quad (2-19)$$

设 $Q = \frac{-(x/t)^2}{9}$, $R = \frac{-27/t - 2(x/t)^3}{54}$, 则得到 3 次方程的根判别式

$$\Delta = Q^3 + R^2 = \frac{1}{4t^2} - \frac{x^3}{27t^4}. \quad (2-20)$$

设 $t = \varepsilon < 1$, $x > 0$, 则当 $\frac{x^3}{27t^2} > \frac{1}{4}$ 时有 $\Delta < 0$. 根据 3 次方程解法, 当判别式 $\Delta < 0$ 时, 3 次方程有 3 个实解为

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right), \\ u_2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{2}{3}\pi\right), \\ u_3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3}\pi\right), \end{aligned} \quad (2-21)$$

其中 $\cos(\theta) = -R/\sqrt{-Q^3} = \frac{27t^2 - 2x^3}{2x^3}$.

由于 $\left|\cos\left(\frac{1}{3}\theta + \delta\right)\right| \leq 1$ 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{-Q} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x/t)}{3} = \infty$, 则上述 3 个实解在 $t \rightarrow 0$ 时极限不存在.

但由于 $\lim_{t \rightarrow 0} (x/3t - u_3) = x^{-1/2}$, 将 $s = \frac{x}{3t} - u_3$ 代入对流方程, 则有 $\lim_{t \rightarrow 0} (s_t + ss_x) = 0$, 即在 $t \rightarrow 0$ 时 s 满足对流方程.

ii) 代数动力学解法

利用代数动力学解的公式

$$u(x, t) = e^{-\hat{L}[u(0)]} u(0) = e^{-\hat{L}[F(x)]} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n [F] F(x), \quad (2-22)$$

设初值 $u(x, 0) = x^{-1/2}$, 则得到在 $t < 1$ 时代数动力学解:

$$u(x, t) = x^{-1/2} + \frac{t}{2} x^{-2} + \frac{5t^2}{8} x^{-7/2} + t^3 x^{-5} + \frac{231t^4}{128} x^{-13/2} + \dots \quad (2-23)$$

该解与 $s = \frac{x}{3t} - u_3$ 在 $t = 0$ 处的 Taylor 展开相同. 这说明, 代数动力学解法可以从发散解中找到有限解!

(vii) $u = F(x - ut) = \frac{1}{(x - ut)^2}$ (该方程在 $t = 0$ 附近无解析解)

i) 常规代数解法

上述方程即为

$$t^2 u^3 - 2xtu^2 + x^2 u - 1 = 0. \quad (2-24)$$

设 $t \neq 0$, 则为

$$u^3 - 2(x/t)u^2 + (x/t)^2 u - t^{-2} = 0. \quad (2-25)$$

设 $Q = \frac{-x^2}{9t^2}$, $R = \frac{27t - 2x^3}{54t^3}$, 则得到 3 次方程的根判别式

$$\Delta = Q^3 + R^2 = \frac{27t - 4x^3}{108t^5}. \quad (2-26)$$

设 $t < 1, x > 0$, 则当 $27t < 4x^3$ 时有 $\Delta < 0$. 根据 3 次方程解法, 当判别式小于 0 时, 3 次方程有 3 个实解为

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right), \\ u_2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{2}{3}\pi\right), \\ u_3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3}\pi\right), \end{aligned} \quad (2-27)$$

其中 $\cos(\theta) = -R/\sqrt{-Q^3} = \frac{-27t + 2x^3}{2x^3}$. 由于 $\left|\cos\left(\frac{1}{3}\theta + \delta\right)\right| \leq 1$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{-Q} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x/t)}{3} = \infty$, 则

上述 3 个实解在 $t \rightarrow 0$ 时均发散. 但 $\lim_{t \rightarrow 0} (2x/3t - u_1) = x^{-2}$ 却有限. 将 $s = \frac{2x}{3t} - u_1$ 代入对流方程,

则有 $\lim_{t \rightarrow 0} (s_t + ss_x) = 0$, 即在 $t \rightarrow 0$ 时 s 满足对流方程.

ii) 代数动力学解法

利用代数动力学解的公式

$$u(x, t) = e^{-\hat{L}[u(0)]} u(0) = e^{-\hat{L}[F(x)]} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n [F] F(x). \quad (2-28)$$

设 $u(x, 0) = x^{-1/2}$, 得到代数动力学解在 $t < 1$ 时为

$$u(x, t) = x^{-1/2} + \frac{2t}{x^5} + \frac{7t^2}{x^8} + \frac{30t^3}{x^{11}} + \frac{143t^4}{x^{14}} + \dots \quad (2-29)$$

该解与 $s = \frac{2x}{3t} - u_1$ 的 Taylor 展开相同.

由上面的例子可知, 在适当的初始条件下, 用代数动力学解法可从上述方程的发散解中得到有限的解析解.

3 泛函空间的代数动力学算法

按照文献[1], 考虑 N 阶朴素代数动力学算法 $\hat{U}_N(\hat{L}\Delta t)$ 和一阶高精度代数动力学算法 $e\hat{U}_1(\hat{L}\Delta t)$.

3.1 N 阶朴素代数动力学算法 $\hat{U}_N(\hat{L}\Delta t)$

$$u_N(x, \Delta t) = \hat{U}_N(\hat{L}\Delta t)u(0) = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta t^n}{n!} \hat{L}^n [u(0)]u(0). \quad (3-1)$$

由于算法(3-1)式中对泰勒级数系数函数包含梯度运算, 上述算法的精度很低. 故需求助于一阶高精度算法.

3.2 一阶高精度代数动力学算法 $e\hat{U}_1(\hat{L}\Delta t)$

正如文献[1]所指出, 在偏微分方程的代数动力学算法中, 由于速度场泛函包含场函数及其梯度运算, 需要对场函数及其相关的各种偏导数函数进行联合数值求解, 因而产生空间关联和时间关联的交织. 因此, 偏微分演化方程的算法与常微分演化方程的算法的最大区别在时-空关联上: 常微分演化方程只存在时间演化的因果性关联, 而偏微分演化方程由于速度场包含场函数的梯度, 除了时间演化的因果性关联外, 在每一时刻还存在场量的空间各点的关联, 存在时间关联和空间关联的交织. 偏微分方程的时间演化必须在每一演化时刻考虑空间关联效应, 才能得出正确的结果. 不能只处理时间上的因果性关联, 完全忽略空间关联.

高精度算法是为时间上的因果演化设计的高精度算法, 当空间关联能精确处理时(如运用隐函数或解析解的信息), 高精度算法原则上可以达到机器精度. 但当运用空间差分近似把空间关联截断时, 高精度算法的精度由于空间差分近似而降低. 所以, 提高精度的关键, 是充分利用方程提供的动力学信息和关系, 使空间关联的截断具有较高的精度. 因此, 空间关联截断近似的精度是偏微分方程高精度算法的瓶颈.

偏微分方程高精度算法的基本精神是, 充分利用方程提供的动力学信息和关系, 在时间演化上做到高精度保真, 并尽可能把空间关联转化为时间关联, 使空间关联截断保持较高精度, 从而提高整个算法的精度.

在下面的计算机实验中, 我们将使用一阶高精度 $e\hat{U}_1$ 算法, 遵循上述精神, 运用常微分方程的高精度算法的基本思想和推广的算法格式, 精确处理时间因果关联, 再利用偏微分方程的动力学信息把空间关联尽可能转化为时间关联, 使算法达到较高的精度.

4 一维气象对流方程的计算机实验与其他算法的比较

在利用代数动力算法对对流方程进行数值求解时, 用一阶高精度算法 $e\hat{U}_1$ 处理时间演化, 再利用动力学信息把空间关联变成时间关联, 并通过特殊处理以确保时间演化的 $e\hat{U}_1$ 算法的精度.

如果隐函数 $F(x)$ 形式已知, 则空间关联可用代数方法精确处理, $e\hat{U}_1$ 算法的高精度能够保持. 以隐函数 $u = F(x-ut) = x-ut$ 为例, 代数动力学算法计算的结果见图 1 和 2.

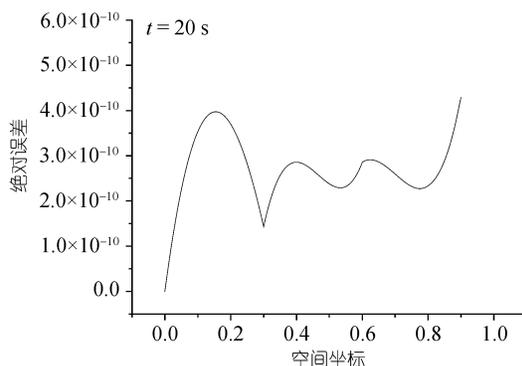
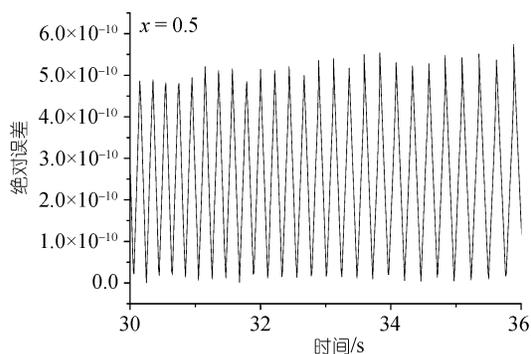


图 1 代数动力学算法在 $x = 0.5$ 处计算的绝对误差 图 2 代数动力学算法在 $t = 20$ s 时计算的绝对误差

从图中可以看出, 当隐函数 $F(x)$ 形式已知且满足 $F(x) \geq 0$ 时, 代数动力学算法对方程进行数值求解可以达到很高的精度, 这是由于处理时间演化的 $e\hat{U}_1$ 算法精度很高, 而空间关联已精确处理, 不降低精度.

对于隐函数 $F(x)$ 的形式不知道因而不能利用的一般情形, 空间关联要用差分近似处理, 导致 $e\hat{U}_1$ 精度降低. 我们把 7 种现代著名的差分算法格式和代数动力学算法对非线性对流方程在一般情形下的计算进行了比较.

(i) 中央差分格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta t} = -\frac{1}{2\delta x} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

(ii) 二次准守恒差分格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta t} = - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{6\delta x} \right) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

(iii) Lax格式^[4]:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\delta t}{2\delta x}(g_{i+1}^n - g_{i-1}^n),$$

$$g = \frac{u^2}{2}.$$

(iv) Lax-Wendroff格式^[5]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\delta t}{2\delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{1}{4} \frac{\delta t^2}{\delta x^2} ((u_{i+1}^n + u_i^n)(F_{i+1}^n - F_i^n) - (u_i^n + u_{i-1}^n)(F_i^n - F_{i-1}^n)),$$

$$F = \frac{1}{2}u^2.$$

(v) MacCormack格式^[6]:

$$u_i^* = u_i^n - \frac{\delta t}{\delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n),$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^* - \frac{\delta t}{\delta x}(F_i^* - F_{i-1}^*)).$$

(vi) Implicit Beam-Warming格式^[7]:

$$-\frac{\delta t}{4\delta x}u_{i-1}^nu_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{\delta t}{4\delta x}u_{i+1}^nu_{i+1}^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\delta t}{4\delta x}(u_{i+1}^n)^2 - \frac{\delta t}{4\delta x}(u_{i-1}^n)^2 + D.$$

(vii) 线元有限差分(Runge-Kutta)格式^[8-10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u),$$

$$u^{(1)} = u^n + \frac{\delta t}{2}R^n,$$

$$u^{(2)} = u^n + \frac{\delta t}{2}R^{(1)},$$

$$u^{(3)} = u^n + \delta tR^{(2)},$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\delta t}{6}(R^n + 2R^{(1)} + 2R^{(2)} + R^{(3)}).$$

对于以上差分格式, 由傅里叶分析可以得到算法稳定性条件均为 $|(\delta t / \delta x)u_{\max}| < 1$.

为比较算法精度, 选取对流方程解无间断的初值问题 $F(x) = x^3$ (在 $0 \leq x \leq 1$ 范围内) 进行计算, 其中参数取为 $\delta t = 0.01$, $\delta x = 0.1$. 从图3看出, 代数动力学算法与其他算法相比, 其精度高出 1~3 个量级.

5 关于对流方程的代数动力学解法和算法的结论

(i) 代数动力学解法能得到对流方程的正确的解析解, 表明这一解法的正确性; 它可以从发散解中提取出有限解, 表明了其优越性.

(ii) 对对流方程的数值求解, 代数动力学算法稳定、收敛, 精度较高(比别的算法高出 1~3 个量级).

(iii) 代数动力学算法还可以进一步改进空间关联截断近似, 有潜力提高其精度.

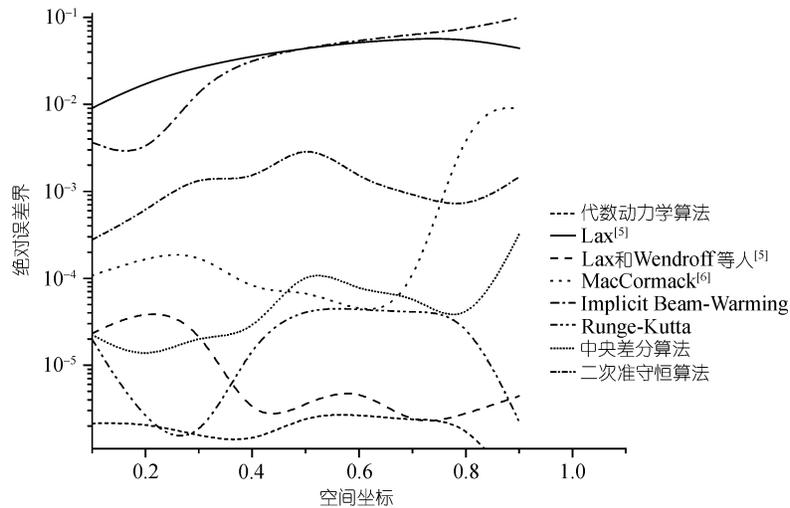


图 3 各种算法在 $t = 10$ s 处计算所得绝对误差

致谢 感谢兰州大学大气科学学院邱崇践教授建议我们研究非线性对流方程并就这一问题与我们的有益讨论.

参考文献

- 1 王顺金, 张华. 物理计算的保真与代数动力学算法: IV. 偏微分演化方程的代数动力学解法和算法. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(2): 178—193
- 2 Knobel R. An Introduction to the Mathematical Theory of Waves. Utah: American Mathematical Society, 2000. 7—27
- 3 Lin W, Ji Z Z, Wang B. A comparative analysis of computational stability for linear and non-linear evolution equations. Adv Atmos Sci, 2002, 19(4): 699—704[DOI]
- 4 Lax P. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Commun Pure Appl Math, 1954, 7: 159—164[DOI]
- 5 Lax P D, Wendroff B. Systems of conservation laws. Commun Pure Appl Math, 1960, 13: 217—237[DOI]
- 6 MacCormack R W. The effect of viscosity in hypervelocity impact catering. AIAA Paper, 1969, 69—354
- 7 Beam R M, Warming R F. An implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA J, 1978, 16: 393—402[DOI]
- 8 Fornberg B. Fast generation of weights in finite difference formulas. In: Byrne G D, Schiesser W E, eds. Recent Developments in Numerical Methods and Software for ODEs/DAEs/PDEs. Singapore: World Scientific, 1992. 97—123
- 9 Fornberg B. Calculation of weights in finite difference formulas. SIAM Rev, 1998, 40(3): 685—691[DOI]
- 10 Chung T J. Computational Fluid Dynamics. New York: Cambridge University Press, 2002. 87—91