# 热平衡的传递性等价于钟速同步的传递性

赵 峥
(北京师范大学物理系，北京 100875)

摘 要

本文指出，热平衡的传递性等价于坐标钟钟速同步的传递性。给出了 Riemann 时空中热力学第零定律成立的充要条件。并且指出，热力学第零定律是建立"同时面"的必要条件，但不是充分条件。解释了在 Kerr 时空中讨论 Hawking 辐射时，一定要用拖曳坐标系的原因。

关键词：第零定律，热平衡，钟速同步，同时面，弯曲时空

## 一、钟速同步的传递性

Landau 指出[1]，弯曲时空中 $A, B$ 二空间点的同时意味着它们的坐标钟相差

$$\Delta t = t_A - t_B = -(g_{0i}/g_{00})dx^i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

由于 $\Delta t$ 一般不是全微分，从而有

$$\oint \Delta t \neq 0.$$

所以，一般不能沿闭合路径把坐标钟调整到"同时"。即不能在全时空建立统一的同时面。仅仅在时轴正交系中，由于

$$g_{0i} = 0 \tag{2}$$

导至

$$\oint \Delta t = 0, \tag{3}$$

因而可以建立统一的同时面。可见，同时具有传递性的条件是时轴正交。

下面讨论一种比较弱的情况。只要求各空间点坐标钟速率相同，但不一定要建立统一的同时面。

在 $A, B$ 两点的第一个同时时刻，坐标钟相差

$$\Delta t_1 = t_{A1} - t_{B1} = -(g_{0i}/g_{00})_1 dx^i; \tag{4}$$

在第二个同时时刻，坐标钟相差

$$\Delta t_2 = t_{A2} - t_{B2} = -(g_{0i}/g_{00})_2 dx^i. \tag{5}$$

二坐标钟的"速率"差

本文 1988 年 7 月16日收到、1989 年 7 月26日收到修改稿。

$$\delta(\Delta t) \equiv (\Delta t)_A - (\Delta t)_B \equiv (t_{A2} - t_{A1}) - (t_{B2} - t_{B1})$$
$$= (t_{A2} - t_{B2}) - (t_{A1} - t_{B1}) = -[(g_{0i}/g_{00})_2 - (g_{0i}/g_{00})_1]dx^i, \tag{6}$$

上式为零的条件是 $(g_{0i}/g_{00})$ 与坐标时间无关.

所以,各空间点坐标钟速率相同的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right) = 0. \tag{7}$$

这是一个比时轴正交 $(g_{0i} = 0)$ 要弱的条件. 显然,各点钟速相同只是建立统一的同时面的必要条件,不是充分条件.

## 二、热平衡的传递性与钟速同步的传递性

设四维 Riemann 时空中,三个相邻空间点 $A, B, C$ (见图 1)的邻域各存在一个宏观无穷小的热力学系统,系统内充满自旋为零的理想玻色气体. 这三个系统被绝热板隔开. $A, B, C$ 三点各置一个标准钟. 当这些系统各自处于热平衡时,可分别写出它们的松原函数[2,3]

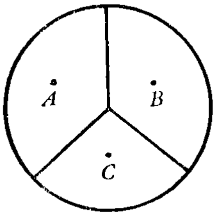

图 1

$$G_A(\Delta\tau_A) = G_A(\Delta\tau_A + i\beta_{PA}),$$
$$G_B(\Delta\tau_B) = G_B(\Delta\tau_B + i\beta_{PB}), \tag{8}$$
$$G_C(\Delta\tau_C) = G_C(\Delta\tau_C + i\beta_{PC}).$$

$\tau_A, \tau_B$ 和 $\tau_C$ 为三个标准钟各自测得的固有时间, $T_P = 1/\beta_P$ 为固有温度.

然而,在广义相对论中,固有量只对逐点的测量有意义,适用于全时空的物理规律一般都不用固有量而用坐标量表出. 坐标时与固有时之间,坐标温度与固有温度之间,通过红移因子相互联系. 因此,我们也把松原函数用坐标量表出

$$G_A(\Delta t_A) = G_A(\Delta t_A + i\beta_A),$$
$$G_B(\Delta t_B) = G_B(\Delta t_B + i\beta_B), \tag{9}$$
$$G_C(\Delta t_C) = G_C(\Delta t_C + i\beta_C),$$

其中

$$\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{-g_{00}}, \tag{10}$$

$$T = T_P \cdot \sqrt{-g_{00}} \tag{11}$$

分别为坐标时间和坐标温度[4,5], 而

$$\beta = \beta_P/\sqrt{-g_{00}}. \tag{12}$$

下面研究这三个系统之间热平衡的传递性. 众所周知,弯曲时空中两个系统之间的热平衡,意味着它们的坐标温度相等(固有温度一般不等). 因此,如果我们假定系统 $A$ 与系统 $B$ 处于热平衡,应该预期

$$\beta_A = \beta_B. \tag{13}$$

然而,情况并不如此简单. 松原函数中的 $\beta$ 值不仅取决于平衡态的热性质,还取决于虚时间单位的大小,由于 $i^2 = -1$, 虚时间单位与实时间单位的绝对值相同,所以,松原函数中的 $\beta$ 值一方面取决于平衡态的热性质;另一方面取决于时间单位的大小.

在非相对论情况下，可以假定各空间点的钟速率相同，即它们的时间单位大小相同．在狭义相对论情况下，可以利用光速不变原理和时空的均匀各向同性，把同一惯性系中不同空间点处的钟调整同步，使它们有相同的速率，相同大小的时间单位．从而使松原函数中的 $\beta$ 值的大小仅依赖于平衡态的热性质．也就是说，如果我们假定系统 $A$ 与系统 $B$ 处于热平衡，必然会有 $\beta_A=\beta_B$，这与热平衡的要求相一致．

但是，从本文第一部分的讨论可知，弯曲时空的情况比较复杂，各空间点不仅标准钟的速率一般不同，坐标钟的速率也不一定总能调整同步．即各空间点的坐标时间单位大小也不一定能统一起来．所以，仅仅假定系统 $A$ 与系统 $B$ 处于热平衡，不足以使松原函数中的

$$\beta_A=\beta_B. \tag{14}$$

要满足这个等式，还必须把各点坐标钟的速率调整同步．然而，“坐标温度”是弯曲时空处于热平衡状态的标志，而且坐标温度的定义并不取决于 Green 函数的存在，只要热平衡存在传递性，一定可以定义一个统一的坐标温度．也就是说，热平衡要求(14)式一定成立．如果系统 $A$ 与系统 $B$ 处于热平衡仍不能使(14)式成立，只能认为 $A$，$B$ 两点坐标钟的速率未能同步，应该调整．

下面讨论热平衡的传递性与坐标钟钟速同步传递性之间的关系．假设系统 $A$ 与系统 $B$ 处于热平衡，那么抽掉 $A$ 与 $B$ 之间的绝热板后(仍有导热板隔开两个系统)，二者的松原函数应该不发生变化

$$\begin{aligned} G_A(\Delta t_A)&=G_A(\Delta t_A+i\beta_A),\\ G_B(\Delta t_B)&=G_B(\Delta t_B+i\beta_B). \end{aligned} \tag{15}$$

若 $\beta_A\neq\beta_B$，可调整坐标钟 $B$ 的快慢，使得

$$\beta_B=\beta_A. \tag{16}$$

我们认为，调整后 $B$ 钟与 $A$ 钟速率相同，即它们的单位时间 $\delta_A$ 和 $\delta_B$ 满足关系

$$\delta_A=\delta_B. \tag{17}$$

再设 $B$ 与 $C$ 也处于热平衡，抽掉二者间的绝热板(保留导热壁)后，松原函数也应不变

$$\begin{aligned} G_B(\Delta t_B)&=G_B(\Delta t_B+i\beta_B),\\ G_C(\Delta t_C)&=G_C(\Delta t_C+i\beta_C). \end{aligned} \tag{18}$$

同样，可调整钟 $C$ 的速率，使

$$\beta_C=\beta_B. \tag{19}$$

我们认为，此时二钟速率相同，有

$$\delta_C=\delta_B. \tag{20}$$

假定热平衡具有传递性，则系统 $A$ 与系统 $C$ 应处于热平衡态，抽掉 $A$，$C$ 之间的绝热板(保留导热壁)后，$\beta_{PC}$ 与 $\beta_{PA}$ 应不变化，即 $G_A$ 和 $G_C$ 不发生变化，$\beta_A$ 与 $\beta_C$ 也不发生变化．已知

$$\beta_A=\beta_B=\beta_C, \tag{21}$$

从 $\beta_A=\beta_C$ 可推出

$$\delta_A=\delta_{C'}. \tag{22}$$

注意，$\delta_{C'}$ 由钟 $C$ 与钟 $A$ 校准(即，使 $\beta_A=\beta_C$)得到，不同于(20)式中的 $\delta_C$．$\delta_C$ 由钟 $C$ 与钟 $B$ 校准 (即，使 $\beta_C=\beta_B$) 得到．从(17)和(20)式知

$$\delta_A=\delta_B=\delta_C. \tag{23}$$

所以

$$\delta_C = \delta_{C'}, \tag{24}$$

即,热平衡的传递性导致了坐标钟钟速同步的传递性.

假定热平衡不具有传递性,当 $A$ 与 $B$ 处于热平衡,$B$ 与 $C$ 处于热平衡时,系统 $A$ 与系统 $C$ 之间不处于热平衡. 我们在 $A,B$ 之间,$B,C$ 之间重新插入绝热板,然后抽掉 $A,C$ 之间的绝热板(保留导热壁),这时,$A,C$ 将弛豫到新的热平衡态,二者的松原函数都将发生变化. 为了讨论方便,我们假定系统 $A$ 的热容量远大于 $C$ 的热容量,故仅 $\beta_C$ 变为 $\beta_C''$,$\beta_A$ 的变化可忽略. 这时有

$$\begin{aligned} G_C(\Delta t_C) &= G_C(\Delta t_C + i\beta_C''), \\ G_A(\Delta t_A) &= G_A(\Delta t_A + i\beta_A), \end{aligned} \tag{25}$$

显然

$$\beta_C'' \neq \beta_B = \beta_A. \tag{26}$$

为了使 $\beta_C''$ 的值变为

$$\tilde{\beta}_C = \beta_A, \tag{27}$$

必须调整钟 $C$ 的速率,使 $\beta_C''$ 变为 $\tilde{\beta}_C$,此时,钟 $C$ 的新速率

$$\tilde{\delta}_C \neq \delta_C. \tag{28}$$

注意,新速率 $\tilde{\delta}_C$ 是与钟 $A$ 校准得来的,旧速率 $\delta_C$ 是与钟 $B$ 校准得来的. (28)式表明,坐标钟钟速同步不具有传递性.

可见,热平衡的传递性是坐标钟钟速同步传递性的充要条件.

## 三、结论与讨论

综上所述,可以得到以下三点结论:

1. 热平衡具有传递性的充要条件是"坐标钟钟速同步具有传递性". 这个条件弱于"同时具有传递性"的条件——时轴正交. 时轴正交的时空区,可以建立统一的同时面. 而"钟速同步具有传递性"只保证各空间点坐标钟的速率可调整同步,并不能保证建立统一的同时面. 反过来,"同时具有传递性"一定能保证钟速同步的传递性. 所以,"热平衡传递性"是"同时传递性"的必要条件而不是充分条件.

2. 热力学第零定律可以表述为"钟速同步具有传递性". 这个定律在 Riemann 时空中成立的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right) = 0. \tag{29}$$

可以看到,第零定律成立的时空不一定是静态的. 例如 Kruskal 时空不是静态,但时轴正交,$g_{0i} = 0$,满足(29)式,第零定律在其中成立.

第零定律成立的时空区域也不一定时轴正交. 例如 Kerr-Newman 黑洞外部,在采用 Boyer-Lindquist 坐标时,$g_{0i} \neq 0$, ,但度规稳态,满足(29)式. 再如转动圆盘,也是 $g_{0i} \neq 0$,但度规稳态,同样满足(29)式. 热力学第零定律在这些时轴非正交的时空区域,仍然成立.

当讨论 Kerr-Newman 黑洞内外的热平衡时,由于度规是动态的,为满足(29)式,必须选取时轴正交系. 所以,讨论这类黑洞的 Hawking 辐射时,一定要用拖曳坐标系.

3. 应当说明，我们在证明过程中，选用自旋为零的理想气体进行讨论，只是为了简洁，并不影响证明的普遍性。事实上，我们在证明中只用了松原函数的周期性，并未用与自旋有关的任何特殊性质。上述周期性对各种自旋的气体都相同，只是在松原函数的形式上略有差异[5]，而以自旋为零的气体表达起来最为简洁。所以，选用任何气体进行讨论，都会得到同样的结论，本文的证明具有普遍性。

作者曾与刘辽、梁灿彬、喀兴林、杨展如、胡岗教授，王永成、桂元星、裴寿镛副教授，章德海、喻乃昌、黄朝光等同志作过有益的示论，在此表示感谢。作者还要感谢布鲁塞尔自由大学 I. Prigogine 教授和 B. Misra 教授对本工作的支持。

## 参　考　文　献

[1] Landau, L. & Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1975, 234.
[2] Hartle, J. B. & Hawking, S. W., *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 2188.
[3] Gibbons, G. W. & Perry, M. J., *Proc. R. Soc. Lond.*, **A358** (1978), 467.
[4] 爱因斯坦，相对论的意义，科学出版社，1979，58.
[5] Birrell, N. D. & Davis, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982, 27.