

关于线性型转换定理的一个注记

Wolfgang M. Schmidt

王 元

(美国柯罗拉多大学数学系)

(中国科学院数学研究所)

摘 要

本文证明了丢番图逼近论中关于线性型的一个转换定理, 定理的证明依赖于 Mahler 的一个定理.

1. 命 m 与 n 为 ≥ 1 的整数及 θ_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 为给予的一组 mn 个实数. 命 $\|x\|$ 表示实数 x 至它最近的整数的距离及 $\bar{x} = \max(1, |x|)$.

性质 A. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$\left(\prod_{i=1}^m \|\theta_{i1}x_1 + \cdots + \theta_{in}x_n\| \right) (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)^{1+\varepsilon} < 1 \quad (1)$$

仅有有限组整数解 $(x_1, \cdots, x_n)$.

性质 B. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$\left(\prod_{j=1}^n \|\theta_{1j}y_1 + \cdots + \theta_{mj}y_m\| \right) (\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m)^{1+\varepsilon} < 1 \quad (2)$$

仅有有限组整数解 $(y_1, \cdots, y_m)$.

本文我们证明了

定理. 性质 A 与 B 是等价的.

当 $m = 1$ 及 $1, \theta_{11}, \cdots, \theta_{1n}$ 在有理数域 $\mathcal{Q}$ 上线性独立时, 即得文献 [1] 的结果.

2. 定理的证明依赖于下面的

引理 1. (Mahler). 命 $f_k(\mathbf{x})$ ($1 \leq k \leq l$) 为 l 个有 l 个变数 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_l)$ 的线性独立齐次线性型及 $g_k(\mathbf{y})$ ($1 \leq k \leq l$) 为 l 个有 l 个变数 $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_l)$ 的线性独立齐次线性型并有行列式 d . 假定在表达式

$$\sum_{k=1}^l f_k(\mathbf{x}) g_k(\mathbf{y})$$

中所有乘积 $x_i y_j$ ($1 \leq i, j \leq l$) 的系数都是整数. 如果 $|f_k(\mathbf{x})| \leq \lambda, 1 \leq k \leq l$, 有整解 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 则不等式

$$|g_k(\mathbf{y})| \leq (l-1) |\lambda d|^{\frac{1}{l-1}}, 1 \leq k \leq l,$$

也有整解 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

见 K. Mahler^[2] 及 J. W. S. Cassels^[3].

3. 定理的证明. 如果有某一个 $\theta_{ij} \in \mathcal{Q}$, 则显然性质 A 与 B 都不真. 所以我们可以假定

所有的 θ'_{ij} 都是无理数. 首先, 我们将证明如果存在适合于 $1 \leq i \leq m$ 的 i , 使 $1, \theta_{i1}, \dots, \theta_{in}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上线性互依, 则性质 A 与 B 都不真. 因存在非全为 0 的整数 $a_1, \dots, a_n$ 及整数 a_0 , 使

$$a_0 + a_1\theta_{i1} + \dots + a_n\theta_{in} = 0, \quad (3)$$

所以 (1) 式有无穷多组整解 $(ka_1, \dots, ka_n)$ ($k = 1, 2, \dots$). 因此性质 A 不真.

因 $\theta_{ij} \in \mathcal{Q}$ ($1 \leq j \leq n$), 所以由 (3) 式可知必须 $n \geq 2$. 不失一般性, 可以假定 $a_n > 0$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2(n-1)}$, 则由 Dirichlet 定理可知对于任意给定整数 $t > 1$, 皆存在整数 q 适合于

$$1 \leq q < t^{n-1} \text{ 及 } \|\theta_{ij}q\| \leq t^{-1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (4)$$

取 $y = a_n q$ 及 $c = n \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, 则 $\|\theta_{ij}y\| < ct^{-1}$, $1 \leq j \leq n-1$.

进而言之, 由 (3) 式得

$$\begin{aligned} \|\theta_{in}y\| &= \|\theta_{in}a_nq\| = \|(a_1\theta_{i1} + \dots + a_{n-1}\theta_{i, n-1})q\| \\ &\leq \|a_1\theta_{i1}q\| + \dots + \|a_{n-1}\theta_{i, n-1}q\| < ct^{-1}. \end{aligned}$$

所以当 t 充分大时, 有

$$\|\theta_{i1}y\| \dots \|\theta_{in}y\| y^{1+\varepsilon} < (ct^{-1})^n (ct^{n-1})^{1+\varepsilon} < c^{n+2} t^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

因 $\|\theta_{ij}q\| \leq t^{-1}$ 及 $\theta_{ij} \in \mathcal{Q}$, 所以当 t 通过所有整数 > 1 时, 有无穷多个整数 q 适合于 (4) 式. 从而 (2) 式有无穷多组整解 $(y_1, \dots, y_m)$, 此处 $y_i = a_n q$ 及 $y_j = 0$ ($j \neq i$). 因此性质 B 不真.

类似地, 我们可以证明如果存在适合于 $1 \leq j \leq n$ 的 j , 使 $1, \theta_{1j}, \dots, \theta_{mj}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上线性互依, 则性质 A 与 B 亦都不真. 因此在下面, 我们可以假定当 $1 \leq i \leq m$ 时, $1, \theta_{i1}, \dots, \theta_{in}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上线性独立, 而当 $1 \leq j \leq n$ 时, $1, \theta_{1j}, \dots, \theta_{mj}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上线性独立.

由于这两个性质的对称性, 所以只要证明下面的论断即可.

如果性质 A 不真, 则性质 B 亦不真.

(5)

假定 $\varepsilon > 0$ 使 (1) 式有无穷多组整解 $(x_1, \dots, x_n)$, 记

$$X = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n. \quad (6)$$

对于 (1) 式的任何适合于 $X \geq 2$ 的整解, 我们定义 $A_1, \dots, A_m, A$ 如下

$$0 < \|\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n\| = X^{-A_i} (1 \leq i \leq m) \text{ 及 } A_1 + \dots + A_m = A, \quad (7)$$

又定义 $B_1, \dots, B_n$ 为

$$\bar{x}_j = X^{B_j} (1 \leq j \leq n), \quad (8)$$

则 $A_i > 0$ ($1 \leq i \leq m$), $B_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$) 及 $B_1 + \dots + B_n = 1$. 指数 $A_1, \dots, A_m$ 与 $B_1, \dots, B_n$ 是依赖于 X 的. 由 (1) 式可知,

$$A > 1 + \varepsilon. \quad (9)$$

命 $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\min(A_1, \dots, A_m)}{A} = 2\rho$ (当 $X \rightarrow \infty$).

(10)

记 x_{n+i} ($1 \leq i \leq m$) 为适合于

$$|\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n + x_{n+i}| = \|\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n\|, \quad 1 \leq i \leq m \quad (11)$$

的整数.

1) 假定 $\rho > 0$, 则 (1) 式有无穷多组整解, 使

$$\frac{\min(A_1, \dots, A_m)}{A} > \rho > 0. \quad (12)$$

记

$$\eta = \max(1, A - (n + m - 1)\min(A_1, \dots, A_m)), \quad (13)$$

则由 (9) 与 (12) 式可知,

$$\frac{\eta}{A} < \max\left(\frac{1}{1 + \varepsilon}, 1 - (n + m - 1)\rho\right) < 1. \quad (14)$$

命 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ 及 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n+m})$, 又命

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} X^{A_i}(\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n + x_{n+i}), & 1 \leq i \leq m, \\ X^{-\eta B_{i-m}}x_{i-m}, & m+1 \leq i \leq m+n, \end{cases} \quad (15)$$

及

$$g_i(\mathbf{y}) = \begin{cases} X^{-A_i}y_i, & 1 \leq i \leq m, \\ -X^{\eta B_{i-m}}(\theta_{1,i-m}y_1 + \dots + \theta_{m,i-m}y_m + y_i), & m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases} \quad (16)$$

因

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i(\mathbf{x})g_i(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_{n+i}y_i - \sum_{j=1}^n x_jy_{m+j}$$

及因存在 (1) 式的适合于 (12) 式的整解, 所以由引理 1 (其中 $\lambda = 1$ 及 $d = X^{\eta-A}$) 可知存在整点 $\mathbf{y} \approx \mathbf{0}$, 使

$$|y_i| \leq (n + m - 1)X^{\frac{\eta-A}{n+m-1}+A_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (17)$$

及

$$|\theta_{1j}y_1 + \dots + \theta_{mj}y_m + y_{m+j}| \leq (n + m - 1)X^{\frac{\eta-A}{n+m-1}-\eta B_j}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (18)$$

由 (9) 与 (14) 式可知, 当 X 充分大时, 有

$$\begin{aligned} |\theta_{1j}y_1 + \dots + \theta_{mj}y_m + y_{m+j}| &\leq (n + m - 1)X^{\frac{\eta-A}{n+m-1}} \\ &\leq (n + m - 1)X^{\frac{A}{n+m-1}(\frac{\eta}{A}-1)} \\ &\leq (n + m - 1)X^{-\frac{A}{n+m-1}\min(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, (n+m-1)\rho)} < 1, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (19)$$

因此 $(y_1, \dots, y_m) \approx \mathbf{0}$. 由 (13) 式可知, (17) 式的右端皆 ≥ 1 , 所以我们可以将 (17) 式中的 y_i 换为 $\bar{y}_i$. 取 $\delta > 0$, 使

$$\frac{1 - (n-1)\delta}{1 + m\delta} = \max\left(\frac{1}{1 + \varepsilon}, 1 - (n + m - 1)\rho\right) + \delta, \quad (20)$$

则由 (14), (17) 与 (18) 式可知, 当 X 充分大时, 有

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{j=1}^n \|\theta_{1j}y_1 + \dots + \theta_{mj}y_m\|\right)(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m)^{1+\delta} \\ &\leq (n + m - 1)^{n+m(1+\delta)} X^{\frac{1}{n+m-1}(\eta(1+m\delta)+A(-1+(n-1)\delta))} \\ &= (n + m - 1)^{n+m(1+\delta)} X^{-\frac{(1+m\delta)A}{n+m-1}(\frac{1-(n-1)\delta}{1+m\delta}-\frac{\eta}{A})} \\ &< (n + m - 1)^{n+m(1+\delta)} X^{-\frac{(1+m\delta)\delta A}{n+m-1}} < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

因当 $1 \leq j \leq n$ 时, $1, \theta_{1j}, \dots, \theta_{mj}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上线性独立, 所以由 (9) 与 (19) 式可知, 当 $(x_1, \dots, x_n)$ 通过 (1) 式适合于 (12) 式的所有解时, 即可知有无穷多组整解 $(y_1, \dots, y_m)$ 适合于 (21) 式. 换言之, 性质 B 不真. 因此论断 (5) 成立.

2) 我们现在关于 m 用归纳法来证明论断 (5). 当 $m = 1$ 时有 $\rho = \frac{1}{2}$, 所以论断 (5) 当 $m = 1$ 时成立. 假定 $m \geq 2$ 及论断 (5) 对于 $m - 1$ 成立. 如果 $\rho > 0$, 则由 1) 可知论断 (5) 成立. 下面我们假定 $\rho = 0$, 取

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}. \quad (22)$$

不失一般性, 我们可以假定 (1) 式有无穷多组整解 $(x_1, \dots, x_n)$ 适合于

$$\frac{A_m}{A} < \eta. \quad (23)$$

由 (7) 与 (22) 式可知, 它们适合于

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^{m-1} \|\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n\| \right) (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)^{1+\varepsilon/2} \\ & < \left(\left(\prod_{i=1}^m \|\theta_{i1}x_1 + \dots + \theta_{in}x_n\| \right) (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)^{1+\varepsilon} \right)^{1-\eta} < 1. \end{aligned}$$

所以由归纳法假定可知存在 $\tau > 0$, 使

$$\left(\prod_{j=1}^n \|\theta_{1j}y_1 + \dots + \theta_{m-1,j}y_{m-1}\| \right) (\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_{m-1})^{1+\tau} < 1$$

有无穷多组整解 $(y_1, \dots, y_{m-1})$. 从而当 $\varepsilon = \tau$ 时, (2) 式有无穷多组整解 $(y_1, \dots, y_{m-1}, 0)$, 故论断 (5) 式, 即定理得证.

参 考 文 献

- [1] 王 元、於坤瑞、朱尧辰, 一个关于线性型转换定理的注记, 数学学报, **22** (1979), 2.
- [2] Mahler, K., *Čas. Pěst Mat.*, **68** (1939), 85—92.
- [3] Cassels, J. W. S., *An Introduction to Diophantine Approximation*, Camb University Press, 1957.