



基于广义 Hermite 展开的全局双曲矩方程组

樊玉伟, 李若*

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: ywf@pku.edu.cn, rli@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2014-01-27; 接受日期: 2015-02-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11325102 和 91330205) 资助项目

摘要 在最近的研究中, Cai 等人 (2014) 使用本征热通量代替通常使用的沿坐标轴方向的热通量作为变量获得了一个改进的 13 矩方程组. 该方程组比使用坐标轴方向的热通量获得的 Grad 13 矩方程组具有更好的性质, 例如, 局部平衡态是双曲区域的内点. 该改进的 13 矩方程组是通过对分布函数使用广义的各向异性 Hermite 展开获得, 其中该各向异性展开是指, 使用完全的温度张量代替局部平衡态的温度. 本文将该方法推广到高阶广义 Hermite 展开从而获得任意阶的新的矩方程组, 并类似 Cai 等人 (2014) 的方法提出了一个正则化方案, 使得所得方程组全局双曲, 从而保证所得方程组的局部适定性. 此外, 本文还深入研究该方程组的系数矩阵的特征结构, 并剖析了方程组的所有特征波. 该矩系统提供了一套系统的可看成是 Euler 方程组的推广的动力学模型, 并可通过提高展开阶来逼近 Boltzmann 方程本身.

关键词 动力学模型 矩方法 全局双曲性 正则化 NR_{xx}

MSC (2010) 主题分类 78M05, 82C40

1 引言

1949 年, Grad^[1] 提出了著名的矩方法以从 Boltzmann 方程推导动力学方程组. 该方法的核心思想是将分布函数展开为各向同性的 Hermite 级数^[2]. 基于该思想获得的方程组比经典的 Euler 方程组和 Navier-Stokes-Fourier (NSF) 方程组更精准. 以其中最为出名的 Grad 13 矩方程组为例, 基于该方程组可以推导出 Euler 方程组和 NSF 方程组. 这使得 Grad 方程组在过去的半个多世纪里被广泛关注. 然而, 在该模型提出后不久, 人们就发现了它具有不少弊病, 其中之一是 Grad 13 矩方程组不是全局双曲的. 事实上, 即使对于一维流体, 双曲性也只能在局部均衡解附近获得 (参见文献 [3]). 双曲性的缺失直接导致矩方程组解的局部适定性, 这极大地限制了 Grad 矩方法的应用. 而历史上, 尽管 Grad 矩方法数学形式优美, 且曾作为过去几十年相关教科书的必备内容, 然而文献中却鲜有其成功的报道. 为了解决 Grad 矩方程组适定性问题, 科研工作者们对于 Grad 13 方程组和高阶方程组都进行了非常深入的研究. 研究方向大致可分为两类: 一类是基于碰撞项为矩方程组添加黏性项, 一类是考虑不同的封闭方案从而扩大双曲区域, 如正则化 Burnett 方程组^[4]、正则化 13 矩方程组^[5,6] 和 Pearson 13 矩方程组^[7] 等. 这些工作从不同的方面不同程度地弱化双曲性带来的问题^[7-9].

英文引用格式: Fan Y W, Li R. Globally hyperbolic moment system by generalized Hermite expansion (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1635–1676, doi: 10.1360/012015-23

在最近的研究中, 文献 [10] 指出对于 Grad 13 矩方程组, 局部平衡态在其双曲区域的边界上. 具体来讲, 分布函数在局部平衡态附近有任意小的扰动, 都可能导致 Grad 13 矩方程组的双曲性的丧失. 这表明不存在局部平衡态的一个邻域使得该邻域内每一个状态都使得 Grad 13 矩方程组双曲. 因此, 无论分布函数多么靠近平衡态, 都无法保证 Grad 13 矩方程组的适定性. 该本质性的弊端或许能解释为什么在过去的几十年里几乎没有 Grad 13 矩方程组正面的报道. 同时, 文献 [10] 还提出了一个新的 13 矩方程组. 该方程组即使不作任何正则化, 如文献 [11] 中正则化, 局部平衡态就是双曲区域的内点, 这至少保证了局部平衡态附近矩方程组的适定性. 获得该方程组的基本思想是, 用广义的各向异性的 Hermite 多项式展开代替 Grad 方法中各向同性的 Hermite 展开, 其中在各向异性表现在使用温度张量代替 Grad 方法的温度. 可见, 各向异性在双曲性上起到了一定本质的作用, 使用广义 Hermite 多项式展开来获得高阶矩方程组将可能是一个不错的选择.

从 Boltzmann 方程推导宏观的动力学方程组, 一个基本的要求是所得的方程组是 Galileo 变换不变的. 为满足该条件, Grad^[1] 使用 Ikenberry 型多项式作为基函数去逼近分布函数. 事实上, Grad 13 矩方程组是第一个使用该方法获得的比经典流体力学方程组更精准模型. 由于本文中将使用各向异性的权函数进行逼近函数, 权函数中包含了完全的温度张量信息, 再继续使用各向同性的 Hermite 多项式不再合适. 尤其是在获得高阶矩方程组时, 我们需要使用新的多项式作为基函数. 本文将基于各向异性的 Hermite 多项式对分布函数进行展开, 进而获得类似 Grad 矩方程组的新的方程组. 再使用类似文献 [11] 中双曲正则化从而获得全局双曲的矩方程组, 从而保证矩方程组的局部适定性.

本文接下来的内容安排如下: 第 2 节基于广义 Hermite 展开, 首次推导出任意维度下的任意阶的新的矩方程组; 第 3 节将对拟线性形式的矩方程组的系数矩阵进行深入研究, 并指出该矩方程组并不是全局双曲的; 接着第 4 节提出了一个全局双曲正则化方案将该方程组修正为全局双曲, 并给出了详细且严格的证明, 同时详细给出了正则化后方程组的系数矩阵的特征结构, 如特征值和特征向量; 第 5 节详细研究了 Riemann 问题, 指出正则化系统所有的特征波要么是线性退化的, 要么是严格非线性的, 并且详细研究了稀疏波、激波和接触间断三种基本波的性质, 且这些性质与 Euler 方程组的特征波的性质非常类似; 附录包含了广义 Hermite 多项式的详细讨论和一些技术性的结论的证明.

2 矩方程组的推导

本文主要考虑气体动理学中的 Boltzmann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{d=1}^D \xi_d \frac{\partial f}{\partial x_d} = Q(f, f), \quad (2.1)$$

其中 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 是分布函数, $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_D)$, D 是空间维数, $Q(f, f)$ 是碰撞项. ρ 是宏观密度, 宏观速度 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_D)$, 压强张量 p_{ij} 和沿着坐标轴方向的热通量 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_D)$ 与分布函数间的关系可表示为: 对于 $i, j = 1, \dots, D$,

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{\mathbb{R}^D} f d\boldsymbol{\xi}, \quad \rho u_i = \int_{\mathbb{R}^D} \xi_i f d\boldsymbol{\xi}, \\ p_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^D} (\xi_i - u_i)(\xi_j - u_j) f d\boldsymbol{\xi}, \\ q_i &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^D} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2 (\xi_i - u_i) f d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Boltzmann 方程原始碰撞项非常复杂, 本文仅考虑具有如下形式的 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 型碰撞项:

$$Q(f, f) = \nu(\mathcal{G} - f), \quad (2.2)$$

其中 ν 是碰撞频率, $\mathcal{G}$ 是某给定的分布函数, 具体形式依赖于所考虑的碰撞模型. 对于 BGK 模型^[12],

$$\mathcal{G} = f_M = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2}{2\theta}\right), \quad (2.3)$$

其中 f_M 是局部平衡解, $\theta = \sum_{d=1}^D \frac{p_{dd}}{D\rho}$ 为宏观温度. 对于 ES-BGK 模型^[13] (ellipsoidal statistical Bhatnagar-Gross-Krook),

$$\mathcal{G} = \frac{\rho}{\sqrt{\det(2\pi\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^T \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})\right), \quad (2.4)$$

其中

$$\Lambda_{ij} = \frac{bp_{ij}}{\rho} + (1-b)\theta\delta_{ij}, \quad b = 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right];$$

Pr 是 Prandtl 数, 对于单原子气体该常数近似于 2/3. 特别地, 当 $\text{Pr} = 1$ 时, ES-BGK 模型退化为 BGK 模型.

1949 年, Grad^[1] 对分布函数 f 在局部平衡态 f_M 附近使用 Hermite 多项式展开获得了著名的 Grad 20 和 Grad 13 矩方程组. Cai 和 Li^[14] 将该思想拓广到更一般的情形, 获得了一组任意阶的矩方程组. 该方法被命名为 NRxx 方法. 这里将分布函数 f 在一个 Gauss 附近使用广义 Hermite 多项式展开, 并使用 NRxx 的思想, 获得了一组任意阶的各向异性的矩方程组.

考虑权函数

$$w^{[\Theta]}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Theta)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \Theta^{-1}\mathbf{v}\right), \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_D) \in \mathbb{R}^D$, $\Theta = (\theta_{ij}) \in \mathbb{R}^{D \times D}$ 是对称正定矩阵. 广义 Hermite 多项式定义如下:

$$He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{v}) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{w^{[\Theta]}(\mathbf{v})} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{v}^{\alpha}} w^{[\Theta]}(\mathbf{v}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^D, \quad (2.6)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ 是 D 维多重指标. 为方便记, 我们定义

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{v}^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial v_1^{\alpha_1} \cdots \partial v_D^{\alpha_D}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_D.$$

广义 Hermite 多项式和经典的 Hermite 多项式的主要不同在于权函数中的参数. 广义 Hermite 多项式的权函数中是二阶张量 Θ , 而经典的 Hermite 多项式是标量 θ . 二阶张量 Θ 本质地为权函数引入了各向异性, 从而使得所得的多项式也具有各向异性. 接下来定义广义 Hermite 函数如下:

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{v}) = w^{[\Theta]}(\mathbf{v}) He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{v}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^D. \quad (2.7)$$

显然, 权函数 $w^{[\Theta]}(\mathbf{v})$ 是归一化的, 满足

$$\int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1.$$

为方便记, 本文约定, 如果 α 任意一个元素为负, 则 $(\cdot)_\alpha$ 为 0; 如果 $D = 1$ 且 $\Theta = 1$, 则 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v})$ 退化为带权的 Hermite 多项式 (参见文献 [15]), 因此, 以上定义是与一维情形是相容的. 附录 A 给出了广义 Hermite 函数的详细讨论, 下面简单总结一些本文中使用的结论:

(1) 递推关系式:

$$v_d \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^D \theta_{jd} \mathcal{H}_{\alpha+e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{v}) + \alpha_d \mathcal{H}_{\alpha-e_d}^{[\Theta]};$$

(2) 拟正交性:

$$\int_{\mathbb{R}^D} \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v}) \mathcal{H}_\beta^{[\Theta]}(\mathbf{v}) \frac{1}{w^{[\Theta]}} d\mathbf{v} = C_{\alpha,\beta} \delta_{|\alpha|,|\beta|},$$

其中 $C_{\alpha,\beta}$ 是仅依赖于 α, β 和 Θ 的常数;

(3) 微分关系:

$$\frac{d\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta(t)]}(\mathbf{v}(t))}{dt} = - \sum_{i=1}^D \mathcal{H}_{\alpha+e_i}^{[\Theta(t)]}(\mathbf{v}(t)) \frac{dv_i(t)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D \mathcal{H}_{\alpha+e_i+e_j}^{[\Theta(t)]}(\mathbf{v}(t)) \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt}, \quad (2.8)$$

其中 $e_i, i = 1, \dots, D$ 是 D 维单位多重指标, 即第 i 个元素为 1, 其余为 0.

我们将分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 展开成关于 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v})$ 的级数:

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} f_\alpha(t, \mathbf{x}) \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}). \quad (2.9)$$

将级数展开 (2.9) 代入 Boltzmann 方程 (2.1), 并比较 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})$ 的系数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{Df_\alpha}{Dt} + \sum_{d,k=1}^D \left(\theta_{dk} \frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + (\alpha_k + 1) \delta_{kd} \frac{\partial f_{\alpha+e_k}}{\partial x_d} \right) + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} \\ + \sum_{i,d,k=1}^D (\theta_{dk} f_{\alpha-e_i-e_k} + (\alpha_k + 1) \delta_{kd} f_{\alpha-e_i+e_k}) \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \\ + \sum_{i,j,d,k=1}^D \frac{1}{2} (\theta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j-e_k} + (\alpha_k + 1) \delta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j+e_k}) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \\ = \nu(\mathcal{G}_\alpha - f_\alpha), \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 $\frac{D}{Dt}$ 是随体导数,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{d=1}^D u_d \frac{\partial}{\partial x_d},$$

且假设 $\mathcal{G}$ 具有如下展开形式:

$$\mathcal{G} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \mathcal{G}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}).$$

特别地, 如果记 $\Theta = \theta \mathbf{I}$, 则该矩系统 (2.10) 完全等价于文献 [16] 中未进行双曲正则化的矩系统. 在本文之后的内容中, 我们总是假设 $\theta_{ij} = p_{ij}/\rho$. 使用展开式 (2.9) 并考虑 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v})$ 的拟线性性可得

$$f_0 = \rho, \quad f_{e_i} = 0, \quad f_{e_i+e_j} = 0, \quad q_i = 2f_{3e_i} + \sum_{d=1}^D f_{e_i+2e_d}, \quad i, j = 1, \dots, D. \quad (2.11)$$

简单计算可得

$$\mathcal{G}_0 = \rho, \quad \mathcal{G}_{e_i+e_j} = \frac{1-b}{1+\delta_{ij}}(p\delta_{ij} - p_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, D, \quad \mathcal{G}_\alpha = 0, \quad \text{若 } |\alpha| \text{ 是奇数.} \quad (2.12)$$

考虑方程 (2.10) 在 $\alpha = 0$ 的情形, 并注意到 $f_{e_i} = 0, i = 1, \dots, D$, 可得连续性方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \sum_{d=1}^D \frac{\partial u_d}{\partial x_d} = 0. \quad (2.13)$$

记 (2.10) 中 $\alpha = e_i, i = 1, \dots, D$, 使用关系式 (2.11) 可得动量守恒方程

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \sum_{d=1}^D \left(\theta_{id} \frac{\partial \rho}{\partial x_d} + \rho \frac{\partial \theta_{id}}{\partial x_d} \right) = 0. \quad (2.14)$$

记 (2.10) 中 $\alpha = e_i + e_j, i, j = 1, \dots, D, i \geq j$, 使用关系式 (2.11), 可得压强张量的平衡律方程组

$$\frac{2-\delta_{ij}}{2} \rho \frac{D\theta_{ij}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \left[(1+\delta_{id}+\delta_{jd}) \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_d}}{\partial x_d} + \rho \theta_{id} \frac{\partial u_j}{\partial x_d} + \rho \theta_{jd} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} (1-\delta_{ij}) \right] = \nu \mathcal{G}_{e_i+e_j}. \quad (2.15)$$

对于三维情形, 若记 $f_\alpha = 0, |\alpha| \geq 3$, 则方程组 (2.13)–(2.15) 就是著名的 10 矩方程组^[17].

将 (2.14) 和 (2.15) 代入到 (2.10) 消除关于 u_i 和 $\theta_{ij}, i, j = 1, \dots, D$ 的随体导数, 则可得到 f_α 的控制方程

$$\begin{aligned} \frac{Df_\alpha}{Dt} + \sum_{d,k=1}^D \theta_{dk} \frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + \sum_{d=1}^D (\alpha_d + 1) \frac{\partial f_{\alpha+e_d}}{\partial x_d} - \sum_{i,d=1}^D f_{\alpha-e_i} \left(\frac{\theta_{id}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_d} + \frac{\partial \theta_{id}}{\partial x_d} \right) \\ + \sum_{i,d=1}^D (\alpha_d + 1) f_{\alpha-e_i+e_d} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,d,k=1}^D (\theta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j-e_k} + \delta_{kd} (\alpha_k + 1) f_{\alpha-e_i-e_j+e_k}) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \\ - \sum_{i,j,d=1}^D \frac{1+\delta_{id}+\delta_{jd}}{2-\delta_{ij}} \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{\rho} \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_d}}{\partial x_d} = \nu \left(\mathcal{G}_\alpha - f_\alpha + \sum_{i,j=1}^D \frac{\mathcal{G}_{e_i+e_j}}{\rho} f_{\alpha-e_i-e_j} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

此时, 方程组 (2.13)–(2.16) 构成了一个拟线性形式的具有无穷个方程的矩系统.

为了获得只有有限个方程的矩系统, 需要对原系统作截断. 由于基函数 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{v})$ 的拟线性性, 我们作正交截断, 即选取一个正整数 $M \in \mathbb{N}, M \geq 2$, 选取有限集 $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq M}$ 作为所考虑的变量集合, 并抛弃所有含有 $Df_\alpha/Dt, |\alpha| > M$ 的方程组, 则我们获得了一个只有有限个方程的矩系统. 可是, 由于含有 $Df_\alpha/Dt, |\alpha| = M$ 的方程依赖 $f_{\alpha+e_d}, d = 1, \dots, D$, 该系统并不封闭. 最简单也最直观的封闭方式是 Grad 的封闭方式^[1], 直接记 $f_\alpha = 0, |\alpha| = M + 1$. 这里先使用 Grad 的封闭方式, 这样获得的方程组我们称为广义 Grad 型矩方程组.

我们指出, 对于一维情形, 上述系统与一维 NRxx 系统^[14] 完全相同. 所以, 各向同性的 NRxx 方法可以认为是上述矩系统的某种特殊情形.

3 矩方程组的分析

正如文献 [3] 中所指出的那样, Grad 13 矩系统^[1] 并不是全局双曲的. 文献 [18] 指出 NRxx 即使在 $D = 1$ 情形也不是全局双曲的. 本节指出广义 Grad 型矩方程组也具有同样的问题. 为此, 我们着

限于广义 Grad 型矩方程组系数矩阵的性质, 通过对该系数矩阵的分析, 证明该系统也不是全局双曲的, 并为正则化的提出作铺垫.

首先, 我们重写上一节中已经获得的广义 Grad 型矩方程组. 方程 (2.14) 和 (2.15) 可写成

$$\frac{Du_i}{Dt} + \sum_{d=1}^D \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{id}}{\partial x_d} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \left(p_{ij} \frac{\partial u_d}{\partial x_d} + p_{id} \frac{\partial u_j}{\partial x_d} + p_{jd} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + (e_i + e_j + e_d)! \cdot \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_d}}{\partial x_d} \right) = (1 + \delta_{ij}) \nu \mathcal{G}_{e_i+e_j}, \quad (3.2)$$

其中 $\alpha!$ 定义为 $\alpha! = \prod_{d=1}^D \alpha_d!$, $i, j = 1, \dots, D$. 使用关系式 $p = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D p_{ii}$, 可得

$$\frac{Dp}{Dt} + \sum_{i,d=1}^D \frac{2}{D} p_{id} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \sum_{d=1}^D \left(p \frac{\partial u_d}{\partial x_d} + \frac{2}{D} \frac{\partial q_d}{\partial x_d} \right) = 0, \quad (3.3)$$

上式中使用了

$$\sum_{i=1}^D \mathcal{G}_{2e_i} = 0.$$

考虑到

$$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_d} - \frac{\theta_{ij}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_d},$$

对于任意 $i, j, d = 1, \dots, D$ 均成立. 方程组 (2.16) 可写成

$$\begin{aligned} & \frac{Df_\alpha}{Dt} + \sum_{d,k=1}^D \theta_{dk} \frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + \sum_{d=1}^D (\alpha_d + 1) \frac{\partial f_{\alpha+e_d}}{\partial x_d} \\ & + \sum_{i,j,d=1}^D \frac{C_{ijd}(\alpha)}{2\rho} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_d} - \theta_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_d} \right) + \sum_{i,d=1}^D (\alpha_d + 1) f_{\alpha-e_i+e_d} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \\ & - \sum_{i,d=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i}}{\rho} \frac{\partial p_{id}}{\partial x_d} - \sum_{i,j,d=1}^D \frac{(e_i + e_j + e_d)!}{2} \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{\rho} \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_d}}{\partial x_d} \\ & = \nu \left(\mathcal{G}_\alpha - f_\alpha + \sum_{i,j=1}^D \frac{\mathcal{G}_{e_i+e_j}}{\rho} f_{\alpha-e_i-e_j} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $C_{ijd}(\alpha)$ 定义为

$$C_{ijd}(\alpha) = \sum_{k=1}^D \theta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j-e_k} + (\alpha_d + 1) f_{\alpha-e_i-e_j+e_d}. \quad (3.5)$$

为后续使用方便, 这里定义一些符号. 对于向量 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 约定 $\mathbf{a}(i:j) = (a_i, \dots, a_j)$; 对于矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 约定

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(i, j:k) &= (a_{i,j}, \dots, a_{i,k}), \quad \mathbf{A}(i, :) = \mathbf{A}(i, 1:n), \\ \mathbf{A}(i:l, j:k) &= \begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,k} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,j} & a_{l,j+1} & \cdots & a_{l,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

记

$$\mathcal{S}_{D,M} = \{\alpha \in \mathbb{N}^D \mid |\alpha| \leq M\}.$$

若将 $\mathcal{S}_{D,M}$ 中元素按照全幂序进行排列, 则每个元素的编号为

$$\mathcal{N}_D(\alpha) = \sum_{i=1}^D \binom{\sum_{k=D-i+1}^D \alpha_k + i - 1}{i} + 1. \quad (3.6)$$

注意到 Me_D 是 $\mathcal{S}_{D,M}$ 最后一个元素, 所以, $\mathcal{S}_{D,M}$ 中元素个数为

$$N = \mathcal{N}_D(Me_D) = \binom{M+D}{D}.$$

该数也是在 $|\alpha| \leq M$ 截断意义下的矩方程组的方程个数.

在上述符号约定下, 我们将矩系统的变量以如下顺序排列成一个向量 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \rho, & w_{i+1} &= u_i, \\ w_{\mathcal{N}_D(e_i+e_j)} &= \frac{p_{ij}}{(1+\delta_{ij})}, \\ w_{\mathcal{N}_D(\alpha)} &= f_\alpha, & \text{其他 } \alpha, \end{aligned}$$

其中 $i, j = 1, \dots, D$ 且 $|\alpha| \leq M$. 图 1(a) 展示了 $\mathbf{w}$ 中变量的排列方式. 将方程组 (2.13)、(3.1)、(3.2) 和 (3.4) 收集到一起写成如下拟线性系统:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{A}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} = \nu \mathbf{Q}\mathbf{w}, \quad (3.7)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}_M^{(d)}$, $d = 1, \dots, D$ 和矩阵 $\mathbf{Q}$ 可根据方程组 (2.13)、(3.1)、(3.2) 和 (3.4) 来确定. 矩阵 $\mathbf{A}_M^{(d)}$ 的形式虽然很复杂, 却有非常正则的结构. 这为我们详细分析该系统矩阵 $\mathbf{A}_M^{(d)}$ 的性质提供了便利.

3.1 系数矩阵的性质

不失一般性, 我们仅研究矩阵 $\mathbf{A}_M^{(1)}$. 为方便起见, 在不引起歧义的情形下, 我们用 $\mathbf{A}_M$ 表示 $\mathbf{A}_M^{(1)}$.

3.1.1 $D = 1$ 情形

该情形已经在文献 [18] 中详细讨论过, 这里列出主要结果以备使用. 此时, 系数矩阵为

$$\mathbf{B}_M = \begin{pmatrix} U & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & 2\rho^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3p_{11}/2 & U & 3 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2\theta_{11}^2 & 4f_3 & \theta_{11} & U & 4 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{5\theta_{11}f_3}{2\rho} & 5f_4 & 3\frac{f_3}{\rho} & \theta_{11} & U & 5 & 0 & \dots & 0 \\ -3\frac{\theta_{11}f_4}{\rho} & 6f_5 & 4\frac{f_4}{\rho} & -\frac{3f_3}{\rho} & \theta_{11} & U & 6 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{M\theta_{11}f_{M-2}+\theta_{11}^2f_{M-4}}{2\rho} & Mf_{M-1} & \frac{(M-2)f_{M-2}+\theta_{11}f_{M-4}}{\rho} & -\frac{3f_{M-3}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U & M \\ -\frac{(M+1)\theta_{11}f_{M-1}+\theta_{11}^2f_{M-3}}{2\rho} & (M+1)f_M & \frac{(M-1)f_{M-1}+\theta_{11}f_{M-3}}{\rho} & -\frac{3f_{M-2}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

其中 $U = 0$. 直接观察可知, 该矩阵与速度 u 无关且对角元均为 0; 是下 Hessenberg 矩阵. 该矩阵的特征多项式为

$$\theta_{11}^{M+1} He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda) - (M+1)! \left(\lambda f_M + \frac{\lambda^2 - \theta_{11}}{2} f_{M-1} \right). \quad (3.9)$$

当 f_M 和 f_{M-1} 比较大时, 该特征多项式可能不再有 $M+1$ 个实根, 因此, 该矩阵可能并不能实对角化. 该矩阵对应于满足 (3.9) 的特征值 λ 的特征向量为

$$r_1 = \rho, \quad r_2 = \lambda, \quad r_3 = \frac{\rho \lambda^2}{2}, \quad r_k = \frac{\rho He_{k-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(k-1)!} - f_{k-2} \lambda - f_{k-3} \frac{He_2^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{2}, \quad k = 4, \dots, M+1. \quad (3.10)$$

3.1.2 $D \geq 2$ 情形

本文主要关注 $D \geq 2$ 情形, 下面首先考虑几个例子以便我们对系数矩阵有较深的认识.

例 3.1 考虑 $D = 2$ 情形, α 在 $\mathcal{S}_{D,M}$ 中的编号是

$$\mathcal{N}_D(\alpha) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} + \alpha_2 + 1.$$

w 中元素的排列方式见图 1(a). 考虑简单情形 $M = 3$, 此时系数矩阵 A_3 可写成

$$A_3 = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3p_{11}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}/2 & p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ -\theta_{11}^2/2 & f_{30} & 0 & \theta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\theta_{11}\theta_{12}/2 & f_{21} & 3f_{30} & \theta_{12} & \theta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{11}\theta_{22}/2 - \theta_{12}^2 & 2f_{12} & 2f_{21} & 0 & \theta_{12} & \theta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{22}\theta_{12}/2 & f_{03} & f_{12} & 0 & 0 & \theta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $f_{ij} = f_{ie_1 + je_2}$, 左上角方框中元素构成了 A_2 . 若 $M > 3$, 则对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^2$ 且 $3 < |\alpha| \leq M$, 有

$$A_M(1:10, 1:10) = A_3, \quad (3.11a)$$

$$A_M(\mathcal{N}_D(\alpha), \mathcal{N}_D(\alpha)) = 0, \quad (3.11b)$$

$$A_M(\mathcal{N}_D(\alpha), \mathcal{N}_D(\alpha - e_k)) = \theta_{1k}, \quad \text{若 } \alpha_k > 0, \quad (3.11c)$$

$$A_M(\mathcal{N}_D(\alpha), \mathcal{N}_D(\alpha + e_1)) = \alpha_1 + 1, \quad \text{若 } |\alpha| < M, \quad (3.11d)$$

$$A_M(\mathcal{N}_D(\alpha), 1:9) = \left(-\sum_{i,j=1}^D \frac{\theta_{ij} C_{ij1}}{2\rho}, (\alpha_1 + 1)f_\alpha, (\alpha_1 + 1)f_{\alpha+e_1-e_2}, \right. \\ \left. \frac{C_{111}(\alpha)}{\rho} - \frac{2f_{\alpha-e_1}}{\rho}, \frac{C_{121}(\alpha)}{\rho} - \frac{f_{\alpha-e_2}}{\rho}, \frac{C_{221}(\alpha)}{\rho}, \right. \\ \left. -\frac{3f_{\alpha-2e_1}}{\rho}, -\frac{2f_{\alpha-e_1-e_2}}{\rho}, -\frac{f_{\alpha-2e_2}}{\rho} \right), \quad (3.11e)$$

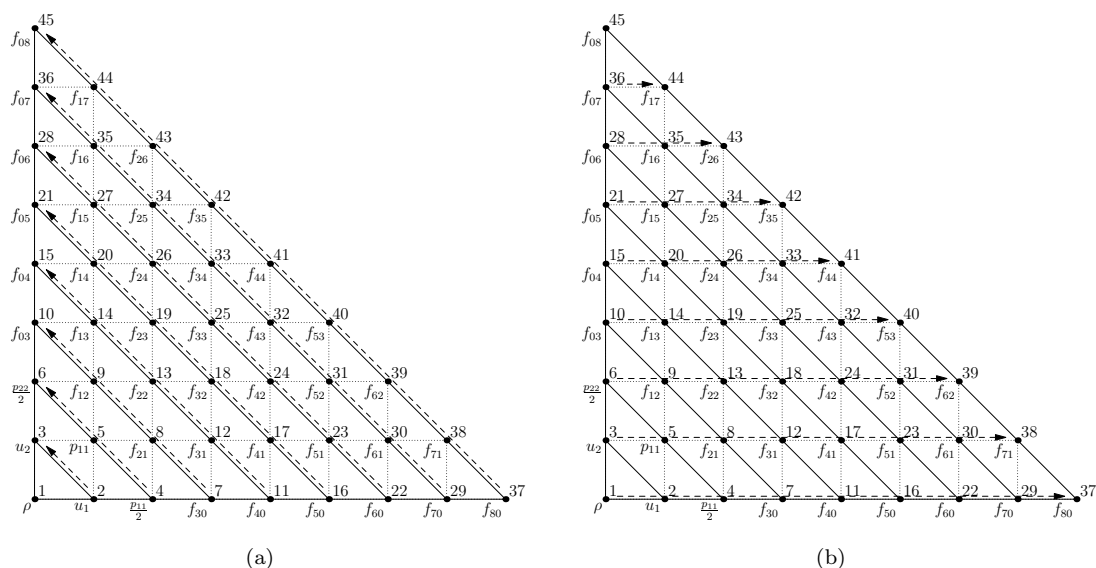


图 1 $D = 2, M = 8$ 时矩系数的排列方式, 每个点代表一个矩系数. 每个点的左下角为该点对应的矩系数的表达式, 右上角为该矩系数在相应排列下的编号, 虚箭头表示排列的方向. (a) w 中元素排列方式; (b) 例 2 中 w' 的元素排列方式

其中 $C_{ijd}(\alpha)$ 的定义见 (3.5). 这里需要指出的是:

(1) $\mathbf{A}_M(i, j)$ 中所有在上面未定义的元素均为 0;

(2) 对于 $|\alpha| = 4$, 部分 $\mathbf{A}_M(i, j)$ 中元素可能在 (3.11c) 和 (3.11) 中重复定义, 此时该元素的值为两者之和;

(3) 若任何 α 元素是负的, 则约定 $(\cdot)_\alpha$ 为 0.

显然, 矩阵 $\mathbf{A}_M$ 不依赖于 $\mathbf{u}$, 且所有对角元均为 0. 事实上, 这是由于在方程组 (2.13)、(3.1)、(3.2) 和 (3.4), 每个含有关于 $x_d, d = 1, \dots, D$ 微分的项均不依赖于 $\mathbf{u}$; 且在包含 $\frac{Dw_i}{Dt}, i = 1, \dots, N$ 的方程中, $\frac{\partial w_i}{\partial x_d}, d = 1, \dots, D$ 均为 0. 因此, 我们有下面结论.

性质 3.1 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 不依赖于 $\mathbf{u}$, 即

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{u}} = 0,$$

且 $\mathbf{A}$ 所有对角元均为 0.

该性质本质上对应于矩系统的 Galileo 平移不变性.

例 3.1 给出了系数矩阵 $\mathbf{A}_M$ 在 $D = 2$ 情形下的显示表达式. 这使得我们能够深入地研究矩阵 $\mathbf{A}_M$ 的稀疏元素的分布. 从图 2 可以看出, $\mathbf{A}_M(i, i+1:N), i = 1, \dots, N$ 中至多只有一个非零元. 事实上, 这是因为在 (3.4) 里包含 $\frac{Df_\alpha}{Dt}$ 的方程中, $\mathbf{A}_M(\mathcal{N}_D(\alpha), \mathcal{N}_D(\alpha) + 1:N)$ 中唯一的非零元是 $\mathbf{A}_M(\mathcal{N}_D(\alpha), \mathcal{N}_D(\alpha) + e_1)$. 因此我们有以下性质.

性质 3.2 对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^D, |\alpha| \leq M$, 记 $i = \mathcal{N}_D(\alpha)$, 则 $\mathbf{A}_M(i, i+1:N)$ 中至多有一个非零元. 特别地, 对于 $D = 1$ 情形, $\mathbf{A}_M$ 是下 Hessenberg 矩阵.

性质 3.2 为我们提供了一种可以直接计算 $\mathbf{A}_M$ 的特征多项式和特征向量的方法. 该方法类似于计算 Hessenberg 矩阵的特征多项式和特征向量的计算方法. 又由于矩阵 $\mathbf{A}_M$ 下三角部分非常稀疏, 计算 $\mathbf{A}_M$ 的特征多项式和特征向量将变得并不复杂. 下面研究该矩阵的可分性.

例 3.2 考虑 $D = 2$, 并记 $\mathbf{A}_M = \mathbf{A}_M^{(1)}$. 我们仅考虑在一维空间上的限制, 即 $\frac{\partial \cdot}{\partial x_2} = 0$. 方程 (2.13) 意味着 $\frac{D\rho}{Dt}$ 依赖于 $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$. 我们用下述符号来表示该关系,

$$\rho \rightarrow u_1.$$

则方程组 (2.13)、(3.1)、(3.2) 和 (3.4) 中给出的 $\mathbf{w}$ 中元素的依赖关系可用图 3 表示.

有趣的是, 如果图 3 看成一个有向图, 每行看成一个子图, 则这些子图每个都是双连通的, 即从任意一个点到其他任意一个点均存在一条路径. 若把任意两个子图合并成一个大的子图, 则该子图不是

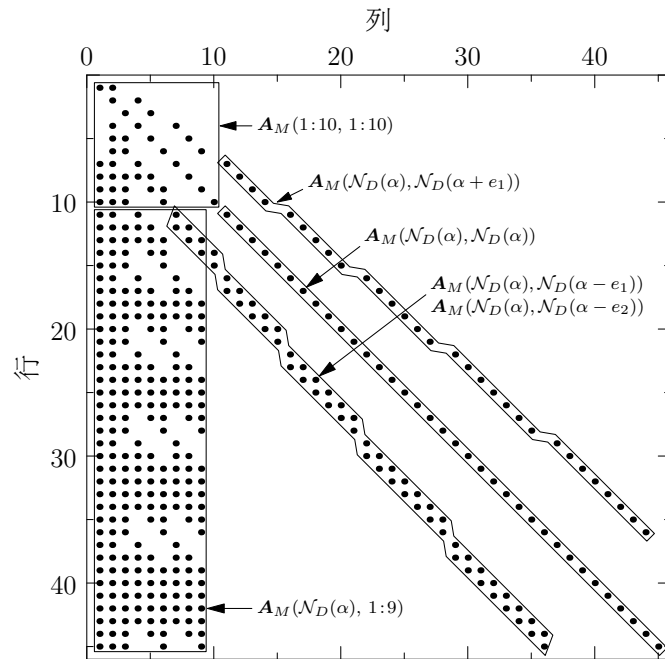


图 2 矩阵 $\mathbf{A}_M$ ($M = 8, D = 2$) 的非零元的位置, 非零元的值在 (3.11) 给出

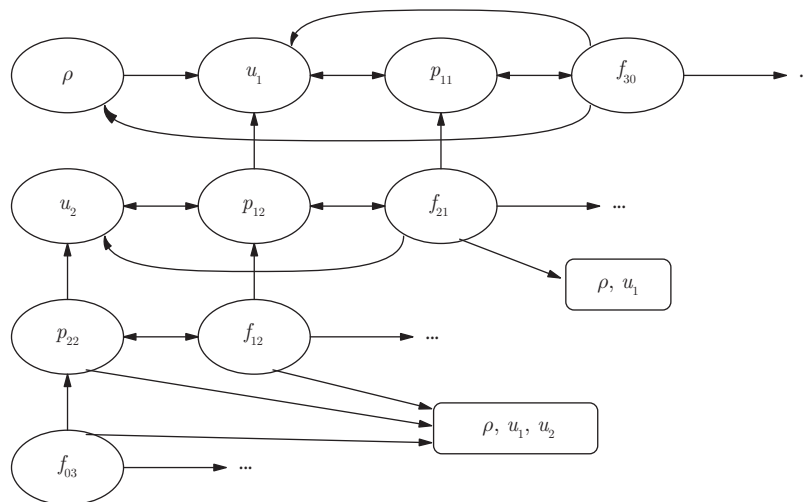


图 3 在 $D = 2, \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} = 0$ 情形下, $\mathbf{w}$ 中元素的依赖关系

双连通的. 根据矩阵可分的定义 (参见文献 [19, 第 288–289 页]), 矩阵 A_M 是可分的. 为此, 我们重新排列 w 中元素顺序, 按照 α 的字典序排列, 即

$$w' = (\underbrace{\rho, u_1, p_{11}/2, f_{3e_1}, \dots, f_{Me_1}}_{\text{第 1 行}}, \underbrace{u_2, p_{12}, \dots, f_{(M-1)e_1+e_2}}_{\text{第 2 行}}, \dots, \underbrace{f_{Me_2}}_{\text{最后 1 行}})^T,$$

则系数矩阵 A_M 可转化为一个分块下三角矩阵, 其中图 1(b) 给出了矩阵 w' 在 $D=2, M=8$ 情形下的排列方式.

上述排列意味着存在一个排列矩阵 P 使得 $w' = Pw$. 记 $A'_M = PA_MP^{-1}$, 则有

$$\frac{Dw'}{Dt} + A'_M \frac{\partial w'}{\partial x_1} = \nu PQP^{-1}w'.$$

图 4 给出了矩阵 A'_M 在 $M=8$ 时的非零元的分布. 从图中可以看出 A'_M 是可分的分块下三角矩阵. 准确地讲, A'_M 可写成

$$A'_M = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & & & \\ * & \hat{A}_1 & & \\ * & * & \hat{A}_2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \hat{A}_M \end{bmatrix},$$

其中 $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{(M+1-i) \times (M+1-i)}$, $i=0, \dots, M$ 是下 Hessenberg 矩阵.

下面探讨矩阵 $\hat{A}_i$, $i=0, \dots, M$ 的性质. $\hat{A}_0, \hat{A}_1$ 和 $\hat{A}_2$ 的表达式分别见 (3.12)–(3.14).

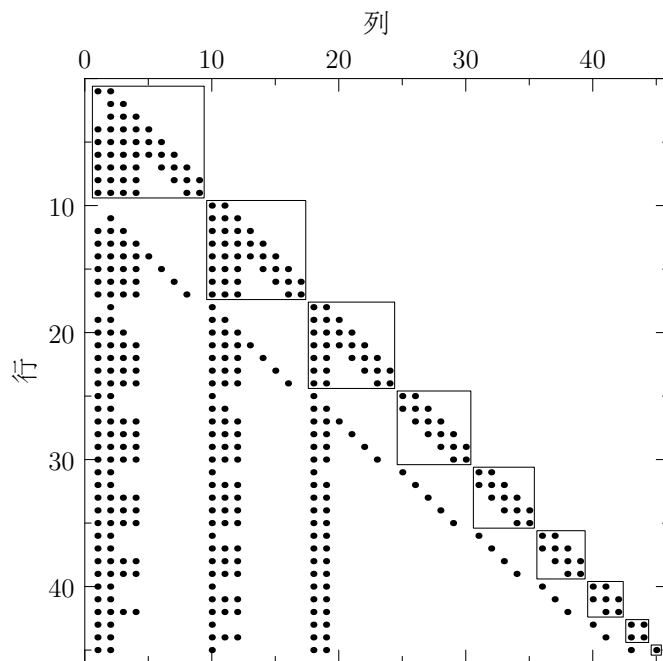


图 4 矩阵 A'_M 在 $M=8, D=2$ 时的非零元的分布. A'_M 是可分的分块下三角矩阵, 且每个对角块是一个下 Hessenberg 矩阵

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_0 = & \begin{pmatrix} U & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & 2\rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3p_{11}/2 & U & 3 & 0 \\ -1/2\theta_{11}^2 & 4f_{3e_1} & \theta_{11} & U & 4 & 0 \\ -\frac{5\theta_{11}f_{3e_1}}{2\rho} & 5f_{4e_1} & 3\frac{f_{3e_1}}{\rho} & \theta_{11} & U & 5 & 0 \\ -3\frac{\theta_{11}f_{4e_1}}{\rho} & 6f_{5e_1} & 4\frac{f_{4e_1}}{\rho} & -\frac{3f_{3e_1}}{\rho} & \theta_{11} & U & 6 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{M\theta_{11}f_{(M-2)e_1}+\theta_{11}^2f_{(M-4)e_1}}{2\rho} & Mf_{(M-1)e_1} & \frac{(M-2)f_{(M-2)e_1}+\theta_{11}f_{(M-4)e_1}}{\rho} & -\frac{3f_{(M-3)e_1}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U & M \\ -\frac{(M+1)\theta_{11}f_{(M-1)e_1}+\theta_{11}^2f_{(M-3)e_1}}{2\rho} & (M+1)f_{Me_1} & \frac{(M-1)f_{(M-1)e_1}+\theta_{11}f_{(M-3)e_1}}{\rho} & -\frac{3f_{(M-2)e_1}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}_1 = & \begin{pmatrix} U & \rho^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ p_{11} & U & 2 & 0 & 0 \\ 3f_{3e_1} & \theta_{11} & U & 3 & 0 & 0 \\ 4f_{4e_1} & \frac{3f_{3e_1}}{\rho} & \theta_{11} & U & 4 & 0 & 0 \\ 5f_{5e_1} & \frac{4f_{4e_1}}{\rho} & -\frac{2f_{3e_1}}{\rho} & \theta_{11} & U & 5 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (M-1)f_{(M-1)e_1} & \frac{(M-2)f_{(M-2)e_1}+\theta_{11}f_{(M-4)e_1}}{\rho} & -\frac{2f_{(M-3)e_1}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U & M-1 \\ Mf_{Me_1} & \frac{(M-1)f_{(M-1)e_1}+\theta_{11}f_{(M-3)e_1}}{\rho} & -\frac{2f_{(M-2)e_1}}{\rho} & 0 & \dots & 0 & \theta_{11} & U \end{pmatrix}, \\
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$$\tag{3.13}$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^D$, 记

$$\hat{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_D), \quad (3.18)$$

且约定 $\hat{e}_1 = 0$, $\hat{e}_2 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{D-1}, \dots, \hat{e}_D = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{D-1}$.

对于任意 $2 \leq M \in \mathbb{N}$ 和任意 $D \in \mathbb{N}^+$, 记排列矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 使得 $\mathbf{w}' = \mathbf{P}\mathbf{w}$ 是按照 α 的字典序排列的. 定义 $\mathbf{A}'_M = \mathbf{P}\mathbf{A}_M\mathbf{P}$. 则我们可得下述结论.

性质 3.3 对于 $D \geq 2$, 矩阵 $\mathbf{A}'_M$ 是分块下三角矩阵, 且对角块

$$(\mathbf{A}'_M)_{ii} = \hat{A}_{\hat{\alpha}}$$

是不可分的, 其中 $i = \mathcal{N}_{D-1}(\hat{\alpha})$. 准确地讲, $\hat{A}_{\hat{\alpha}} = \hat{A}_{|\hat{\alpha}|}$, $|\hat{\alpha}| = \alpha_2 + \dots + \alpha_D$, 其中 $\hat{A}_i$, $i = 0, \dots, M$ 的定义见例 3.2.

3.2 全局双曲性的缺失

下面给出本节的主要结论: 上一节中得到的广义 Grad 型矩方程组对于任意 $D \in \mathbb{N}^+$, $M \geq 3$ 均不全局双曲. 具体如下定理所述.

定理 3.1 第 2 节中获得的矩系统对于任意 $D \in \mathbb{N}^+$ 和 $M \geq 3$ 是不全局双曲的.

证明 为证明该定理, 我们只需证明 $\mathbf{A}'_M^{(1)}$ 不总是能实对角化的. 由于 $\mathbf{P}$ 是一个排列矩阵, 所以, 我们只需要研究矩阵 $\mathbf{A}'_M$ 的实对角化性即可. 性质 3.3 指出 $\mathbf{A}'_M$ 是一个分块下三角矩阵, 因此, 如果 $(\mathbf{A}'_M)_{11}$ 是不可实对角化的, 则 $\mathbf{A}'_M$ 也一定不是. 事实上, 由于

$$(\mathbf{A}'_M)_{11} = \mathbf{B}_M(\rho, \theta_{11}, f_{3e_1}, \dots, f_{Me_1}),$$

并且 (3.9) 蕴含着, 如果 f_{Me_1} 和 $f_{(M-1)e_1}$ 比较大时, $(\mathbf{A}'_M)_{11}$ 有复特征值. 至此, 我们完成了该定理的证明. $\square$

这里指出, 当 $M = 2$, $D = 1$ 时, 该矩系统是经典的 1 维 Euler 方程组, 该方程组是全局双曲的. 当 $M = 2$, $D = 3$ 时, 该系统是著名的 10 矩方程组, 该方程组在文献中被广泛研究, 如文献 [17, 20, 21].

4 全局双曲正则化

本节继承文献 [11] 中的思路, 提出一种正则化方法把广义 Grad 型方程组修正为全局双曲的.

4.1 一维空间情形

对于任意 $3 \leq M \in \mathbb{N}$, 第 2 节中获得的广义 Grad 型矩系统给出了除 f_α , $|\alpha| = M$ 以外的所有变量的准确的方程. 但对于 f_α , $|\alpha| = M$ 这些变量, 所给出的方程并不一定是准确的, 因为这些变量的控制方程依赖于 $f_{\alpha+e_d}$, $d = 1, \dots, D$. 在封闭时, 这些量被直接设置为 0. 文献 [6, 7, 22] 试着使用不同的方法给出了 $f_{\alpha+e_d}$, $|\alpha| = M$ 的表达式. 事实上, 我们注意到 $f_{\alpha+e_d}$, $|\alpha| = M$ 仅仅出现在 f_α , $|\alpha| = M$ 的控制方程中, 而且均是以空间导数的形式出现. 所以, 一个可行的正则化方案是给出 $\partial f_{\alpha+e_d}/\partial x_d$, $|\alpha| = M$ 的表达式从而达到修正 f_α , $|\alpha| = M$ 的控制方程的目的. 性质 3.3 指出, 由于变量 u_1 , θ_{11} 和 f_{ke_i} , $k = 0, \dots, M$ 的控制方程并不依赖于其他变量, 所以, 系数矩阵 $\mathbf{A}'_M$ 有如下形式:

$$\mathbf{A}'_M = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

因此, 一个自然的要求是正则化要保持系数矩阵具有上述结构. 下面将提出一个正则化方案满足上述所有要求, 同时使得正则化方程组是全局双曲的. 为方便起见, 我们给出如下定义.

定义 4.1 对于广义 Grad 型矩方程组的一个正则化是可容许的, 如果

- (1) 该正则化仅修正 f_α , $|\alpha| = M$ 的控制方程;
- (2) 该正则化保持系数矩阵具有 (4.1) 的形式.

从定理 3.1 的证明可以看出, 矩阵 $(\mathbf{A}'_M)_{ii}$, $i = 1, \dots, \hat{N}$ 是可实对角化的, 是矩阵 $\mathbf{A}_M$ 可实对角化的必要条件. 本节首先研究矩阵 $(\mathbf{A}'_M)_{ii}$, $i = 1, \dots, \hat{N}$ 的正则化, 接下来证明该正则化可将 $\mathbf{A}_M$ 修正为可实对角化.

正如上述讨论中指出的那样, 正则化只能修改矩阵 $\hat{A}_0$ 的最后一行. 性质 3.3 指出,

$$\hat{A}_0 = \mathbf{B}_M(\rho, \theta_{11}, f_{3e_1}, \dots, f_{Me_1}).$$

而对于 $D = 1$ 情形, 可得 $\mathbf{A}'_M = \hat{A}_0$. 在文献 [18] 中, 关于 $D = 1$ 的正则化方案被详细讨论, 主要结论罗列如下, 以备后续使用.

引理 4.1 对任意可行的 $\mathbf{w}$, 定义 $\tilde{\mathbf{B}}_M$ 满足

$$\tilde{\mathbf{B}}_M \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{B}_M \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - (M+1) \left(f_{Me_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f_{M-1}}{2\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) \mathbf{I}_{M+1},$$

即

$$\tilde{\mathbf{B}}_M = \mathbf{B}_M - \mathbf{I}_{M+1} \mathcal{R}_0^T, \quad (4.2)$$

其中 $\mathcal{R}_0 = (M+1)(-\theta f_{M-1}/2\rho, f_M, f_{M-1}/\rho, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$, $\mathbf{I}_{M+1}$ 是 $(M+1) \times (M+1)$ 阶单位矩阵的最后一列. 则矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}_M$ 是可实对角化的. 准确地讲, $\tilde{\mathbf{B}}_M$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}_M) = \theta^{M+1} He_{M+1}^{[\theta]}(\lambda),$$

且 $\tilde{\mathbf{B}}_M$ 的特征值为 $\sqrt{\theta} C_{1,M+1}, \dots, \sqrt{\theta} C_{M+1,M+1}$, 其中 $C_{j,k}$ 是经典 Hermite 多项式的第 j 个根 ($He_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ 必有 k 个不同实根, 记为 $C_{1,k}, \dots, C_{k,k}$ 并满足 $C_{1,k} < \dots < C_{k,k}$). 记 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{M+1}$,

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \quad r_2 = \frac{\lambda}{\rho}, \quad r_3 = \frac{\lambda^2}{2}, \\ r_k &= \frac{He_{k-1}^{[\theta]}(\lambda)}{(k-1)!} - \lambda \frac{f_{k-2}}{\rho} - (\lambda^2 - 1) \frac{f_{k-3}}{(2\rho)}, \quad k = 4, \dots, M+1, \end{aligned}$$

其中 λ 是 $\mathbf{B}_M$ 的一个特征值, 则 $\mathbf{r}$ 是矩阵 $\mathbf{B}_M$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

另外, 该正则化是可容许的, 且能将 $\mathbf{B}_M$ 修正为全局双曲且特征多项式为 $\theta^{M+1} He_{M+1}^{[\theta]}$ 的可容许正则化是唯一的.

注 4.1 分布函数展开式 (2.9) 给出了 f_α 与 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 的关系. 分布函数的非负性对 f_α 有很多限制. 特别地, ρ 和 Θ 满足

$$\rho > 0 \quad \text{且} \quad \Theta \text{ 是对称正定矩阵.} \quad (4.3)$$

虽然限定条件 (4.3) 不足以保证分布函数为正, 但在本文中并不需要其他额外的限定性条件. 因为我们称 $\mathbf{w}$ 是可行是指 $\mathbf{w}$ 满足限定性条件 (4.3).

下面将 $D = 1$ 的结果推广到多维情形.

定义 4.2 称 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 是 $\mathbf{A}_M$ 的正则化矩阵, 若对于任意可行的 $\mathbf{w}$ 均有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_M \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} = & \mathbf{A}_M \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} - \sum_{|\alpha|=M} (\alpha_1 + 1) \left(\sum_{i=1}^D f_{\alpha+e_1-e_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha+e_1-e_i-e_j}}{2\rho} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_1} - \theta_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) \right) \mathbf{I}_{\mathcal{N}_D(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $\mathbf{I}_k$ 是 $N \times N$ 阶单位矩阵的最后一列.

在该定义中, $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 是由 $\mathbf{A}_M$ 通过修改少数几项而获得的. 具体来讲, 对于任意 $|\alpha| = M$, 记 $k = \mathcal{N}_D(\alpha)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_M(k, 1) &= \mathbf{A}_M(k, 1) + (\alpha_1 + 1) \sum_{i,j=1}^D \frac{\theta_{ij} f_{\alpha+e_1-e_i-e_j}}{2\rho}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_M(k, d+1) &= \mathbf{A}_M(k, d+1) - (\alpha_1 + 1) f_{\alpha+e_1-e_d}, \quad d = 1, \dots, D, \\ \tilde{\mathbf{A}}_M(k, \mathcal{N}_D(e_i + e_j)) &= \mathbf{A}_M(k, \mathcal{N}_D(e_i + e_j)) - (\alpha_1 + 1) \frac{f_{\alpha+e_1-e_i-e_j}}{\rho}, \quad i, j = 1, \dots, D, \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的其他元素与 $\mathbf{A}_M$ 的相同.

为方便起见, 我们给出无碰撞情形的正则化矩方程组在一维空间, 即 $\frac{\partial \cdot}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \cdot}{\partial x_D} = 0$ 情形下的表达式如下:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (4.5a)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{1i}}{\partial x_1} = 0, \quad (4.5b)$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} + p_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_{1i} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + p_{1j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + (e_i + e_j + e_1)! \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_1}}{\partial x_1} = 0, \quad (4.5c)$$

$$\begin{aligned} \frac{Df_\alpha}{Dt} + \sum_{k=1}^D \theta_{1k} \frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_1} + (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_1 + 1) \frac{\partial f_{\alpha+e_1}}{\partial x_1} \\ + \sum_{i,j=1}^D \frac{\tilde{C}_{ij}(\alpha)}{2\rho} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_1} - \theta_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) + \sum_{i=1}^D (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_1 + 1) f_{\alpha-e_i+e_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ - \sum_{i=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i}}{\rho} \frac{\partial p_{i1}}{\partial x_1} - \sum_{i,j=1}^D \frac{(e_i + e_j + e_1)!}{2} \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{\rho} \frac{\partial f_{e_i+e_j+e_1}}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \quad (4.5d)$$

其中 $\tilde{C}_{ij}$ 定义为

$$\tilde{C}_{ij}(\alpha) = \sum_{k=1}^D \theta_{k1} f_{\alpha-e_i-e_j-e_k} + (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_1 + 1) f_{\alpha-e_i-e_j+e_1}. \quad (4.6)$$

可以看出, 方程组 (4.5a)–(4.5d) 是正则化矩方程组的简化形式, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 可由这些方程组直接得到.

注意到 $\tilde{\mathbf{A}}'_M = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_M \mathbf{P}^{-1}$, 其中 $\mathbf{P}$ 是排列矩阵使得 $\mathbf{A}'_M = \mathbf{P} \mathbf{A}_M \mathbf{P}^{-1}$. 从矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的定义可以看出, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ (不同于 $\mathbf{A}'_M$) 的行恰好是 $\hat{A}_k$, $k = 1, \dots, \hat{N}$ 的最后一行. 特别地, (4.2) 中定义的 $\tilde{\mathbf{B}}_M$ 和 $\tilde{\hat{A}}_1, \tilde{\hat{A}}_2$ 可写成

$$\tilde{\hat{A}}_1 = \hat{A}_1 - \mathbf{I}_M^{(M)} \mathcal{R}_1^T, \quad (4.7a)$$

$$\tilde{\hat{A}}_2 = \hat{A}_2 - \mathbf{I}_{M-1}^{(M-1)} \mathcal{R}_2^T, \quad (4.7b)$$

其中 $\mathbf{I}_k^{(n)}$ 是 $n \times n$ 单位矩阵的第 k 行,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= M \left(f_{Me_1}, \frac{f_{(M-1)e_1}}{\rho}, 0, \dots, 0 \right)^T \in \mathbb{R}^M, \\ \mathcal{R}_2 &= (M-1) \left(\frac{f_{(M-1)e_1}}{\rho}, 0, \dots, 0 \right)^T \in \mathbb{R}^{M-1}. \end{aligned}$$

对于 $\hat{A}_k, k=3, \dots, M$, 有 $\tilde{\hat{A}}_k = \hat{A}_k$. 因此, 正则化 (4.4) 是可容许的.

这里对用到的符号作一整理与说明. $\mathbf{A}_M$ 是矩方程组 (3.7) x 方向的系数矩阵, $\mathbf{A}'_M = \mathbf{P} \mathbf{A}_M \mathbf{P}^{-1}$ 是一个分块下三角矩阵, 其中 $\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{w}' = \mathbf{P} \mathbf{w}$. 记 $\hat{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_D)$, 有 $\hat{A}_{\hat{\alpha}}, |\hat{\alpha}| \leq M$ 是 $\mathbf{A}'_M$ 的对角块, 而 $\mathbf{A}'_M$ 的定义见性质 3.3. $\tilde{\cdot}$ 代表正则化后的矩阵, 例如, $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是 $\mathbf{A}'_M$ 的正则化矩阵, $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\alpha}}$ 是 $\hat{A}_{\hat{\alpha}}$ 的正则化矩阵.

引理 4.1 指出对于 $D=1$ 情形, 定义 4.2 给出的正则化使得矩系统的系数矩阵可实对角化. 对于任意维情形, 我们有如下结论.

定理 4.1 正则化矩系统

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \tilde{\mathbf{A}}_M \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} = 0$$

对于任意可行的 $\mathbf{w}$ 均是双曲的.

为证明该定理, 我们需要证明正则化矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 对于任意可行的 $\mathbf{w}$ 均是可实对角化的. 由于 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的相似矩阵, 所以, 我们只需研究矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 即可. 下面首先研究 $\tilde{\hat{A}}_k, k=1, \dots, M$ 的特征结构, 从而获得矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的特征多项式. 接下来证明 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 所有特征值均是实的. 最后证明, $\tilde{\hat{A}}_k, k=0, \dots, M$ 的特征向量均能延拓成 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的特征向量, 且这些特征向量均是线性无关的, 从而证明 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 有 N 个线性无关的特征向量, 即矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 可实对角化.

由于 $\tilde{\hat{A}}_1$ 是下 Hessenberg 矩阵, 所以, 对于给定特征值, 可以直接计算其特征向量. 事实上, 我们有如下结论.

引理 4.2 矩阵 $\tilde{\hat{A}}_1 \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 对于任意 $\rho > 0, \theta_{11} > 0, f_{ke_1} \in \mathbb{R}, k=3, \dots, M-1$ 均是可实对角化的. 具体来讲, 该矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\hat{A}}_1) = \theta_{11}^M He_{11}^{[\theta_{11}]}(\lambda), \quad (4.8)$$

特征值分别为 $\sqrt{\theta_{11}} C_{1,M}, \dots, \sqrt{\theta_{11}} C_{M,M}$. 记 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^M$, 且

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \rho\lambda, \quad r_k = \frac{\rho He_{k-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(k-1)!} - f_{(k-1)e_1} - \lambda f_{(k-2)e_1}, \quad k=2, \dots, M,$$

则 $\mathbf{r}$ 是 $\tilde{\hat{A}}_1$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

该引理的证明并不复杂但非常繁琐, 具体证明见附录 B. 同理可得, 矩阵 $\tilde{\hat{A}}_2 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$ 具有如下性质.

引理 4.3 矩阵 $\tilde{\hat{A}}_2 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$ 对于任意 $\rho > 0, \theta_{11} > 0, f_{ke_1} \in \mathbb{R}, k=3, \dots, M-2$ 均是可实对角化的. 具体来讲, 该矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\hat{A}}_2) = \theta_{11}^{M-1} He_{M-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda), \quad (4.9)$$

特征值为 $\sqrt{\theta_{11}}C_{1,M-1}, \dots, \sqrt{\theta_{11}}C_{M-1,M-1}$. 记 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{M-1}$ 且

$$r_1 = 1, \quad r_k = \frac{He_{k-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(k-1)!} - f_{(k-1)e_1}, \quad k = 2, \dots, M-1,$$

则 $\mathbf{r}$ 是 $\tilde{A}_2$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

对于矩阵 $\tilde{A}_n, n = 3, \dots, M$, 我们也有类似结果, 具体如下.

引理 4.4 矩阵 $\tilde{A}_n, n = 3, \dots, M$ 对于任意 $\theta_{11} > 0$ 均是可实对角化的. 具体来讲, 记 $m = M + 1 - n$, 则 $\tilde{A}_n$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{A}_n) = \theta_{11}^m He_m^{[\theta_{11}]}(\lambda), \quad (4.10)$$

特征值为 $\sqrt{\theta_{11}}C_{1,m}, \dots, \sqrt{\theta_{11}}C_{m,m}$. 记 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ 且

$$r_k = \frac{He_{k-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(k-1)!}, \quad k = 1, \dots, m,$$

则 $\mathbf{r}$ 是 $\tilde{A}_n$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

上述两个引理的证明几乎与引理 4.2 的一致, 或更简单, 因此不再给出证明.

从性质 3.3、引理 4.1 和 4.2–4.4 可知, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是分块下三角矩阵, 且每个对角块的特征多项式均是已知的, 因此可以直接求得 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的特征多项式. 又由于矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 相似于 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$, 所以有如下结论.

引理 4.5 记

$$\mathcal{P}_{1,m} = \theta_{11}^{m+1} He_{m+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{P}_{d,m} = \prod_{k=0}^m \mathcal{P}_{d-1,k}, \quad 1 < d \in \mathbb{N}^+. \quad (4.12)$$

矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征多项式为 $\mathcal{P}_{D,M}$.

证明 $D = 1$ 情形可直接由引理 4.1 得出. 下面考虑 $D \geq 2$ 情形. 由于矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 相似于 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$, 所以, 两者特征多项式相同. 因此可得

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_M) = \det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}'_M) = \prod_{|\hat{\alpha}| \leq M} \det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{A}_{\hat{\alpha}}) = \prod_{m=0}^M (\theta_{11}^{m+1} He_{m+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda))^{(M-m+D-2)} = \mathcal{P}_{D,M}.$$

证毕. $\square$

至此, 我们已经得出正则化矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是分块下三角矩阵, 且每个对角块均是可实对角化的. 但不幸的是, 由于 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 可能有多重特征值, 所以, 这些性质并不能保证矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 可实对角化. 这迫使我们必须弄清楚 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的每个特征子空间的结构. 事实上, 我们要证明基于 $\tilde{A}_k, k = 0, \dots, M$ 的任一特征向量, 我们均能延拓出 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的一个特征向量. 在此之前, 我们先给出一个例子以便于读者理解我们的思路.

例 4.1 考虑分块下三角矩阵

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 14 & 36 & 0 & 0 \\ 16 & -10 & -54 & 0 & 0 \\ -10 & 4 & 27 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 9 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

A_{11} 和 A_{22} 的特征值和特征向量分别为

$$\begin{aligned} A_{11}: \quad \lambda_1 = 3, \quad \mathbf{r}_1 = (16, -26, 11)^T; \quad \lambda_2 = 6, \quad \mathbf{r}_2 = (10, -17, 8)^T; \quad \lambda_3 = 9, \quad \mathbf{r}_3 = (1, -2, 1)^T; \\ A_{22}: \quad \lambda_4 = 3, \quad \mathbf{r}_4 = (1, -1)^T; \quad \lambda_5 = 12, \quad \mathbf{r}_5 = (1, 2)^T. \end{aligned}$$

我们检验是否存在 $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^5$ 且 $\mathbf{R}_i(1:3) = \mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, 3$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{R}_i = \lambda_i \mathbf{R}_i$, 这等价于 $A_{21}\mathbf{r}_i + (A_{22} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{R}_i(4:5) = 0$ 是否有解. 而该线性方程组有解当且仅当 $A_{22} - \lambda_i \mathbf{I}$ 和 $A_{22} - \lambda_i \mathbf{I}$ 有相同的秩, 即

$$\text{rank}([A_{22} - \lambda_i \mathbf{I}, A_{21}\mathbf{r}_i]) = \text{rank}(A_{22} - \lambda_i \mathbf{I}). \quad (4.14)$$

对于 $i = 2, 3$, 由于 $A_{22} - \lambda_i \mathbf{I}$ 非奇异, 所以, (4.14) 恒成立. 对于 $i = 1$, 直接计算可知,

$$\text{rank}([A_{22} - \lambda_1 \mathbf{I}, A_{21}\mathbf{r}_1]) = \text{rank}(A_{22} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 1.$$

下面检验是否存在 $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^5$ 且 $\mathbf{R}_i(4:5) = \mathbf{r}_i$, $i = 4, 5$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{R}_i = \lambda_i \mathbf{R}_i$, 这等价于

$$\mathbf{R}_i(1:3) = (a, b, -2a - b).$$

特别地, $a = b = 0$ 时, 我们有 $\mathbf{R}_i(1:3) = 0$.

下面称 $\mathbf{R}_i$ 是 $\mathbf{r}_i$ 的一个延拓, 称 $\mathbf{R}_i$ 满足 $\mathbf{R}_i(1:3) = 0$, $i = 4, 5$ 是 $\mathbf{r}_i$ 的一个正规延拓. 显然, 基于正规延拓得到的 $\mathbf{R}_i$, $i = 1, \dots, 5$ 是线性无关的.

定义 4.3 记 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为一个可分为 $k \times k$ 的分块下三角矩阵, 且每个对角块的大小为 $n_i \times n_i$, 满足 $n_1 + \dots + n_k = N$. $\mathbf{r}_i$ 是第 i 个对角块对应于其特征值 λ 的一个特征向量. 我们称 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{r}_i$ 的一个延拓, 若 $\mathbf{R}((n_1 + \dots, n_{i-1} + 1) : (n_1 + \dots + n_i)) = \mathbf{r}_i$ 且 $\mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}$. 特别地, 称 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{r}_i$ 的一个正规延拓, 若 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{r}_i$ 的一个延拓且 $\mathbf{R}(1 : (n_1 + \dots + n_{i-1})) = 0$.

性质 4.1 $\mathbf{A}$ 如同定义 4.3 中定义, 且每个对角块均是可实对角化的. 记 $\mathbf{r}_{i,1}, \dots, \mathbf{r}_{i,n_i}$ 为 $\mathbf{A}$ 第 i 个对角块的一组特征向量. 若对于每个 $\mathbf{r}_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$, 都存在一个正规延拓 $\mathbf{R}_{i,j}$, 则 $\mathbf{R}_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$ 是线性无关的.

证明 我们将 $\mathbf{R}_{i,j}$ 按顺序 $\tilde{\mathbf{R}} = [\mathbf{R}_{1,1}, \dots, \mathbf{R}_{1,n_1}, \mathbf{R}_{2,1}, \dots, \mathbf{R}_{k,n_k}]$ 排列成矩阵. 由于 $\mathbf{R}_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$ 是 $\mathbf{r}_{i,j}$ 的正规延拓, 所以, $\tilde{\mathbf{R}}$ 是分块下三角矩阵, 且分块方式与 $\mathbf{A}$ 相同. 对于给定 $i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathbf{r}_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_i$ 是线性无关的, 所以, $\tilde{\mathbf{R}}$ 的每个对角块都是非奇异的, 进而 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是非奇异的, 即 $\mathbf{R}_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$ 是线性无关的. $\square$

下面检验对于 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的每个对角块的特征向量是否存在一个正规延拓. 事实上, 可得如下结论.

引理 4.6 记 $\mathbf{r}_\alpha$ 是 $\hat{\mathbf{A}}_\alpha \in \mathbb{R}^{(M+1-|\hat{\alpha}|) \times (M+1-|\hat{\alpha}|)}$ 对应于特征值 $\lambda = \sqrt{\theta_{11}} C_{\alpha_1, M+1-|\hat{\alpha}|}$ 的特征向量, 则存在一个正规延拓 $\mathbf{R}_\alpha$ 满足 $\tilde{\mathbf{A}}'_M \mathbf{R}_\alpha = \lambda \mathbf{R}_\alpha$.

该引理的证明过于繁琐, 我们将证明过程放在附录 C 中. 可以看出, 该引理本质上给出了证明定理 4.1 的主要工具. 基于上述所有的预备知识与结论, 定理 4.1 的证明可以直接得出, 具体见下.

定理 4.1 的证明 从引理 4.5 可知, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的所有特征值均是实的. 由于矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 相似于 $\tilde{\mathbf{A}}_M$, 所以, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的所有特征值都是实的. 从引理 4.1 和 4.2–4.4 可知, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的每个对角块都是可实对角化的. 且引理 4.6 指出矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的每个对角块的每个特征向量均可以正规延拓为 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的一个特征向量. 使用引理 4.1 可以直接得到 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是可实对角化的. 证毕. $\square$

此外, 记 $\mathbf{R} = (R_\alpha)^T \in \mathbb{R}^N$ 为 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的特征向量, 其中 R_α 是按 α 的字典序排列 (与 $\mathbf{w}'$ 中元素排列方式一致), 特别地, $\mathbf{R}$ 的第一个元素为 R_0 . 则 $\mathbf{P}\mathbf{R}$ 是 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征向量, 其中 $\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{w}' = \mathbf{P}\mathbf{w}$. 使用引理 4.6, 我们可以得到下述结论. 该结论在第 5 节中分析矩系统的 Riemann 问题时将会用到.

推论 4.1 记 $\mathbf{R} \neq 0$ 为矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $\lambda R_0 \neq 0$ 当且仅当 $\hat{H}e^{[\theta_{11}]}_{M+1}(\lambda) = 0$ 且 $\lambda \neq 0$, 其中 $\hat{H}e^{[\theta_{11}]}_{M+1}(\lambda)$ 是矩阵 $\tilde{\hat{A}}_0$ 的特征多项式.

证明 记 $\mathbf{r} = (R_0, R_{e_1}, \dots, R_{Me_1})^T \in \mathbb{R}^{M+1}$. 因为 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 是分块下三角矩阵, 且第一个对角块为 $\tilde{\hat{A}}_0$, 所以, $\tilde{\hat{A}}_0 \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$.

“ $\Rightarrow$ ” 因为 $R_0 \neq 0$ 且 $\lambda \neq 0$, 所以, $\mathbf{r} \neq 0$ 是 $\tilde{\hat{A}}_0$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 即 $\hat{H}e^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$. 因此, 我们有 $\hat{H}e^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$ 且 $\lambda \neq 0$.

“ $\Leftarrow$ ” $\hat{H}e^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$ 且 $\lambda \neq 0$ 意味着 λ 是 $\tilde{\hat{A}}_0$ 的特征值. 由于 $\tilde{\hat{A}}_0$ 的每个非零特征值是 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的单重特征值, 所以, $\mathbf{r} \neq 0$. 由 (3.10) 可知, $R_0 \neq 0$, 所以, $R_0 \lambda \neq 0$. $\square$

4.2 多维空间情形

本节考虑 M 阶双曲正则化矩系统. 这里不再假设 f 与 $x_2, \dots, x_D$ 无关, 而是考虑多维空间情形. 此时, 第 2 节中的无碰撞情形下矩系统可写成

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{A}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} = 0, \quad (4.15)$$

其中 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{A}_M^{(d)}$, $d = 1, \dots, D$ 的定义与 (3.7) 中相同. 特别地, $\mathbf{A}_M^{(1)}$ 就是第 3.1, 3.2 和 4.1 小节中讨论的 $\mathbf{A}_M$. 类似于定义 4.2, 我们给出如下正则化的定义.

定义 4.4 $\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}$, $d = 1, \dots, D$ 称为 $\mathbf{A}_M^{(d)}$ 正则化矩阵, 若对于任意可行的 $\mathbf{w}$, 均有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} &= \mathbf{A}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} - \sum_{|\alpha|=M} (\alpha_d + 1) \left(\sum_{i=1}^D f_{\alpha+e_d-e_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha+e_d-e_i-e_j}}{2\rho} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_d} - \theta_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_d} \right) \right) \mathbf{I}_{N_D(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中 $\mathbf{I}_k$ 是 $N \times N$ 单位矩阵的第 k 列.

多维正则化矩系统可写为

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} = 0. \quad (4.17)$$

回顾 $\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}$ 的定义和一维空间下正则化无碰撞矩系统 (4.5), 我们可以将该正则化矩系统写成

$$\begin{aligned} \frac{Df_\alpha}{Dt} &+ \sum_{d,k=1}^D \left(\theta_{dk} \frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_k + 1) \delta_{kd} \frac{\partial f_{\alpha+e_k}}{\partial x_d} \right) + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} \\ &+ \sum_{i,d,k=1}^D (\theta_{dk} f_{\alpha-e_i-e_k} + (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_k + 1) \delta_{kd} f_{\alpha-e_i+e_k}) \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \\ &+ \sum_{i,j,d,k=1}^D \frac{1}{2} (\theta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j-e_k} + (1 - \delta_{|\alpha|,M})(\alpha_k + 1) \delta_{kd} f_{\alpha-e_i-e_j+e_k}) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} = 0, \quad |\alpha| \leq M. \end{aligned} \quad (4.18)$$

事实上, (4.18) 可直接在原矩方程组 (2.10) 上作正则化得到. 由于矩系统 (3.7) 是由 (2.10) 通过消去 u_d 和 θ_{ij} 的随体导数而得到的, 所以必存在一个可逆矩阵 $\mathbf{T}(\mathbf{w})$, 使得该正则化矩系统等价于下面的

系统:

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) \frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{T}(\mathbf{w}) \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} = 0. \quad (4.19)$$

下面的定理表明, 多维正则化矩系统 (4.17) 是全局双曲的 (对于多维系统, 双曲性的定义参见文献 [23]).

定理 4.2 正则化矩系统 (4.17) 对于任意可行的 $\mathbf{w}$ 是双曲的. 准确地讲, 对于给定单位向量 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D)$, 存在一个仅依赖 $\mathbf{n}$ 的常数矩阵 $\mathbf{Z}$ 使得

$$\sum_{d=1}^D n_d \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}(\mathbf{w}) = \mathbf{Z}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_M^{(1)}(\mathbf{Z}\mathbf{w}) \mathbf{Z}, \quad (4.20)$$

且该矩阵是可实对角化的, 特征值分别为

$$C_{n,m} \sqrt{\mathbf{n}^T \Theta \mathbf{n}}, \quad 1 \leq n \leq m \leq M+1. \quad (4.21)$$

事实上, 该定理给出了正则化矩系统 (4.17) 的旋转不变性和全局双曲性. 从性质 3.1 可知该正则化矩系统的平移不变性, 所以, 正则化矩系统是 Galileo 变换不变的. 若选取另外一组坐标系 $(x_1^*, \dots, x_D^*)$, 记坐标轴 x_1^* 在原坐标系的方向为 $\mathbf{n}$, 则在新坐标系下旋转后的矩系统与原系统等价. 矩系统的旋转不变性是非常符合直觉的: 一方面, 在截断时, 我们使用的是完全的 M 次多项式; 另一方面, 正则化本身在各个方向具有很好的对称性. 下面给出上述定理的一个严格证明.

记 $\mathbf{G} = (g_{ij})_{D \times D}$ 为旋转矩阵, 则 $\mathbf{G}$ 是正交的且行列式为 1. 记

$$x_i^* = \sum_{j=1}^D g_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, D, \quad (4.22)$$

并用 ρ^* , $\mathbf{u}^*$ 和 Θ^* 分布表示新坐标系 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_D^*)$ 下的密度、速度和问题. 记 $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{G}\boldsymbol{\xi}$, 则由 $\mathbf{G}$ 的正交性可得

$$\rho^* = \int_{\mathbb{R}^D} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}^* = \int_{\mathbb{R}^D} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \rho, \quad (4.23a)$$

$$\rho^* \mathbf{u}^* = \int_{\mathbb{R}^D} \boldsymbol{\xi}^* f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}^* = \int_{\mathbb{R}^D} \mathbf{G}\boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \rho \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (4.23b)$$

$$\rho^* \theta_{ij}^* = \int_{\mathbb{R}^D} \xi_i^* \xi_j^* f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}^* = \int_{\mathbb{R}^D} \sum_{k,l=1}^D g_{ik} \xi_k g_{jl} \xi_l f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \sum_{k,l=1}^D g_{ik} g_{jl} \theta_{kl}, \quad (4.23c)$$

简单化简可得

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad \Theta^* = \mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T. \quad (4.24)$$

考虑两个展开

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} f_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} f_\alpha^* \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta^*]}(\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{u}^*). \quad (4.25)$$

我们有下面的结论.

引理 4.7 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在一组常数 Q_β^β , $|\alpha| = |\beta| = m$, 使得对于任意 $|\alpha| = m$, 均有

$$\frac{D^* f_\alpha^*}{D^* t} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i}^* \frac{D^* u_i^*}{D^* t} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}^*}{2} \frac{D^* \theta_{ij}^*}{D^* t}$$

$$= \sum_{|\beta|=|\alpha|} Q_{\beta}^{\alpha} \left(\frac{Df_{\alpha}}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \right), \quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{d,k=1}^D \theta_{dk}^* \left(\frac{\partial f_{\alpha-e_k}^*}{\partial x_d^*} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i-e_k}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_d^*} + \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} f_{\alpha-e_i-e_j}^* \frac{\partial \theta_{ij}^*}{\partial x_d^*} \right) \\ &= \sum_{|\beta|=|\alpha|} Q_{\beta}^{\alpha} \left(\sum_{d,k=1}^D \theta_{dk} \left(\frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i-e_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} f_{\alpha-e_i-e_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.26b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^D (\alpha_d + 1) \left(\frac{\partial f_{\alpha+e_d}^*}{\partial x_d^*} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i+e_d}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_d^*} + \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} f_{\alpha-e_i-e_j+e_d}^* \frac{\partial \theta_{ij}^*}{\partial x_d^*} \right) \\ & \sum_{|\beta|=|\alpha|} Q_{\beta}^{\alpha} \left(\sum_{d=1}^D (\alpha_d + 1) \left(\frac{\partial f_{\alpha+e_d}}{\partial x_d} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i+e_d} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} + \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} f_{\alpha-e_i-e_j+e_d} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.26c)$$

其中 $\frac{D^*}{Dt}$ 定义为 $\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{d=1}^D u_d^* \frac{\partial}{\partial x_d^*}$.

证明 由于 $\mathbf{u}^* = \mathbf{G}\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}\mathbf{x}$, 且 $\mathbf{G}$ 是正交矩阵, 所以,

$$\sum_{d=1}^D u_d^* \frac{\partial}{\partial x_d^*} = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^D g_{di} u_i \sum_{j=1}^D g_{dj} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^D \delta_{ij} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{d=1}^D u_d \frac{\partial}{\partial x_d}.$$

第二个等号中使用了 $\sum_{d=1}^D g_{id} g_{jd} = \delta_{ij}$. 所以,

$$\frac{D^*}{Dt} = \frac{D}{Dt}.$$

由于

$$\frac{Df(\boldsymbol{\xi})}{Dt} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \left(\frac{Df_{\alpha}}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \right) \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}),$$

考虑到分布函数展开 (4.25), 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \left(\frac{Df_{\alpha}}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \right) \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \left(\frac{Df_{\alpha}^*}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i}^* \frac{Du_i^*}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}^*}{2} \frac{D\theta_{ij}^*}{Dt} \right) \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta^*]}(\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{u}^*). \end{aligned} \quad (4.27)$$

由广义 Hermite 多项式的旋转关系式 (A.21) 可知, 存在一组常数 Q_{α}^{β} , $|\alpha| = |\beta|$ 使得

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta|=|\alpha|} Q_{\alpha}^{\beta} \mathcal{H}_{\alpha}^{[\mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}) \quad (4.28)$$

成立, 且矩阵 $(Q_{\alpha}^{\beta})_{|\alpha|=|\beta|=m}$ 是非奇异的. 将 (4.28) 代入 (4.27) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \sum_{|\beta|=|\alpha|} \left(\frac{Df_{\alpha}}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i} \frac{Du_i}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}}{2} \frac{D\theta_{ij}}{Dt} \right) Q_{\alpha}^{\beta} \mathcal{H}_{\beta}^{[\Theta^*]}(\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{u}^*) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \left(\frac{Df_{\alpha}^*}{Dt} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i}^* \frac{Du_i^*}{Dt} + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_i-e_j}^*}{2} \frac{D\theta_{ij}^*}{Dt} \right) \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta^*]}(\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{u}^*). \end{aligned}$$

比较 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta^*]}(\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{u}^*)$ 系数即可得 (4.26a).

同理, 由于 $\Theta^* = \mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^D (\xi_d^* - u_d^*) \frac{\partial \cdot}{\partial x_d^*} &= \sum_{d,i,j=1}^D g_{id}(\xi_i - u_i) g_{jd} \frac{\partial \cdot}{\partial x_j} = \sum_{d=1}^D (\xi_d - u_d) \frac{\partial \cdot}{\partial x_d}, \\ \sum_{k,d=1}^D \theta_{kd}^* \frac{\partial}{\partial \xi_k^*} \frac{\partial \cdot}{\partial x_d^*} &= \sum_{k,d,i,j=1}^D g_{ki} \theta_{ij} g_{dj} g_{ki} \frac{\partial}{\partial \xi_i} g_{dj} \frac{\partial \cdot}{\partial x_j} = \sum_{k,d=1}^D \theta_{kd} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \cdot}{\partial x_d}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{k,d=1}^D \theta_{kd} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_d} &= - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \sum_{k,d=1}^D \theta_{kd} \left(\frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_k-e_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_k-e_i-e_j}}{2} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \right) \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}),\end{aligned}\quad (4.29)$$

使用与证明 (4.26a) 相同的方法可得 (4.26b).

对于算子 $\sum_{d=1}^D (\xi_d - u_d) \frac{\partial \cdot}{\partial x_d}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^D (\xi_d - u_d) \frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_d} &= - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^D} \left(\sum_{k,d=1}^D \theta_{kd} \left(\frac{\partial f_{\alpha-e_k}}{\partial x_d} + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_k-e_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha-e_k-e_i-e_j}}{2} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_d} \right) \sum_{d=1}^D (\alpha_d + 1) \left(\frac{\partial f_{\alpha+e_d}^*}{\partial x_d^*} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^D f_{\alpha-e_i+e_d}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_d^*} + \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} f_{\alpha-e_i-e_j+e_d}^* \frac{\partial \theta_{ij}^*}{\partial x_d^*} \right) \right) \mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}).\end{aligned}$$

注意到第二行和 (4.29) 右端项中 $\mathcal{H}^{[\Theta]}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})_\alpha$ 的系数相同, 使用与证明 (4.26a) 相同的方法可证 (4.26c) 成立. $\square$

定理 4.2 的证明 因为 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D)$ 为单位向量, 我们选取正交矩阵 $\mathbf{G} = (g_{ij})_{D \times D}$ 满足第一行为 $(n_1, \dots, n_D)$. 使用该旋转矩阵, 我们按照 (4.23) 和 (4.25) 中的形式定义 $\mathbf{w}^*$, 则 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{w}^*$ 是线性的. 所以存在一个仅依赖于 $\mathbf{G}$ 的矩阵 $\mathbf{Z}$ 使得

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{Z}\mathbf{w}.$$

由于 $\mathbf{w}$ 可通过在 $\mathbf{w}^*$ 作用旋转矩阵 $\mathbf{G}^{-1}$ 而获得, 所以, $\mathbf{Z}$ 是可逆的.

引理 4.7 表明, 旋转后的矩系统

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}^*) \frac{D\mathbf{w}^*}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{T}(\mathbf{w}^*) \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}(\mathbf{w}^*) \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial x_d^*} = 0 \quad (4.30)$$

可以由 (4.19) 通过一个线性变化获得. 所以存在一个方阵 $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ 使得

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathbf{T}(\mathbf{w}) \frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathbf{T}(\mathbf{w}) \tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_d} = 0 \quad (4.31)$$

等价于 (4.30). 匹配时间导数项, 可以得出 $\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\mathbf{Z}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w})$. 因此, (4.31) 可以写成

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\frac{D\mathbf{w}^*}{Dt} + \sum_{d=1}^D \mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}(\mathbf{w})\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_d} = 0.$$

注意到 $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}\mathbf{x}$, 我们还可以进一步化简上式为

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\frac{D\mathbf{w}^*}{Dt} + \sum_{j,d=1}^D g_{jd}\mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}(\mathbf{w})\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_j^*} = 0.$$

将上式与 (4.30) 比较可得

$$\sum_{d=1}^D g_{1d}\mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{w}^*)\tilde{\mathbf{A}}_M^{(1)}(\mathbf{Z}\mathbf{w})\mathbf{Z}.$$

将上式两边同时乘以 $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{w}^*)^{-1}$, 并注意到 $g_{1d} = n_d$, 便得到 (4.20).

因为宏观温度张量满足 $\Theta^* = \mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T$ (见 (4.23)), 特别地, $\theta_{11}^* = \sum_{i,j=1}^D n_i n_j \theta_{ij}$, 定理中的实对角化性和 (4.21) 可由定理 4.1 和引理 4.5 直接得出. $\square$

5 Riemann 问题

尽管正则化矩系统 (4.17) 可以是任意 M 阶, 方程组形式非常复杂, 但系数矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M^{(d)}$ 的特征值和特征向量均可显式写出. 这使得我们能够研究 Riemann 初值下稀疏波、接触间断、激波这些基本波的结构. 可以肯定的是, 对基本波结构的分析对于进一步研究矩系统解的行为和构造 Godunov 型 Riemann 解子有本质的意义. 下面的研究表明, Riemann 初值的基本波的结构可以看成是 Euler 方程组的基本波结构的自然推广, 所以, 该正则化矩系统 (4.17) 是对 Boltzmann 方程一个非常自然合理的高阶矩逼近模型. 类似于 Euler 方程组 Riemann 问题的分析 (详见文献 [24]), 我们考虑如下 x_1 分裂的 D 维 Riemann 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + (u_1\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_M)\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_1} = 0, \\ \mathbf{w}(x_1, t=0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{若 } x_1 < 0, \\ \mathbf{w}_R, & \text{若 } x_1 > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 是 4.2 中定义 $\tilde{\mathbf{A}}_M^{(1)}$ 的简写.

下面先回顾一下矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的性质. $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征多项式是引理 4.5 定义的 $\mathcal{P}_{D,M}(\lambda)$, 因此, 若 $D \geq 2$, $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征值是 $C_{i,m}\sqrt{\theta_{11}}$ (不计重数), $i = 1, \dots, m$, $m = 1, \dots, M+1$; 若 $D = 1$, 则是 $C_{i,M+1}\sqrt{\theta_{11}}$, $i = 1, \dots, M+1$. 对于 $\tilde{\mathbf{A}}_M'$ 的特征对 $(\lambda, \mathbf{R})$ ($\mathbf{R}$ 是通过引理 4.6 的方法延拓而得), $(\lambda, \mathbf{P}\mathbf{R})$ ($\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{P}\mathbf{w} = \mathbf{w}'$) 是矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征对. 性质 4.1 指出 $\lambda R_0 \neq 0$ 当且仅当 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$, $\lambda \neq 0$. 所以, 对于矩阵 $u_1\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_M$,

(1) 特征多项式是 $\mathcal{P}_{D,M}(\lambda - u_1)$.

(2) 当 $D \geq 2$ 时, 特征值为 $u_1 + C_{i,m}\sqrt{\theta_{11}}$ (不计重数), $i = 1, \dots, m$, $m = 1, \dots, M+1$; 当 $D = 1$ 时, 特征值为 $u_1 + C_{i,M+1}\sqrt{\theta_{11}}$, $i = 1, \dots, M+1$.

(3) 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的每个特征对 $(\lambda, \mathbf{R})$ 也必是该矩阵的特征对. 特别地,

$$R_{e_1} = \frac{\lambda - u_1}{\rho} R_0, \quad R_{2e_1} = \frac{(\lambda - u_1)^2}{2} R_0.$$

(4) 特征对 $(\lambda, \mathbf{R})$ 满足

$$(\lambda - u_1)R_0 \neq 0 \quad \text{当且仅当} \quad He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda - u_1) = 0 \text{ 且 } \lambda - u_1 \neq 0. \quad (5.2)$$

由于矩阵 $u_1 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征值和特征向量均已清楚, 我们可以通过直接计算获得下述结论.

定理 5.1 Riemann 问题 (5.1) 的每个特征域要么是线性退化的, 要么是严格非线性的, 且一个特征域是严格非线性的当且仅当特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$.

证明 记 $\mathbf{R}$ 为矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 对应于特征值 $C\sqrt{\theta_{11}}$ 的特征向量, 则 $\mathbf{PR}$ 是矩阵 $u_1 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_M$ 对应于特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 的特征向量. 由于

$$\lambda = u_1 + C\sqrt{\frac{p_{11}}{\rho}}$$

仅依赖于 ρ, u_1 和 $p_{11}/2$, 所以,

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda \cdot \mathbf{R} = -\frac{C\sqrt{\theta_{11}}}{2\rho} \cdot R_0 + 1 \cdot \frac{C\sqrt{\theta_{11}}}{\rho} R_0 + \frac{C}{\rho\sqrt{\theta_{11}}} \cdot \frac{C^2\theta_{11}}{2} R_0 = \frac{(C^2 + 1)\sqrt{\theta_{11}}}{2\rho} C R_0.$$

(5.2) 表明,

(1) 若 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$, 则 $C\sqrt{\theta_{11}}R_0 \neq 0$, 进而 $\nabla_{\mathbf{w}} \lambda \cdot \mathbf{R} \equiv 0$. 所以, 该特征域是线性退化的.

(2) 若 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) \neq 0$ 或 $C = 0$, 则 $C\sqrt{\theta_{11}}R_0 = 0$, 进而 $\nabla_{\mathbf{w}} \lambda \cdot \mathbf{R} \neq 0$. 所以, 该特征域是严格非线性的.

证毕. $\square$

上述定理表明, 对应于特征值 λ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda - u_1) \neq 0$ 或 $\lambda - u_1 = 0$ 的波是接触间断, 对应于特征值 λ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda - u_1) = 0$ 且 $\lambda - u_1 \neq 0$ 的波是稀疏波或激波. 但很难预先判定解中会有哪些波及每个波是什么类型的波. 下面详细研究每种类型的波的特征.

5.1 稀疏波

对于 Riemann 问题 (5.1), 考虑两个状态 $\mathbf{w}^L$ 和 $\mathbf{w}^R$ 通过一个稀疏波连接. 不妨设该稀疏波对应于严格非线性特征域 $\mathbf{R}$, 该向量为矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 对应于特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$ 的特征向量. 则该波必满足下面两个条件:

(1) 积分曲线: $\tilde{\mathbf{w}}(\zeta) = (\tilde{w}_1(\zeta), \tilde{w}_2(\zeta), \dots, \tilde{w}_N(\zeta))$ 满足 N 维空间中积分曲线

$$\frac{d\tilde{\mathbf{w}}(\zeta)}{d\zeta} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{w}}); \quad (5.3)$$

(2) 特征速度满足

$$\lambda^L = u_1^L + C\sqrt{\theta_{11}^L} < u_1^R + C\sqrt{\theta_{11}^R} = \lambda^R. \quad (5.4)$$

事实上, 对于给定相空间中任意一点 $\mathbf{w}^0$, 可以算出通过 $\mathbf{w}^0$ 的积分曲线. 由于该结果过于繁琐, 这里仅显式给出分布积分曲线如下: 对于对应于特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 特征域 $\mathbf{R}$,

(1) 若 $R_0 \neq 0$, 记 $R_0 = \rho$, 则 $R_{e_1} = C\sqrt{\theta_{11}}$, $R_{2e_1} = \frac{C^2}{2}p_{11}$, 且进一步可得

$$\tilde{\rho}(\zeta) = \rho^0 \exp(\zeta), \quad (5.5a)$$

$$\tilde{u}_1(\zeta) = u_1^0 + \frac{2C}{C^2-1} \sqrt{\theta_{11}^0} \left(\exp\left(\frac{C^2-1}{2}\zeta\right) - 1 \right), \quad (5.5b)$$

$$\tilde{p}_{11} = p_{11}^0 \exp(C^2\zeta), \quad (5.5c)$$

其中 $\theta_{11}^0 = p_{11}^0/\rho^0$;

(2) 若 $R_0 = 0$, 则 $R_{e_1} = R_{2e_1} = 0$, 进一步可得

$$\tilde{\rho}(\zeta) = \rho^0, \quad \tilde{u}_1(\zeta) = u_1^0, \quad \tilde{p}_{11}(\zeta) = p_{11}^0. \quad (5.6)$$

容易验证 (5.5) 和 (5.6) 均满足 (5.3). 对于稀疏波, 特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$, 所以, $R_0 \neq 0$, 且 $\tilde{\mathbf{A}}_M(\tilde{\mathbf{w}}(\zeta))$ 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{\mathbf{w}}(\zeta)) &= \tilde{u}_1(\zeta) + C \sqrt{\frac{\tilde{p}_{11}(\zeta)}{\tilde{\rho}(\zeta)}} \\ &= u_1^0 + \frac{2C}{C^2-1} \sqrt{\theta_{11}^0} \left(\exp\left(\frac{C^2-1}{2}\zeta\right) - 1 \right) + C \sqrt{\frac{p_{11}^0 \exp(C^2\zeta)}{\rho^0 \exp(\zeta)}} \\ &= \lambda(\mathbf{w}^0) + 2C \frac{C^2+1}{C^2-1} \sqrt{\theta_{11}^0} \left(\exp\left(\frac{C^2-1}{2}\zeta\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

容易看出, 对于任意 $C \in \mathbb{R}$, $\frac{C^2+1}{C^2-1} \sqrt{\theta_{11}^0} (\exp(\frac{C^2-1}{2}\zeta) - 1)$ 的符号与 ζ 一样, 所以, $\lambda(\tilde{\mathbf{w}}) \geq \lambda(\mathbf{w}^0)$ 当且仅当 $C\zeta \geq 0$. 注意到 (5.4), 我们有: 对于稀疏波 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$, 并有 (1) 若 $C > 0$, 则 $u_1^L < u_1^R$, $p_{11}^L < p_{11}^R$; (2) 若 $C < 0$, 则 $u_1^L < u_1^R$, $p_{11}^L > p_{11}^R$.

5.2 接触间断

定理 5.1 的证明指出, 接触间断对应且只对应于特征对 $(\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}, \mathbf{R})$ 满足 $CR_0 = 0$ 的情形. 对于接触间断, (5.3) 依然成立. 特征速度的关系变成

$$\lambda(\mathbf{w}^L) = \lambda(\mathbf{w}^R). \quad (5.7)$$

若 $C \neq 0$, 则 $R_0 = 0$, 从 (5.6) 可知, $u_1^L = u_1^R$, $p_{11}^L = p_{11}^R$. 若 $C = 0$, 则从 (5.5) 和 (5.6) 可知上式依然成立.

综上, 我们得出对于接触间断必有 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) \neq 0$ 或 $C = 0$, 并且

$$u_1^L = u_1^R, \quad p_{11}^L = p_{11}^R.$$

5.3 激波

众所周知, 激波的跳跃条件依赖于双曲守恒律的性质, 因此在讨论激波之前, 我们把拟线性的正则化矩系统 (5.1) 重新写成便于分析的形式. 但是, 由于正则化改变了 f_α , $|\alpha| = M$ 的控制方程中的一些项, 导致矩系统 (5.1) 并不能写成守恒律的形式. 不过由于只有 f_α , $|\alpha| = M$ 的控制方程被修订, 其余的从 0 阶到 $M-1$ 阶的物理量依然保持守恒. 因此, 矩系统 (5.1) 可以写成 $\mathcal{N}_D((M-1)e_D)$ 守恒方程和 $N - \mathcal{N}_D((M-1)e_D)$ 非守恒方程.

记

$$\mathbf{F} = (F_0, F_{e_1}, \dots, F_{e_D}, F_{2e_1}, \dots, F_{Me_D})^T, \quad F_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^D} \xi^D f d\xi, \quad |\alpha| \leq M, \quad (5.8)$$

其中 $\xi^\alpha = \prod_{d=1}^D \xi_d^{\alpha_d}$, F_0 代表 $F_\alpha|_{\alpha=0}$, 则 (5.1) 可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + (\alpha_1 + 1) \frac{\partial F_{\alpha+e_1}}{\partial x_1} &= 0, \quad |\alpha| < M, \\ \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + (\alpha_1 + 1) \frac{\partial F_{\alpha+e_1} - f_{\alpha+e_1}}{\partial x_1} - (\alpha_1 + 1) \left(\sum_{i=1}^D f_{\alpha+e_1-e_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^D \frac{f_{\alpha+e_1-e_i-e_j}}{2\rho} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_1} - \theta_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) \right) = 0, \quad |\alpha| = M. \end{aligned} \quad (5.9)$$

从广义 Hermite 多项式的积分关系 (A.14) 和拟正交关系 (A.11) 可得存在函数 g_α 使得

$$F_\alpha = f_\alpha + g_\alpha(f_0, u_i, p_{ij}, f_\beta \mid |\beta| < |\alpha|).$$

特别地, 对于 $|\alpha| = M$ 有 $F_{\alpha+e_1} - f_{\alpha+e_1}$ 仅依赖于 $\mathbf{F}$, 且

$$\rho = F_0, \quad u_i = \frac{F_{e_i}}{\rho}, \quad p_{ij} = (1 + \delta_{ij})F_{e_i+e_j} - \frac{F_{e_i}F_{e_j}}{F_0}.$$

为方便起见, 拟线性矩方程组 (5.9) 可写成

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{F}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} = 0, \quad (5.10)$$

其中 $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{F})$ 是由 (5.9) 确定的 $N \times N$ 矩阵.

由于 (5.10) 不是守恒律, 所以, 我们需要使用 DLM (Dal Maso-LeFloch-Murat) 理论^[25] 来研究激波结构. 考虑一个单激波, 对应于非线性域 $\mathbf{R}$, 对应于矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(C\sqrt{\theta_{11}}) = 0$ 且 $C \neq 0$, 左右两端状态分别为 $\mathbf{F}^L$ 和 $\mathbf{F}^R$. 激波传播速度记为 S . 则该激波必满足下面两个条件:

(1) 广义 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\int_0^1 [S\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}(\Phi(\nu; \mathbf{F}^L, \mathbf{F}^R))] \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu; \mathbf{F}^L, \mathbf{F}^R) d\nu = 0, \quad (5.11)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 $N \times N$ 单位矩阵, $\Phi(\nu; \mathbf{F}^L, \mathbf{F}^R)$ 是局部 Lipschitz 映射, 且满足

$$\Phi(0; \mathbf{F}^L, \mathbf{F}^R) = \mathbf{F}^L, \quad \Phi(1; \mathbf{F}^L, \mathbf{F}^R) = \mathbf{F}^R.$$

具体理论细节详见文献 [25].

(2) 熵条件:

$$\lambda(\mathbf{F}^L) > S > \lambda(\mathbf{F}^R). \quad (5.12)$$

对于双曲守恒律, (5.11) 等价于经典的 Rankine-Hugoniot 条件, 因此, (5.11) 的前 $\mathcal{N}_D((M-1)e_D)$ 行不依赖于 Φ , 这使得我们可以在并不涉及 Φ 的情形下讨论激波的一些性质.

由于

$$F_0 = \rho, \quad F_{e_1} = \rho u_1, \quad F_{2e_1} = \frac{1}{2}(p_{11} + \rho u_1^2),$$

(5.11) 的前 $D+1$ 个等式为

$$\rho^L u_1^L - \rho^R u_1^R = S(\rho^L - \rho^R), \quad (5.13)$$

$$p_{11}^L + \rho^L (u_1^L)^2 - p_{11}^R - \rho^R (u_1^R)^2 = S(\rho^L u_1^L - \rho^R u_1^R). \quad (5.14)$$

我们首先断言 $\rho^L \neq \rho^R$. 否则, 若 $\rho^L = \rho^R$, 则从 (5.13) 可知 $u_1^L = u_1^R$, 并且从 (5.14) 可知 $p_{11}^L = p_{11}^R$. 进一步可得 $\lambda(\mathbf{F}^L) = \lambda(\mathbf{F}^R)$, 这与熵条件 (5.12) 矛盾. 基于该断言, 我们可以将 (5.13) 写成

$$S = \frac{\rho^L u_1^L - \rho^R u_1^R}{\rho^L - \rho^R}. \quad (5.15)$$

将 (5.15) 代入 (5.12), 并在方程两边同时乘以 $(\rho^L - \rho^R)^2$, 可得

$$\rho^L(\rho^L - \rho^R)(u_1^L - u_1^R) > C(\rho^L - \rho^R)^2 \sqrt{\theta_{11}^R}, \quad (5.16a)$$

$$\rho^R(\rho^L - \rho^R)(u_1^L - u_1^R) > C(\rho^L - \rho^R)^2 \sqrt{\theta_{11}^L}. \quad (5.16b)$$

若 $C > 0$, 由 (5.16a) 可得

$$(\rho^L - \rho^R)(u_1^L - u_1^R) > 0. \quad (5.17)$$

因此, (5.16) 两边同时除以 $(\rho^L - \rho^R)(u_1^L - u_1^R)$ 可得

$$\frac{\rho^L}{\sqrt{\theta_{11}^R}} > \frac{C(\rho^L - \rho^R)}{u_1^L - u_1^R} > \frac{\rho^R}{\sqrt{\theta_{11}^L}}.$$

直接计算可得

$$\rho^L p_{11}^L - \rho^R p_{11}^R > 0. \quad (5.18)$$

类似地, 若 $C < 0$, 我们有

$$(\rho^L - \rho^R)(u_1^L - u_1^R) < 0, \quad \rho^L p_{11}^L - \rho^R p_{11}^R < 0. \quad (5.19)$$

若 $S \neq 0$, 则 $u_1^L \neq u_1^R$, 进一步, (5.13) 和 (5.14) 可整理为

$$(\rho^L - \rho^R)(p_{11}^L - p_{11}^R) = \rho^L \rho^R (u_1^L - u_1^R)^2 > 0. \quad (5.20)$$

若 $S = 0$, 则 (5.13) 可 (5.14) 可整理为 $p_{11}^L - p_{11}^R + \frac{\rho^R}{\rho^L} (u_1^R)^2 (\rho^R - \rho^L) = 0$, 因此,

$$(\rho^L - \rho^R)(p_{11}^L - p_{11}^R) > 0. \quad (5.21)$$

考虑 (5.20) 和 (5.21), 我们可知, 下面两个条件必有一个成立:

(1) $\rho^L > \rho^R$ 且 $p_{11}^L > p_{11}^R$;

(2) $\rho^L < \rho^R$ 且 $p_{11}^L < p_{11}^R$.

若 $C > 0$, 从 (5.18) 可知第一种情形成立. 使用 (5.17) 可知 $u_1^L > u_1^R$. 类似地, 若 $C < 0$, 则第二种情形成立且 $u_1^L > u_1^R$.

综合上述所有关于基本波的讨论, 我们可以得到如下结论.

定理 5.2 对于 Riemann 问题 (5.1), 对于对应于 $\tilde{\mathbf{A}}_M$ 的特征值 $\lambda = u_1 + C\sqrt{\theta_{11}}$ 的波, 波两边的宏观速度和压强与波的类型之间的关系如表 1 所示.

表 1 一个基本波两边的速度、压强和特征速度与波的类型之间的关系

波型	特征值	速度与压强
稀疏波	$C > 0$	$u_1^L < u_1^R, p_{11}^L < p_{11}^R$
	$C < 0$	$u_1^L < u_1^R, p_{11}^L > p_{11}^R$
激波	$C > 0$	$u_1^L > u_1^R, p^L > p^R$
	$C < 0$	$u_1^L > u_1^R, p^L < p^R$
接触间断	-	$u_1^L = u_1^R, p_{11}^L = p_{11}^R$

致谢 感谢审稿人详细阅读了本文并提出了宝贵意见.

参考文献

1 Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. *Comm Pure Appl Math*, 1949, 2: 331–407

2 Grad H. Note on N -dimensional Hermite polynomials. *Comm Pure Appl Math*, 1949, 2: 325–330

3 Müller I, Ruggeri T. *Rational Extended Thermodynamics*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998

4 Jin S, Slemrod M. Regularization of the Burnett equations via relaxation. *J Stat Phys*, 2001, 103: 1009–1033

5 Struchtrup H. Derivation of 13 moment equations for rarefied gas flow to second order accuracy for arbitrary interaction potentials. *Multiscale Model Simul*, 2005, 3: 221–243

6 Struchtrup H, Torrilhon M. Regularization of Grad’s 13 moment equations: Derivation and linear analysis. *Phys Fluids*, 2003 15: 2668–2680

7 Torrilhon M. Hyperbolic moment equations in kinetic gas theory based on multi-variate Pearson-IV-distributions. *Commun Comput Phys*, 2010, 7: 639–673

8 Jin S, Pareschi L, Slemrod M. A relaxation scheme for solving the Boltzmann equation based on the Chapman-Enskog expansion. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2002, 18: 37–62

9 Torrilhon M. Regularized 13-moment-equations. In: *Rarefied Gas Dynamics: 25th International Symposium*. Saint-Petersburg, 2006, 167–172

10 Cai Z N, Fan Y W, Li R. On hyperbolicity of 13-moment system. *Kinet Relat Models*, 2014, 7: 415–432

11 Cai Z, Fan Y, Li R. Globally hyperbolic regularization of Grad’s moment system. *Comm Pure Appl Math*, 2014, 67: 464–518

12 Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M. A model for collision processes in gases, I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys Rev*, 1954, 94: 511–525

13 Holway L H. New statistical models for kinetic theory: Methods of construction. *Phys Fluids*, 1966 9: 1658–1673

14 Cai Z, Li R. Numerical regularized moment method of arbitrary order for Boltzmann-BGK equation. *SIAM J Sci Comput*, 2010, 32: 2875–2907

15 Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1964

16 Cai Z, Li R, Wang Y. Numerical regularized moment method for high Mach number flow. *Commun Comput Phys*, 2012, 11: 1415–1438

17 Holway L H. Kinetic theory of shock structure using an ellipsoidal distribution function. In: *Rarefied Gas Dynamics*, vol. 1. Pittsburgh: Academic Press, 1966, 193–215

18 Cai Z, Fan Y, Li R. Globally hyperbolic regularization of Grad’s moment system in one dimensional space. *Commun Math Sci*, 2013, 11: 547–571

19 Demmel J W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 1997

20 Brown S L. Approximate Riemann solvers for moment models of dilute gases. PhD Thesis. New York: The University of Michigan, 1996

21 Suzuki Y, Van Leer B. Application of the 10-moment model to mems flows. In: *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper, vol. 1398. Reno: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005

22 Levermore C D. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *J Stat Phys*, 1996, 83: 1021–1065

23 LeVeque R J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002

24 Toro E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics—A Practical Introduction*. 3rd ed. New

- York: Springer, 2009
- 25 Dal Maso G, LeFloch P G, Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products. J Math Pures Appl, 1995, 74: 483–548
- 26 Mizrahi M M. Generalized Hermite polynomials. J Comput Appl Math, 1975, 1: 273–277
- 27 Petersen K B, Pedersen M S. The Matrix Cookbook. Copenhagen: Technical University of Denmark, 2006
- 28 Chihara T S. An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York: Gordon and Breach, 1978
- 29 García-Ferrero M, Gómez-Ullate D. Oscillation theorems for the wronskian of an arbitrary sequence of eigenfunctions of Schrödinger's equation. In: Letters in Mathematical Physics, vol. 105. Netherlands: Springer, 2015, 551–573

附录

附录 A 广义 Hermite 多项式

为简化 Grad 矩系统^[1]的推导过程, Grad 给出了一个关于 D 维概率型各向同性的 Hermite 多项式的说明文献 [2]. Maurice 和 Mizrahi^[26]给出过一个物理型的广义 Hermite 多项式的推导和基本性质研究. 在该附录中, 我们详细探讨概率型广义 Hermite 多项式, 以方便本文中矩方程组的推导.

附录 A.1 定义与符号约定

考虑 D 维归一化权函数

$$w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Theta)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Theta^{-1}\mathbf{x}\right), \quad \text{满足} \int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad (\text{A.1})$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$, $\Theta = (\theta_{ij}) \in \mathbb{R}^{D \times D}$ 是对称正定矩阵. 概率性广义 Hermite 多项式可定义为

$$He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{w^{[\Theta]}(\mathbf{x})} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} w^{[\Theta]}(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^D, \quad (\text{A.2})$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ 是 D 维多重指标, $|\alpha| = \sum_{d=1}^D \alpha_d$ 且 $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}}$ 定义为 $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_D^{\alpha_D}}$. 定义广义带权 Hermite 函数为

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^D. \quad (\text{A.3})$$

若 α 的任何一个元素为负, 我们约定 $He_{\alpha}^{[\Theta]}$ 和 $\mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}$ 为 0.

由于 Θ 是对称正定的 $D \times D$ 矩阵, 所以, Θ^{-1} 也是对称正定矩阵, 并记 $\Theta^{-1} = (\theta^{ij})$. 记 $\mathbf{X} = \Theta^{-1}\mathbf{x}$, i.e. $X_i = \sum_{j=1}^D \theta^{ij} x_j$, 则关于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{X}$ 的微分算子间有如下变换关系:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_D}\right)^T = \Theta^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_D}\right)^T. \quad (\text{A.4})$$

附录 A.2 广义 Hermite 多项式的性质

(1) 我们首先给出下述关系式:

$$\frac{\partial w^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) X_i, \quad \frac{\partial w^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial X_i} = -w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) x_i. \quad (\text{A.5})$$

证明 第一个式子显然成立. 第二个式子可由第一个式子和 (A.4) 直接得出. $\square$

(2) $He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})$ 的前几项为 $i, j, k, l = 1, \dots, D$,

$$He_0^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = 1, \quad (\text{A.6a})$$

$$He_{e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i, \quad (\text{A.6b})$$

$$He_{e_i+e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i X_j - \theta^{ij}, \quad (\text{A.6c})$$

$$He_{e_i+e_j+e_k}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i X_j X_k - \theta^{ij} X_k - \theta^{ik} X_j - \theta^{jk} X_i, \quad (\text{A.6d})$$

$$He_{e_i+e_j+e_k+e_l}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i X_j X_k X_l - \theta^{ij} X_k X_l - \theta^{ik} X_j X_l - \theta^{il} X_j X_k - \theta^{jk} X_i X_l \\ - \theta^{jl} X_i X_k - \theta^{kl} X_i X_j + \theta^{ij} \theta^{kl} + \theta^{ik} \theta^{jl} + \theta^{il} \theta^{jk}. \quad (\text{A.6e})$$

这里使用了 $\theta^{ij} = \theta^{ji}$. $e_i, i = 1, \dots, D$ 是 D 维单位多重指标, 即第 i 个元素为 1, 其余为 0.

(3) 递推关系 1: 对于 $i = 1, \dots, D$,

$$He_{\alpha+e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) - \frac{\partial He_{\alpha}^{[\Theta]}}{\partial x_i}. \quad (\text{A.7})$$

证明 考虑 $w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})$ 关于 $x_i, i = 1, \dots, D$ 的微分

$$\frac{\partial w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \frac{\partial He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - X_i w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \quad (\text{使用 (A.5)}) \\ = (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha+e_i}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha+e_i}} w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = -w^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\alpha+e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}), \quad (\text{使用 (A.2)})$$

并比较上述两行的右端项可得 (A.7). $\square$

(4) 微分关系:

$$\frac{\partial He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^D \theta^{ij} \alpha_j He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.8})$$

证明 我们使用数学归纳法进行证明.

第 1 步 由于 $He_0^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = 1$, 所以, (A.8) 对于 $\alpha = 0$ 显然成立.

第 2 步 假设 (A.8) 对于任意 $|\alpha| \leq n, n \in \mathbb{N}$ 成立. 从 (A.7) 可知, 对于任意 $0 < |\alpha| \leq n+1$,

$$He_{\alpha}^{[\Theta]} = X_j He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]} - \sum_{d=1}^D \theta^{jd} (\alpha_d - \delta_{jd}) He_{\alpha-e_j-e_d}^{[\Theta]},$$

其中 $j \in \{1, \dots, D\}$ 满足 $\alpha_j > 0$. 对于任意 $|\alpha| = n+1$, 肯定存在 $j \in \{1, \dots, D\}$ 使得 $\alpha_j > 0$. 对上式关于 $x_i, i = 1, \dots, D$ 求偏导可得

$$\frac{\partial He_{\alpha}^{[\Theta]}}{\partial x_i} = \frac{\partial X_j He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]}}{\partial x_i} - \sum_{d=1}^D \theta^{jd} (\alpha_d - \delta_{jd}) \frac{\partial He_{\alpha-e_j-e_d}^{[\Theta]}}{\partial x_i}.$$

进一步化简,

$$\frac{\partial X_j He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]}}{\partial x_i} = \theta^{ij} He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]} + X_j \sum_{d=1}^D \theta^{id} (\alpha_d - \delta_{jd}) He_{\alpha-e_j-e_d}^{[\Theta]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta^{ij} He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]} + \sum_{d=1}^D \theta^{id} (\alpha_d - \delta_{jd}) \left(He_{\alpha-e_d}^{[\Theta]} + \sum_{k=1}^D \theta^{jk} (\alpha_k - \delta_{jd} - \delta_{kd}) He_{\alpha-e_j-e_k-e_d}^{[\Theta]} \right) \\
 &= \sum_{d=1}^D \theta^{id} \alpha_d He_{\alpha-e_d}^{[\Theta]} + \sum_{d=1}^D \theta^{id} (\alpha_d - \delta_{jd}) \frac{\partial He_{\alpha-e_j-e_d}^{[\Theta]}}{\partial x_i}.
 \end{aligned}$$

因此, (A.8) 对于所有 $|\alpha| = n+1$ 均成立. 证毕. $\square$

(5) 递推关系 2: 结合 (A.7) 和 (A.8) 可得对于 $i = 1, \dots, D$,

$$He_{\alpha+e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^D \theta^{ij} \alpha_j He_{\alpha-e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.9})$$

更进一步可得对于 $d = 1, \dots, D$,

$$x_d He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^D \theta_{dj} He_{\alpha+e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) + \alpha_d He_{\alpha-e_d}^{[\Theta]}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.10})$$

证明 (A.9) 显然成立. 由于

$$x_d = \sum_{i=1}^D \theta_{id} X_i, \quad \sum_{i=1}^D \theta_{di} \theta_{ij} = \delta_{dj},$$

将 (A.9) 两端分别乘以 θ_{id} 并关于 i 从 1 到 D 求和可得 (A.10). $\square$

(6) 拟正交关系:

$$\int_{\mathbb{R}^D} He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\beta}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) w^{[\Theta]} d\mathbf{x} = C_{\alpha,\beta} \delta_{|\alpha|,|\beta|}, \quad (\text{A.11})$$

其中 $C_{\alpha,\beta}$ 是依赖于 α, β 和 Θ 的常数.

证明 显然, (A.11) 对于 $\alpha = \beta = 0$ 成立, 且 $C_{0,0} = 1$. 不失一般性, 我们假设 $0 < |\alpha| \geq |\beta|$ 且 $\alpha_1 > 0$. 由于

$$\frac{\partial w^{[\Theta]} He_{\alpha}^{[\Theta]}}{\partial x_i} = (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha+e_i}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha+e_i}} w^{[\Theta]} = -w^{[\Theta]} He_{\alpha+e_i}^{[\Theta]} \quad (\text{A.12})$$

对于 $i = 1, \dots, D$ 均成立, 对 $\int_{\mathbb{R}^D} He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\beta}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) w^{[\Theta]} d\mathbf{x}$ 使用分部积分可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^D} He_{\alpha}^{[\Theta]} He_{\beta}^{[\Theta]} w^{[\Theta]} d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^{D-1}} dx_2 \cdots dx_D \int_{\mathbb{R}} He_{\beta}^{[\Theta]} d(w^{[\Theta]} He_{\alpha-e_1}^{[\Theta]}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]} He_{\alpha-e_1}^{[\Theta]} \sum_{j=1}^D \theta^{1j} \beta_j He_{\beta-e_j}^{[\Theta]} d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{j=1}^D \theta^{1j} \beta_j \int_{\mathbb{R}^D} He_{\alpha-e_1}^{[\Theta]} He_{\beta-e_j}^{[\Theta]} w^{[\Theta]} d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

上述计算中使用了 $\int_{\mathbb{R}^{D-1}} w^{[\Theta]} He_{\alpha-e_1}^{[\Theta]} He_{\beta}^{[\Theta]} dx_2 \cdots dx_D|_{-\infty}^{\infty} = 0$ 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^D$ 均成立的性质.

若 $|\alpha| > |\beta|$, 重复 (A.13) 中过程, 直到 $He_{\beta}^{[\Theta]}$ 的下标某个元素为负, 则可知

$$\int_{\mathbb{R}^D} He_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) He_{\beta}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) w^{[\Theta]} d\mathbf{x} = 0.$$

证毕. $\square$

(7) 积分关系: 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^D$ 且 $|\alpha| = |\beta|$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]} H e_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathbf{x}^{\beta} d\mathbf{x} = \alpha! \delta_{\alpha, \beta}, \quad (\text{A.14})$$

其中

$$\mathbf{x}^{\beta} = \prod_{d=1}^D x_d^{\beta_d}, \quad \delta_{\alpha, \beta} = \prod_{d=1}^D \delta_{\alpha_d, \beta_d},$$

$\mathbf{a}$ 为任意常向量.

证明 显然, (A.14) 对于 $\alpha = 0$ 成立. 不失一般性, 我们假设 $|\alpha| > 0$. 为方便起见, 记

$$C_{\alpha, \beta} = \int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]} H e_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathbf{x}^{\beta} d\mathbf{x}.$$

由于 $|\beta| > 0$, 必存在 $i \in \{1, \dots, D\}$ 使得 $\beta_i > 0$. 使用递推关系式 (A.10), 可得

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \beta} &= \int_{\mathbb{R}^D} w^{[\Theta]} H e_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathbf{x}^{\beta - e_i} (x_i - a_i + a_i) d\mathbf{x} \\ &= a_i C_{\alpha, \beta - e_i} + \sum_{d=1}^D \theta_{ij} C_{\alpha + e_j, \beta - e_i} + \alpha_i C_{\alpha - e_i, \beta - e_i}. \end{aligned}$$

广义 Hermite 多项式的拟正交性 (A.11) 蕴含着

$$C_{\alpha, \beta} = 0, \quad \text{若 } |\beta| < |\alpha|.$$

因此, 我们有

$$C_{\alpha, \beta} = \alpha_i C_{\alpha - e_i, \beta - e_i}.$$

又因为 $C_{0,0} = 1$, 关于 α 使用数学归纳法可证 (A.14) 成立. $\square$

附录 A.3 广义 Hermite 函数的性质

(1) 递推关系: 对于 $i = 1, \dots, D$,

$$\mathcal{H}_{\alpha + e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = X_i \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^D \theta^{ij} \alpha_j \mathcal{H}_{\alpha - e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.15})$$

$$x_d \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^D \theta_{jd} \mathcal{H}_{\alpha + e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) + \alpha_d \mathcal{H}_{\alpha - e_d}^{[\Theta]}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.16})$$

这两个关系式可以由 (A.9) 和 (A.10) 直接得出.

(2) 拟正交性:

$$\int_{\mathbb{R}^D} \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \mathcal{H}_{\beta}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \frac{1}{w^{[\Theta]}} d\mathbf{x} = C_{\alpha, \beta} \delta_{|\alpha|, |\beta|}, \quad (\text{A.17})$$

其中 $C_{\alpha, \beta}$ 的定义与 (A.11) 中相同. 该关系式可由 (A.11) 直接得出.

(3) 微分关系:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta]}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\mathcal{H}_{\alpha + e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d\mathcal{H}_{\alpha}^{[\Theta(\tau)]}(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau} = -\sum_{i=1}^D \mathcal{H}_{\alpha + e_i}^{[\Theta(\tau)]}(\mathbf{x}(\tau)) \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D \mathcal{H}_{\alpha + e_i + e_j}^{[\Theta(\tau)]}(\mathbf{x}(\tau)) \frac{d\theta_{ij}(\tau)}{d\tau}, \quad (\text{A.19})$$

证明 第一个关系式就是 (A.12). 在证明第二个关系式前, 我们先列出一些与矩阵微积分有关的结论 (详见文献 [27]). 对于对称正定矩阵 $\Theta(\tau) = (\theta_{ij}(\tau)) \in \mathbb{R}^{D \times D}$ 和 $\Theta^{-1} = (\theta^{ij}) = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(D)})$,

$$\frac{d\mathbf{x}^T \Theta^{-1} \mathbf{x}}{d\tau} = 2\mathbf{x}^T \Theta^{-1} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \mathbf{x}^T \frac{d\Theta^{-1}}{d\tau} \mathbf{x}, \quad (\text{A.20a})$$

$$\frac{d\Theta^{-1}(\tau)}{d\tau} = -\Theta^{-1} \frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} \Theta^{-1} = -\sum_{i,j=1}^D \theta^{(i)}(\theta^{(j)})^T \frac{d\theta_{ij}}{d\tau}, \quad (\text{A.20b})$$

$$\frac{d \ln(|\Theta|)}{d\tau} = \text{trace} \left(\Theta^{-1} \frac{d\Theta}{d\tau} \right) = \sum_{i,j=1}^D \theta^{ij} \frac{d\theta_{ij}}{d\tau}. \quad (\text{A.20c})$$

使用上述关系, 我们可得

$$\begin{aligned} \frac{dw^{[\Theta(\tau)]}(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau} &= w^{[\Theta]} \left(-\frac{1}{2} \frac{d \ln(|\Theta|)}{d\tau} - \Theta^{-1} \mathbf{x} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \frac{d\Theta^{-1}}{d\tau} \mathbf{x} \right) \\ &= w^{[\Theta]} \sum_{i,j=1}^D \left(-\frac{1}{2} \theta^{ij} \frac{d\theta_{ij}}{d\tau} - \theta^{ij} x_j \frac{dx_i}{d\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \theta^{(i)}(\theta^{(j)})^T \mathbf{x} \frac{d\theta_{ij}}{d\tau} \right) \\ &= -w^{[\Theta]} \sum_i H_{e_i}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\tau} + w^{[\Theta]} \sum_{i,j=1}^D \frac{1}{2} H_{e_i+e_j}^{[\Theta]}(\mathbf{x}) \frac{d\theta_{ij}}{d\tau}. \end{aligned}$$

这里使用了 (A.6b)、(A.6c) 和 (A.20). 由 $\mathcal{H}^{[\Theta]}$ 的定义 (A.3) 可知,

$$(-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathcal{H}_\beta^{[\Theta]}) = \mathcal{H}_{\alpha+\beta}^{[\Theta]},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}^{[\Theta]}}{d\tau} &= (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \frac{dw^{[\Theta]}}{d\tau} \\ &= -(-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^D \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathcal{H}_{e_i}^{[\Theta]} + (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D \frac{d\theta_{ij}}{d\tau} \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathcal{H}_{e_i+e_j}^{[\Theta]} \\ &= -\sum_{i=1}^D \mathcal{H}_{\alpha+e_i}^{[\Theta]} \frac{dx_i}{d\tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D \mathcal{H}_{\alpha+e_i+e_j} \frac{d\theta_{ij}}{d\tau}. \end{aligned}$$

证毕. □

(4) 旋转关系: 记 $\mathbf{G} = (g_{ij})_{D \times D}$ 为旋转矩阵, 即 $\mathbf{G}$ 正交且行列式为 1, 则存在一组仅依赖于 $\mathbf{G}$ 的常数 Q_α^β 使得

$$\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta|=|\alpha|} Q_\alpha^\beta \mathcal{H}_\beta^{[\mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}). \quad (\text{A.21})$$

若我们用 Q_α^β 构成一个矩阵 $(Q_\alpha^\beta)_{|\alpha|=|\beta|=m}$, 则该矩阵是非奇异的.

证明 定义线性空间

$$\mathcal{V}_m = \left\{ p(\mathbf{x}) w^{[\Theta]} \mid \int_{\mathbb{R}^D} p(\mathbf{x}) \mathcal{H}_\beta^{[\Theta]} d\mathbf{x} = 0, \forall |\beta| \neq m, p(\mathbf{x}) \text{ 多变量多项式} \right\}.$$

由拟线性关系 (A.17) 可知, $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{x})$, $|\alpha| = m$ 是 $\mathcal{V}_m$ 的一组基, 且 $\mathcal{V}_m$ 元素个数为

$$\mathcal{N}_D(m\mathbf{e}_D) - \mathcal{N}_D((m-1)\mathbf{e}_D).$$

所以, 我们只需证 $\mathcal{H}_\beta^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$ 也是 $\mathcal{V}_m$ 的一组基即可. 由于

$$w^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\Theta|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{G}\mathbf{x})^T(\mathbf{G}\Theta\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{x})\right) = w^{[\Theta]}(\mathbf{x}),$$

$\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$ 还可被定义为

$$\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial(\mathbf{G}\mathbf{x})} w^{[\Theta]}(\mathbf{x}).$$

这意味着 $\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$ 可由 $\mathcal{H}_\alpha^{[\Theta]}(\mathbf{x})$ 通过旋转得到, 因此, $\{\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})\}_{|\alpha|=m}$ 是线性无关的.

从拟线性关系 (A.17) 还可以得知, 对任意多维 $|\alpha|$ 次多项式 $p(\mathbf{x})$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} \mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

因此, $\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$ 正交于 $\mathcal{H}_\beta^{[\Theta]}(\mathbf{x})$, $|\beta| < |\alpha|$. 同理, $\mathcal{H}_\beta^{[\Theta]}(\mathbf{x})$, $|\beta| > |\alpha|$ 正交于 $\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$. 所以, 我们有 $\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_{|\alpha|}$.

综上, $\mathcal{H}_\alpha^{[G\Theta G^T]}(\mathbf{G}\mathbf{x})$, $|\alpha| = m$ 是 $\mathcal{V}_m$ 的一组基. 证毕. $\square$

附录 A.4 一维广义 Hermite 多项式的性质

本节研究一维广义 Hermite 多项式的性质. 此时矩阵 Θ 退化为标量 θ , Θ^{-1} 变成 $1/\theta$. 特别地, 当 $\theta = 1$ 时, 广义 Hermite 多项式 $He_n^{[\theta]}(x)$ 就是经典的 Hermite 多项式 $He_n(x)$. Hermite 多项式可定义为

$$He_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (\text{A.22})$$

且满足以下性质 (详见文献 [15]):

(1) 奇偶性:

$$He_n(-x) = (-1)^n He_n(x);$$

(2) 递推关系:

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(3) 正交关系:

$$\int_{\mathbb{R}} He_n(x) He_m(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi} m! \delta_{mn};$$

(4) 微分关系:

$$He_n(x)' = nHe_{n-1}(x).$$

由于一维广义 Hermite 多项式定义为

$$He_n^{[\theta]}(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2\theta}\right) \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), \quad (\text{A.23})$$

所以, 我们有

$$He^{[\Theta]}(x) = \theta^{-n/2} He_n\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right). \quad (\text{A.24})$$

所以, $He_n^{[\theta]}(x)$ 满足以下性质:

(1) 奇偶性:

$$He_n^{[\theta]}(-x) = (-1)^n He_n^{[\theta]}(x);$$

(2) 递推关系:

$$He_{n+1}^{[\theta]}(x) = \frac{x}{\theta} He_n^{[\theta]}(x) - \frac{n}{\theta} He_{n-1}^{[\theta]}(x), \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(3) 正交关系:

$$\int_{\mathbb{R}} He_n^{[\theta]}(x) He_m^{[\theta]}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi} \frac{m!}{\theta^m} \delta_{mn};$$

(4) 微分关系:

$$He_n(x)' = \frac{n}{\theta} He_{n-1}(x).$$

下面讨论 $He_n(x)$ 的根.

性质 A.1 (1) 若 n 是奇数, 则 0 是 $He_n(x)$ 的一个根;

(2) $He_n(x)$ 有 n 个互不相同的根;

(3) $He_n(x)$ 的任意两个相邻的根中间有且只有一个 $He_{n+1}(x)$ 的根;

(4) $He_n(x)$ 和 $He_{n+1}(x)$ 有公共根;

(5) 任意 $m \neq n \in \mathbb{N}$, $He_n(x)$ 和 $He_m(x)$ 没有非零公共根.

前四个性质可以在通常的数学手册 (如文献 [28]) 中找到, 最后一个性质详见文献 [29].

附录 B 引理 4.2 的证明

引理 4.2 的证明 选取 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^M$ 使得

$$R_1 = 1, \quad R_2 = \rho\lambda, \quad R_k = \frac{\rho He_{k-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(k-1)!} - f_{(k-1)e_1} - \lambda f_{(k-2)e_1}, \quad k = 2, \dots, M,$$

其中 λ 是 $\tilde{A}_1$ 的特征值, 则我们先证明 $\tilde{A}_1 \mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}$ 等价于

$$\tilde{A}_1(i, \cdot) \mathbf{R} = \lambda R_i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (\text{B.1})$$

容易验证 (B.1) 对于 $i = 1, 2, 3$ 成立. 对于 $i = 4, \dots, M-1$, 由于正则化仅改变 $\tilde{A}_1$ 的最后一行, 所以, (3.13) 给出了 $\tilde{A}_1$ 第 $4, \dots, M-1$ 行的值:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(i, 1:3) &= \left(if_{ie_1}, \frac{(i-1)f_{(i-1)e_1} + \theta_{11}f_{(i-3)e_1}}{\rho}, -\frac{2f_{(i-2)e_1}}{\rho} \right), \\ \tilde{A}_1(i, i-1:i+1) &= (\theta_{11}, 0, i). \end{aligned}$$

注意 $\tilde{A}_1(i, \cdot)$ 在上面没有定义的元素均为 0, 若被定义两次则该元素的值为两次定义的加和. 所以,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(i, \cdot) \mathbf{R} &= if_{ie_1} \cdot 1 + \frac{(i-1)f_{(i-1)e_1} + \theta_{11}f_{(i-3)e_1}}{\rho} \cdot \rho\lambda \\ &\quad - 2\frac{f_{(i-2)e_1}}{\rho} \cdot \rho \frac{He_2^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{2!} + \theta_{11} \cdot \left(\rho \frac{He_{i-2}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-2)!} - f_{(i-2)e_1} - \lambda f_{(i-3)e_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \cdot \left(\rho \frac{He_i^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{i!} - f_{ie_1} - \lambda f_{(i-1)e_1} \right) \\
& = \rho \theta_{11} \frac{He_{i-2}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-2)!} + \rho \frac{i He_i^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{i!} - \lambda f_{(i-1)e_1} - \lambda^2 f_{(i-2)e_1} \\
& = \lambda \left(\rho \frac{He_{i-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-1)!} - f_{(i-1)e_1} - \lambda f_{(i-2)e_1} \right) \\
& = \lambda R_i.
\end{aligned}$$

对于 $i = M$, 由正则化 (4.4) 和 (3.13) 可知,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1(M, 1 : 3) &= \left(0, \frac{-f_{(i-1)e_1} + \theta_{11} f_{(i-3)e_1}}{\rho}, -2 \frac{f_{(i-2)e_1}}{\rho} \right), \\
\tilde{A}_1(M, M-1 : M) &= (\theta_{11}, 0).
\end{aligned}$$

类似地, $\tilde{A}_1(i, \cdot)$ 在上面没有定义的元素均为 0, 若被定义两次则该元素的值为两次定义的和,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1(i, \cdot) \mathbf{R} &= \frac{-f_{(i-1)e_1} + \theta_{11} f_{(i-3)e_1}}{\rho} \cdot \rho \lambda - 2 \frac{f_{(i-2)e_1}}{\rho} \cdot \rho \frac{He_2^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{2!} \\
&\quad + \theta_{11} \cdot \left(\rho \frac{He_{i-2}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-2)!} - f_{(i-2)e_1} - \lambda f_{(i-3)e_1} \right) \\
&= \rho \theta_{11} \frac{He_{i-2}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-2)!} - \lambda f_{(i-1)e_1} - \lambda^2 f_{(i-2)e_1} \\
&= \lambda \left(\rho \frac{He_{i-1}^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{(i-1)!} - f_{(i-1)e_1} - \lambda f_{(i-2)e_1} \right) - \rho \frac{He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{M!} \\
&= \lambda R_i - \rho \frac{He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda)}{M!}.
\end{aligned}$$

所以, 若 λ 满足 $He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$, 则 (λ, R) 是 $\tilde{A}_1$ 的一个特征对. 所以, $He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 的任何根均是 $\tilde{A}_1$ 的特征值. 又因为 $He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 是首一的 M 次多项式, 所以, $\tilde{A}_1$ 的特征多项式是 $He_M^{[\theta_{11}]}(\lambda)$. 证毕. $\square$

附录 C 引理 4.6 的证明

在证明引理 4.6 之前, 我们先不加证明的列出一些线性代数中的结论.

引理 C.1 记 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为一个可分为 $k \times k$ 的分块下三角矩阵, 且每个对角块的大小为 $n_i \times n_i$, 满足

$$n_1 + \cdots + n_k = N,$$

$\mathbf{r}_i$ 是第 i 个对角块对应于其特征值 λ 的特征向量. 若 λ 是 $\mathbf{A}$ 的单重特征值, 则必存在 $\mathbf{r}_i$ 的一个正规延拓使其为 $\mathbf{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

引理 C.2 $\mathbf{A}$ 的定义同引理 C.1, 并记 A_{ij} 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列的矩阵块, 且 $\mathbf{A}$ 的每个对角块均是可实对角化的, $\mathbf{r}_i$ 是 A_{ii} 对应于其特征值 λ 的特征向量. 如果 λ 是 A_{jj} , $j \neq i$ 的特征值, 但不是其他任何对角块的特征值, 且存在 $\mathbf{r}_i$ 一个正规延拓使其为矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{ii} & 0 \\ A_{ij} & A_{jj} \end{pmatrix}, \quad \text{若 } i < j,$$

或

$$\begin{pmatrix} A_{jj} & 0 \\ A_{ji} & A_{ii} \end{pmatrix}, \quad \text{若 } i > j$$

的特征向量, 则存在 $\mathbf{r}_i$ 一个正规延拓使其为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

引理 4.6 的证明 $D = 1$ 的情形已经在文献 [18] 中证明, 这里仅考虑 $D \geq 2$ 的情形. 定义 $\mathbf{R}_\alpha = (R_{\alpha,\beta})^T$, 其中 $R_{\alpha,\beta}$ 在 $\mathbf{R}_\alpha$ 中的行列号分别是根据 α 和 β 的字典序排列的. 类似地定义 $\mathbf{r}_\alpha = (r_{\alpha,1}, \dots, r_{\alpha,M+1-|\hat{\alpha}|})^T$. 若 $\mathbf{R}_\alpha$ 是 $\mathbf{r}_\alpha$ 的一个延拓, 则必有

$$R_{\alpha,\beta} = r_{\alpha,\beta+1}, \quad \hat{\beta} = \hat{\alpha}. \quad (\text{C.1})$$

若 $\mathbf{R}_\alpha$ 是 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 关于特征值 λ 的特征向量, 则 (4.5) 要求 $R_{\alpha,\beta}$ 满足: 对于任意 $|\beta| \leq M$,

$$\rho R_{\alpha,e_1} = \lambda R_{\alpha,0}, \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{1}{\rho}(1 + \delta_{1i})R_{\alpha,e_1+e_i} = \lambda R_{\alpha,e_i}, \quad (\text{C.2b})$$

$$p_{ij}R_{\alpha,e_1} + p_{1i}R_{\alpha,e_j} + p_{1j}R_{\alpha,e_i} + (e_i + e_j + e_1)!R_{\alpha,e_i+e_j+e_1} = \lambda(1 + \delta_{ij})R_{\alpha,e_i+e_j}, \quad (\text{C.2c})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha,\beta-e_k} + (1 - \delta_{|\beta|,M})(\beta_1 + 1)R_{\alpha,\beta+e_1} + \sum_{i,j=1}^D \frac{\tilde{C}_{ij}(\beta)}{2\rho} ((1 + \delta_{ij})R_{\alpha,e_i+e_j} - \theta_{ij}R_{\alpha,0}) \\ & + \sum_{i=1}^D (1 - \delta_{|\beta|,M})(\beta_1 + 1)f_{\beta-e_i+e_1}R_{\alpha,e_i} - \sum_{i=1}^D \frac{f_{\beta-e_i}}{\rho}(1 + \delta_{1i})R_{\alpha,e_1+e_i} \\ & - \sum_{i,j=1}^D \frac{(e_i + e_j + e_1)!}{2} \frac{f_{\beta-e_i-e_j}}{\rho} R_{\alpha,e_i+e_j+e_1} = \lambda R_{\alpha,\beta}, \quad |\beta| \geq 3, \end{aligned} \quad (\text{C.2d})$$

其中 $\tilde{C}_{ij}(\beta)$ 的定义见 (4.6). 我们只需要证明 $\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$ 同时满足 (C.1) 和 (C.2). 下面分类进行讨论.

(1) $\lambda \neq 0$; $D = 2$, 或 $D \geq 3$ 且 λ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$. 若 $D = 2$, $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的特征多项式为

$$\prod_{m=1}^{M+1} He_m^{[\theta_{11}]}(\lambda).$$

从性质 A.1 可知, $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的每个非零特征值均为单特征值. 若 $D \geq 3$ 且 λ 满足 $\lambda \neq 0$, $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda) = 0$, 则 λ 显然也是 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 的单特征值. 由引理 C.1 可得, 存在 $\mathbf{r}_\alpha$ 的一个正规延拓使其为 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量.

(2) $\lambda \neq 0$, $D \geq 3$ 且 λ 满足 $He_{M+1}^{[\theta_{11}]}(\lambda) \neq 0$. 此时必有 $|\hat{\alpha}| \geq 1$. 设 λ 是 $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\alpha}}$ 第 α_1 个特征值, 对应特征向量为 $\mathbf{r}_\alpha$.

从性质 A.1 可知, λ 是 $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\beta}}$, $|\hat{\beta}| = |\hat{\alpha}|$ 的特征值, 但不是 $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\beta}}$, $|\hat{\beta}| \neq |\hat{\alpha}|$ 的特征值. 我们首先将 $\mathbf{r}_\alpha$ 正规延拓为包含所有 $\tilde{\mathbf{A}}'_M$ 对角块 $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\beta}}$, $|\hat{\beta}| = |\hat{\alpha}|$ 的部分 (不妨记为矩阵 $\mathbf{B}$), 然后使用引理 C.2 获得 $\mathbf{r}_\alpha$ 到整个矩阵的特征向量正规延拓.

事实上, 观察 (4.5) 可以发现, 包含 $\frac{Dw_\alpha}{Dt}$ 的方程不依赖于任意 w_β , $|\beta| = |\alpha|$, 这意味着 $\mathbf{B}$ 是一个分块对角矩阵, 且对角块均是 $\tilde{\hat{A}}_{\hat{\alpha}}$. 因此只需将 $\mathbf{r}_\alpha$ 通过补零的方式即可得到矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征向量的正规延拓. 使用引理 C.2 即可证明该情形结论成立.

(3) $\lambda = 0$. 由于当 n 是奇数时, $He_n(x)$ 是奇函数, 所以, $\lambda = 0$ 是 $\tilde{A}'_M$ 的多重特征根. 下面分情形进行讨论.

(i) $|\hat{\alpha}| = 0$ 情形. 若 $\lambda = 0$ 是 $\tilde{A}_0$, 则 M 是偶数. 记

$$\begin{aligned} R_{\alpha,0} &= \rho, \quad R_{\alpha,\beta} = 0, \quad |\beta| = 1, \\ R_{\alpha,\beta} &= -\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^D \theta_{1k} (R_{\alpha,\beta-e_1-e_k} - G(\beta - e_1 - e_k)) + G(\beta), \quad |\beta| > 1, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

其中

$$G(\beta) = \sum_{i,j=1}^D \theta_{ij} f_{\beta-e_i-e_j},$$

且如果 β 的任何一个元素为负, 约定 $(\cdot)_\beta$ 为 0. 特别地, 当 $|\beta| = 1, 2, 3$ 时, $R_{\alpha,\beta} = 0$;

$$R_{\alpha,\beta} = G(\beta), \quad \text{若 } |\beta| \text{ 是奇数.} \quad (\text{C.4})$$

若 $\beta = me_1$, $m = 0, \dots, M$, 则有

$$\begin{aligned} R_{\alpha,0} &= \rho, \quad R_{\alpha,e_1} = R_{\alpha,2e_1} = 0, \\ R_{\alpha,me_1} - f_{(m-2)e_1} \theta_{11} &= -\frac{1}{m} \theta_{11} (R_{\alpha,(m-2)e_1} - f_{(m-4)e_1} \theta_{11}). \end{aligned}$$

使用 $He_n^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 的递推关系式, 并注意到 $\lambda = 0$, 可得 $R_{\alpha,me_1} = r_{\alpha,m+1}$, 其中 $r_{\alpha,m+1}$ 的定义见 (3.10).

接下来证明 $R_{\alpha,\beta}$ 满足 (C.2). 注意到 $|\beta| = 1, 2, 3$ 时, $R_{\alpha,\beta} = 0$, 因此, (C.2a)–(C.2c) 必然成立. 而 (C.2d) 退化为 $3 \leq |\beta| \leq M$,

$$\sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha,\beta-e_k} + (1 - \delta_{|\beta|,M})(\beta_1 + 1) R_{\alpha,\beta+e_1} - \sum_{i,j=1}^D \frac{\tilde{C}_{ij}(\beta)}{2\rho} \theta_{ij} R_{\alpha,0} = 0.$$

当 $|\beta| < M$ 时, 由于 $R_{\alpha,\beta-e_k} = 0$ 对于任意 $k = 1, \dots, D$ 均成立, 所以, 上式可由 (C.3) 直接得出. 当 $|\beta| = M$ 时, 由于 M 是偶数, 所以, $|\beta - e_k|$, $k = 1, \dots, D$ 是奇数, 上式可直接由 (C.4) 得出.

(ii) $|\hat{\alpha}| = 1$ 情形. 若 $\lambda = 0$ 是 $\tilde{A}_1$ 的特征值, 则 M 为奇数. 记 $\hat{e}_d = \hat{\alpha}$ 和

$$\begin{aligned} R_{\alpha,0} &= 0, \quad R_{\alpha,e_d} = 1, \quad R_{\alpha,\beta} = 0, \quad |\beta| = 1, \quad \beta \neq e_d, \\ R_{\alpha,\beta} &= -\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^D \theta_{1k} (R_{\alpha,\beta-e_1-e_k} - G(\beta - e_1 - e_k)) + G(\beta), \quad |\beta| > 1, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

其中 $G(\beta) = f_{\beta-e_d}$. 特别地, $R_{\alpha,me_1} = 0$, $m = 0, \dots, M$;

$$R_{\alpha,\beta} = G(\beta), \quad \text{若 } |\beta| \text{ 是偶数.} \quad (\text{C.6})$$

记 $\beta = e_d + me_1$, $m = 0, \dots, M-1$, 则可得

$$R_{\alpha,e_d} = 1, \quad R_{\alpha,e_d+e_1} = 1, \quad R_{\alpha,e_d+2e_1} = 0,$$

$$R_{\alpha, e_d + m e_1} - G(e_d + m e_1) = -\frac{1}{m} \theta_{11}(R_{\alpha, e_d + (m-2)e_1} - G(e_d + (m-2)e_1)).$$

使用 $He_n^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 的递推关系式, 并注意到 $\lambda = 0$, 可得 $R_{\alpha, e_d + m e_1} = r_{\alpha, m+1}$, 其中 $r_{\alpha, m+1}$ 的定义见引理 4.2.

下面证明 $R_{\alpha, \beta}$ 满足 (C.2). 容易看出 (C.2a)–(C.2c) 成立, 且 (C.2d) 退化为 $3 \leq |\beta| \leq M$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha, \beta - e_k} + (1 - \delta_{|\beta|, M})(\beta_1 + 1) R_{\alpha, \beta + e_1} + (1 - \delta_{|\beta|, M})(\beta_1 + 1) f_{\beta + e_1 - e_d} \\ & - \sum_{i,j=1}^D \frac{(e_i + e_j + e_1)!}{2} \frac{f_{\beta - e_i - e_j}}{2} R_{\alpha, e_1 + e_i + e_j} = 0. \end{aligned}$$

证明上式并不困难但非常繁琐, 因为我们需要挨个验证 $R_{e_1 + e_i + e_j}$, $i, j = 1, \dots, D$ 多种情形. 这里仅给出大致思路. 首先使用 (C.5) 消除 $R_{\alpha, e_1 + e_i + e_j}$. 当 $|\beta| < M$ 时, 上式可直接由 (C.5) 给出. 当 $|\beta| = M$ 时, 因为 M 是奇数, 所以, $|\beta - e_k|$, $k = 1, \dots, D$ 是偶数, 且上式可直接由 (C.6) 得出.

从 R_{α} 的构造上可知这是 r_{α} 的一个正规延拓.

(iii) $|\hat{\alpha}| = 2$ 情形. 若 $\lambda = 0$ 是 $\tilde{A}_2$ 的特征值, 则 M 是偶数. 记 $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}$, $\gamma_1 = 0$ 和

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \beta} &= 0, \quad |\beta| \leq 2, \quad \beta \neq \gamma, \quad R_{\alpha, \gamma} = 1, \\ R_{\alpha, \beta} &= -\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^D \theta_{1k} (R_{\alpha, \beta - e_1 - e_k} - G(\beta - e_1 - e_k)) + G(\beta), \quad |\beta| > |\gamma|, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

其中 $G(\beta) = \frac{f_{\beta - \gamma}}{\rho}$. 特别地, $R_{\alpha, \beta} = 0$, $|\hat{\beta}| < 2$;

$$R_{\alpha, \beta} = G(\beta), \quad \text{若 } |\beta| \text{ 是奇数}, \quad (\text{C.8})$$

且 $R_{\alpha, \beta} = 0$, $|\beta| = 3$.

记 $\beta = \gamma + m e_1$, $m = 0, \dots, M-2$, 则可得

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \gamma} &= 1, \quad R_{\alpha, \gamma + e_1} = 0, \\ R_{\alpha, \gamma + m e_1} - G(\gamma + m e_1) &= -\frac{1}{m} \theta_{11}(R_{\alpha, \gamma + (m-2)e_1} - G(\gamma + (m-2)e_1)). \end{aligned}$$

使用 $He_n^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 的递推关系式, 并注意到 $\lambda = 0$, 容易验证 $R_{\alpha, \gamma + m e_1} = r_{\alpha, m+1}$, 其中 $r_{\alpha, m+1}$ 定义见引理 4.3.

下面验证 $R_{\alpha, \beta}$ 满足 (C.2). 仔细观察发现 (C.2a)–(C.2c) 的左端项和右端项均为 0, 故而成立. (C.2d) 可化简为 $3 \leq |\beta| \leq M$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha, \beta - e_k} + (1 - \delta_{|\beta|, M})(\beta_1 + 1) R_{\alpha, \beta + e_1} \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{k=1}^D \theta_{1k} f_{\beta - \gamma - e_k} + (1 - \delta_{|\beta|, M})(1 + \beta_1) f_{\beta + e_1 - \gamma} \right) = 0. \end{aligned}$$

当 $|\beta| < M$ 时, 上式可直接由 (C.7) 给出. 当 $|\beta| = M$ 时, 由于 M 是偶数, 所以, $|\beta - e_k|$, $k = 1, \dots, D$ 是奇数且上式可直接由 (C.8) 得出.

从 R_α 的构造上可知这是 r_α 的一个正规延拓.

(iv) $n = |\hat{\alpha}| \geq 3$ 情形. 若 $\lambda = 0$ 是 $\tilde{A}_{\hat{\alpha}}$ 的特征值, 则 $M + 1 - n$ 是奇数. 记 $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}$, $\gamma_1 = 0$,

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \beta} &= 0, \quad |\beta| \leq n, \quad \beta \neq \gamma, \quad R_{\alpha, \gamma} = 1, \\ R_{\alpha, \beta} &= -\frac{1}{\beta_1} \sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha, \beta - e_1 - e_k}, \quad |\beta| > |\gamma|. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

特别地, $R_{\alpha, \beta} = 0$, $|\hat{\beta}| < n$, 且

$$R_{\alpha, \beta} = 0, \quad \text{若 } M + 1 - |\beta| \text{ 是偶数.} \quad (\text{C.10})$$

记 $\beta = \gamma + me_1$, $m = 0, \dots, M + 1 - n$, 则可得

$$R_{\alpha, \gamma} = 1, \quad R_{\alpha, \gamma + e_1} = 0, \quad R_{\alpha, \gamma + me_1} = -\frac{1}{m} \theta_{11} R_{\alpha, \gamma + (m-2)e_1}.$$

使用 $He_n^{[\theta_{11}]}(\lambda)$ 的递推关系式并注意到 $\lambda = 0$, 容易验证 $R_{\alpha, \gamma + me_1} = r_{\alpha, m+1}$, 其中 $r_{\alpha, m+1}$ 的定义见引理 4.4.

下面证明 $R_{\alpha, \beta}$ 满足 (C.2). 容易发现 (C.2a)–(C.2c) 的左端项和右端项均为 0, 故成立. (C.2d) 可化简为 $3 \leq |\beta| \leq M$,

$$\sum_{k=1}^D \theta_{1k} R_{\alpha, \beta - e_k} + (1 - \delta_{|\beta|, M})(\beta_1 + 1) R_{\alpha, \beta + e_1} = 0.$$

当 $|\beta| < n$ 时, 上式左右两端均为 0, 故成立. 当 $n \leq |\beta| < M$ 时, 上式可由 (C.7) 直接给出. 当 $|\beta| = M$ 时, 由于 $M + 1 - n$ 是偶数, $M + 1 - |\beta - e_k|$, $k = 1, \dots, D$ 是奇数, 所以, 上式可由 (C.10) 给出.

从 R_α 的构造上可知这是 r_α 的一个正规延拓.

综上所述可知, $\tilde{A}'_M$ 的每个对角块对应于 0 的特征向量均可正规延拓为 $\tilde{A}'_M$ 的一个特征向量.

综上所述, $\tilde{A}'_M$ 每个对角块的特征向量均可正规延拓为 $\tilde{A}'_M$ 的特征向量. 证毕. $\square$

Globally hyperbolic moment system by generalized Hermite expansion

FAN YuWei & LI Ruo

Abstract In a recent paper, Cai et al. (2014) revealed that a modified 13-moment system taking intrinsic heat fluxes as variables, instead of the heat fluxes along the coordinate vectors which is adopted in the classical Grad 13-moment system, attains some additional advantages than the classical Grad 13-moment system, particularly including that the equilibrium is turned to be the interior point of its hyperbolicity region. The modified 13-moment system was actually derived from the generalized Hermite expansion of the distribution function, where

the anisotropy of Hermite expansion is specified by the full temperature tensor. We extend the method therein in this paper to high order of generalized Hermite expansion to derive arbitrary order moment systems, and propose a globally hyperbolic regularization to achieve locally well-posedness similar to the method of Cai et al. (2014). Furthermore, the structure of the eigen-system of the coefficient matrix and all characteristic waves are fully clarified. The obtained systems provide a systematic class of hydrodynamic models as the refined version of Euler equations, which is gradually approaching the Boltzmann equation with increasing order of the expansion.

Keywords hydrodynamic model, moment system, global hyperbolicity, regularization, NR_{xx}

MSC(2010) 78M05, 82C40

doi: 10.1360/012015-23