中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 7 期: 923 ~ 938
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

Landau 常数和 Lebesgue 常数的渐近性与不等式

陈超平

河南理工大学数学与信息科学学院, 焦作 454000
E-mail: chenchaoping@hpu.edu.cn

收稿日期: 2015-09-19; 接受日期: 2017-06-23; 网络出版日期: 2018-03-20

摘要 对于所有的整数 $n \geqslant 0$, Landau 常数和 Lebesgue 常数分别定义为

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} \binom{2k}{k}^2 \quad 和 \quad L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right| dt.$$

本文给出 G_n 和 $L_{n/2}$ 新的渐近级数. 基于获得的结果, 本文建立了 Landau 常数和 Lebesgue 常数新的不等式. 设 $f \in C[-1,1]$, $(s_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ 是 f 的 Chebyshev 展开式的部分和. Cheney 指出, 对于所有直到 400 为止的 n 值, 当用最佳多项式逼近替代 $s_n f$ 时, 精度至多提高一位十进小数. 本文证明了 Cheney 的论断对于 $n \leqslant 191833603$ 亦真, 而且本文说明了 191833603 不能被更大的整数替代.

关键词 Landau 常数 Lebesgue 常数 不等式 渐近展开式

MSC (2010) 主题分类 41A60, 26D15

1 引言

Landau 常数定义为

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} \binom{2k}{k}^2, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.1}$$

Landau 常数在复分析理论中起着重要的作用. 更精确地说, Landau [1] 在 1913 年证明了, 如果 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在单位圆盘 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内是解析的 ($\mathbb{C}$ 表示复数集), 并且满足 $|f(z)| < 1$, $z \in \mathcal{D}$, 那么,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leqslant G_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2}$$

英文引用格式: Chen C P. Asymptotics and inequalities for the constants of Landau and Lebesgue (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 923–938, doi: 10.1360/N012015-00295

并且这个界是最佳的. 关于 Landau 常数的历史背景与意义, 参见文献 [2].

Lebesgue 常数定义为

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right|dt, \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Lebesgue 常数在 Fourier 级数理论中起着重要的作用. 更精确地说, Lebesgue[3] 在 1906 年证明了如下结果: 假设函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是可积的, $S_n(f,x)$ 表示函数 f 的 Fourier 级数部分和

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)),$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \quad k\in\mathbb{N}_0.$$

如果 $|f(x)|\leqslant 1$, $x\in[-\pi,\pi]$, 那么,

$$|S_n(f,x)|\leqslant L_n, \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

如果 f 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 那么不等式 (1.4) 的上界 L_n 是最佳的.

Lebesgue 常数与函数的 Fourier 级数及最佳多项式逼近紧密相关. 设 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的连续函数, 它的 Chebyshev 级数是 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x)$, $T_k(x)$ 是 k 次 Chebyshev 多项式, 记

$$s_nf(x) = \sum_{k=0}^{n}a_kT_k(x), \quad n\in\mathbb{N},$$

则有 (参见文献 [4, 第 108 页])

$$\|f-s_nf\|\leqslant(1+L_n)E_n(f), \tag{1.5}$$

其中 $\|g\| = \max_{x\in[-1,1]}|g(x)|$, $E_n(f)$ 是用 n 次多项式逼近 $f(x)$ 的最小偏差. 王璆和高小彬[5] 获得了下面结果:

$$\|f-s_nf\|\leqslant\left(2.36126\cdots+\frac{4}{\pi^2}\ln n\right)E_n(f), \quad n\geqslant 2,$$

而且他们指出, 当 $n\leqslant 1.5\times10^8$ 时,

$$\|f-s_nf\|\leqslant 10E_n(f). \tag{1.6}$$

这样, 对于所有直到 1.5×10^8 为止的 n 值, 当用 $f(x)$ 的 n 次最佳多项式逼近替代 s_nf 时, 精度至多提高一位十进小数.

Landau 常数和 Lebesgue 常数的上下界估计的各种不等式和逼近已经被研究和发展了. 本文给出了 G_n 和 $L_{n/2}$ 新的渐近级数. 基于获得的结果, 我们建立了 Landau 常数和 Lebesgue 常数新的不等式, 也给出了 Lebesgue 常数不等式的一个应用. 应用 (3.25) 的右边不等式, 从 (1.5) 获得

$$\|f-s_nf\|\leqslant\left(1+c_1+\frac{2}{\pi^2}\ln\left(4n^2+4n+\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}\right)\right)E_n(f), \tag{1.7}$$

其中常数 c_1 由 (3.2) 给出.

利用 Maple 软件我们发现, 当 $n\leqslant 191833603$ 时,

$$1+c_1+\frac{2}{\pi^2}\ln\left(4n^2+4n+\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}\right)\leqslant 10.$$

这表明, 当 $n \leqslant 191833603$ 时, 不等式 (1.6) 成立.

我们提出下面问题: (i) 是否存在比 191833603 更大的自然数 n 使得不等式 (1.6) 成立? (ii) 是否存在某个自然数 n_0, 使得不等式 (1.6) 对于 $n \leqslant n_0$ 成立, 对于 $n > n_0$ 不成立? 回答如下:

将 (3.8) 的左边不等式写成

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1)+c_1+\frac{12-\pi^2}{18\pi^2(2n+1)^2}-\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800\pi^2(2n+1)^4}<L_n.$$

利用 Maple 软件我们发现, 当 $n \geqslant 191833604$ 时,

$$1+L_n>\frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1)+1+c_1+\frac{12-\pi^2}{18\pi^2(2n+1)^2}-\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800\pi^2(2n+1)^4}>10, \tag{1.8}$$

于是发现 $n_0 = 191833603$. 因此, 当 $n \leqslant 191833603$ 时, 不等式 (1.6) 成立; 当 $n > 191833603$ 时, 不等式 (1.6) 不成立. 这样, 对于所有直到 191833603 为止的 n 值, 当用最佳多项式逼近替代 $s_n f$ 时, 精度至多提高一位十进小数, 并且 191833603 不能被更大的整数替代.

我们的结果 ($n \leqslant 191833603$) 比 Cheney [6] ($n \leqslant 400$)、Rilvin [7] ($n \leqslant 2688265$)、熊规景 [8] ($n \leqslant 86177382$) 以及王璆和高小彬 [5] ($n \leqslant 1.5 \times 10^8$) 的结果都好.

2 Landau 常数

Landau [1] 研究了 G_n 的渐近特性, 证明了

$$G_n \sim \frac{1}{\pi}\ln n, \quad n \to \infty. \tag{2.1}$$

此后, 学者不断获得 Landau 常数的各种逼近. Landau 常数的逼近涉及两个相关方向, 一个是发现 Landau 常数上下界估计的不等式, 另一个是获得 Landau 常数的渐近展开式.

Watson [9] 证明了下面渐近公式:

$$G_n = \frac{1}{\pi}\ln(n+1)+c_0-\frac{1}{4\pi(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

其中

$$c_0 = \frac{1}{\pi}(\gamma+4\ln 2) = 1.0662758532089143543451101966157\cdots, \tag{2.3}$$

这里 γ 是 Euler-Mascheroni 常数 (参见文献 [10, 第 13 页]). 在下文中, c_0 由 (2.3) 给出. 受 (2.2) 启发, Brutman [2] 发现了 G_n 的上下界:

$$1+\frac{1}{\pi}\ln(n+1) \leqslant G_n < c_0+\frac{1}{\pi}\ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

随后, G_n 的各种不等式和渐近展开式被建立. 例如, Falaleev [11] 获得了新的界

$$c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right) < G_n \leqslant 1.0916+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

Mortici [12] 改进了 (2.5) 的上界获得了下面不等式:

$$c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right) < G_n < c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}+\frac{11}{192n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Chen [13] 改进了 (2.6) 的上界获得了下面不等式:

$$c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)<G_n<c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}+\frac{11}{192(n+\frac{3}{4})}\right),\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{2.7}$$

事实上, 下面逼近公式成立 (参见文献 [13, 14]):

$$G_n=c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)+O(n^{-2}), \tag{2.8}$$

$$G_n=c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}+\frac{11}{192n}\right)+O(n^{-3}), \tag{2.9}$$

$$G_n=c_0+\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}+\frac{11}{192(n+\frac{3}{4})}\right)+O(n^{-4}). \tag{2.10}$$

基于 Nemes [15] 的结果 (见 (2.14)), 陈超平和成军祥 [16] 拓广 (2.8)–(2.10) 成为一个完全渐近展开式: 对于 $m\in\mathbb{N}$, $0<h<3/2$, 有

$$G_n=c_0+\frac{1}{\pi}\ln(n+h)+\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j(h)}{(n+h)^j}\right)+O\left(\frac{1}{(n+h)^{m+1}}\right),\quad n\to\infty, \tag{2.11}$$

而且还给出一个递推公式来确定系数 $a_j(h)$.

Zhao [17] 建立了下面双边不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\ln(n+1)+c_0-\frac{1}{4\pi(n+1)}+\frac{5}{192\pi(n+1)^2}\\&\quad<G_n<\frac{1}{\pi}\ln(n+1)+c_0-\frac{1}{4\pi(n+1)}+\frac{5}{192\pi(n+1)^2}+\frac{3}{128(n+1)^3},\quad n\in\mathbb{N},\end{aligned} \tag{2.12}$$

这推出了 Watson 渐近公式 (2.2). Mortici [12] 改进了 (2.12) 获得下面双边不等式:

$$\begin{aligned}&c_0+\frac{1}{\pi}\ln(n+1)-\frac{1}{4\pi(n+1)}+\frac{5}{192\pi(n+1)^2}+\frac{3}{128\pi(n+1)^3}-\frac{341}{122880\pi(n+1)^4}-\frac{75}{8192\pi(n+1)^5}\\&<G_n\\&<c_0+\frac{1}{\pi}\ln(n+1)-\frac{1}{4\pi(n+1)}+\frac{5}{192\pi(n+1)^2}+\frac{3}{128\pi(n+1)^3}-\frac{341}{122880\pi(n+1)^4},\quad n\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

利用文献 [18] 中的一个公式, Nemes 和 Nemes [19] 获得了 G_n 的完全渐近展开式, 他们也猜想了展开式系数的一个对称性质. 稍后, Nemes [15] 证明了这个猜想. Nemes [15] 证明了对于 $0<h<3/2$, Landau 常数 G_n 有下面渐近展开式:

$$G_n\sim\frac{1}{\pi}\ln(n+h)+c_0-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k(h)}{(n+h)^k},\quad n\to\infty, \tag{2.14}$$

其中系数 $g_k(h)$ 由下面公式给出:

$$g_k(h)=\frac{1}{\pi k}\sum_{j=0}^{k}\left(\binom{k}{j}B_{k-j}\left(h-\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{j}(-1)^{j+m}\binom{2m}{m}^2\frac{m!S(j,m)}{16^m}\right), \tag{2.15}$$

这里 $S(j,m)$ 表示第二类 Stirling 数, 由下面生成函数给出 (参见文献 [10, 第 78 页]):

$$\frac{(\mathrm{e}^x-1)^m}{m!}=\sum_{k=m}^{\infty}S(k,m)\frac{x^k}{k!},$$

$B_k(t)$ 表示 Bernoulli 多项式, 由下面生成函数给出 (参见文献 [10, 第 81 页]):

$$\frac{z\mathrm{e}^{tz}}{\mathrm{e}^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)\frac{z^n}{n!},\quad |z|<2\pi. \tag{2.16}$$

Bernoulli 数 B_n ($n\in\mathbb{N}_0$) 定义为 $B_n:=B_n(0)$.

事实上, 对于 $h=0$, (2.14) 也成立. Nemes[15] 说明了对于 $0<h<3/2$, 有

$$g_k(h)=(-1)^k g_k\left(\frac{3}{2}-h\right),\quad k\in\mathbb{N}, \tag{2.17}$$

这推出

$$g_{2k-1}\left(\frac{3}{4}\right)=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.18}$$

在文献 [15] 中, $h=\frac{3}{4}$ 情形已被研究.

文献 [20] 提供了另外一个公式来计算展开式 (2.14) 的系数, 文献 [19] 提出的猜想也已被核实. Li 等[21] 考虑了一个重要的特殊情形, 证明了

$$(-1)^{\ell-1}\left(G_n-\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)-c_0-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\ell-1}\frac{\beta_{2s}}{(n+\frac{3}{4})^{2s}}\right)>0,\quad \ell\in\mathbb{N},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.19}$$

而且给出了一个公式来确定系数 β_{2s}, 并说明了 $(-1)^{s+1}\beta_{2s}>0$. 不等式 (2.19) 导出下面不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)+c_0+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{2m}\frac{\beta_{2s}}{(n+\frac{3}{4})^{2s}}\\&\quad<G_n<\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)+c_0+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{2m-1}\frac{\beta_{2s}}{(n+\frac{3}{4})^{2s}},\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

前几个系数 β_{2s} 分别为

$$\begin{aligned}&\beta_2=\frac{11}{192},\quad \beta_4=-\frac{1541}{122880},\quad \beta_6=\frac{63433}{8257536},\quad \beta_8=-\frac{9199901}{1006632960},\\&\beta_{10}=\frac{317959723}{17716740096},\quad \beta_{12}=-\frac{14849190321163}{281406257233920},\quad \beta_{14}=\frac{717209117969}{3298534883328}.\end{aligned}$$

不等式 (2.20) 给出

$$G_n\sim\frac{1}{\pi}\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)+c_0+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_{2s}}{(n+\frac{3}{4})^{2s}},\quad n\to\infty. \tag{2.21}$$

注意到 (2.18) 成立, 从 (2.14) 和 (2.21) 可得

$$-\pi g_{2\ell}\left(\frac{3}{4}\right)=\beta_{2\ell},\quad \ell\geqslant 1. \tag{2.22}$$

Landau 常数有其他类型的不等式和渐近展开式. 例如, 文献 [13, 16, 18, 22, 23] 利用 Digamma 函数, 建立了 Landau 常数的渐近展开式和关于其上下界估计的不等式. 最近, 利用 Digamma 函数和 Polygamma 函数, Chen 和 Choi[24] 建立了 Landau 常数的渐近展开式和关于其上下界估计的不等式. 在文献 [25–30] 中, 我们能发现 Landau 常数的其他渐近展开式和关于其上下界估计的不等式.

利用 Maple 我们发现, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\pi G_n-\pi c_0\\
&\sim\frac{1}{2}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{65}{96}\right)+\frac{-\frac{3413}{368640}}{(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{6631657}{6880608})^2}+\frac{-\frac{63330965062657}{13636048382853120}}{(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{2012614524522196982034 5}{14379932980308662430048})^4}\\
&\quad+\frac{-\frac{1100998392386071202469019077321252581025921599 3}{57880130775715688766927623367671598332648620032 0}}{(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{942873770537510393747513987416523147013548984037886982909311586537443}{474968492818178490488559930496880726719368626060492036751560056072992})^6}+\cdots,
\end{aligned}\tag{2.23}$$

这导致我们提出下面问题: 确定常数 ν_ℓ 和 μ_ℓ, 使得

$$\pi G_n-\pi c_0\sim\frac{1}{2}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{65}{96}\right)+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\nu_\ell}{(n^2+\frac{3}{2}n+\mu_\ell)^{2\ell}},\quad n\to\infty.$$

本节的第一个目的是解决这个问题. 第二个目的在于确定最好可能的常数 α 和 β 使得不等式

$$\frac{1}{2}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\alpha\right)\leqslant\pi G_n-\pi c_0<\frac{1}{2}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\beta\right)$$

对于所有的 $n\in\mathbb{N}_0$ 成立.

定理 2.1 下面渐近展开式成立:

$$\pi G_n-\pi c_0\sim\frac{1}{2}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{65}{96}\right)+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_\ell}{((n+\frac{3}{4})^2+b_\ell)^{2\ell}},\quad n\to\infty,\tag{2.24}$$

其中 a_ℓ 和 b_ℓ 由下面一对递推关系式给出:

$$a_\ell=-\pi g_{4\ell}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4\ell}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell}-\sum_{k=1}^{\ell-1}a_kb_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k},\quad \ell\geqslant 2\tag{2.25}$$

和

$$b_\ell=\frac{1}{2\ell a_\ell}\left\{\frac{1}{4\ell+2}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell+1}-\sum_{k=1}^{\ell-1}a_kb_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}+\pi g_{4\ell+2}\left(\frac{3}{4}\right)\right\},\quad \ell\geqslant 2,\tag{2.26}$$

这里 $g_k(h)$ 由 (2.15) 给出,

$$a_1=-\frac{3413}{368640},\quad b_1=\frac{2761315}{6880608}.$$

证明 为了证明定理 2.1, 设

$$\pi G_n-\pi c_0-\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)\sim\frac{1}{2}F_1(n)+F_2(n),\tag{2.27}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_1(n)&=\ln\left(1+\frac{11}{96(n+3/4)^2}\right),\\
F_2(n)&=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_\ell}{((n+\frac{3}{4})^2+b_\ell)^{2\ell}}=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_\ell}{(n+\frac{3}{4})^{4\ell}}\left(1+\frac{b_\ell}{(n+\frac{3}{4})^2}\right)^{-2\ell},
\end{aligned}$$

这里 a_ℓ 和 b_ℓ 是待确定的实数.

利用 $\ln(1+t)$ 的 Maclaurin 展开式, 可得

$$F_1(n)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{11}{96}\right)^{j}\frac{1}{(n+\frac{3}{4})^{2j}}. \tag{2.28}$$

直接计算给出

$$\begin{aligned}F_2(n)&\sim\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(n+\frac{3}{4})^{4j}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2j}{k}\frac{b_j^k}{(n+\frac{3}{4})^{2k}}\\&\sim\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(n+\frac{3}{4})^{4j}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+2j-1}{k}\frac{b_j^k}{(n+\frac{3}{4})^{2k}}\\&\sim\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-2}a_{k+1}b_{k+1}^{j-k-2}(-1)^{j-k}\binom{j+k-1}{j-k-2}\frac{1}{(n+\frac{3}{4})^{2(j+k)}}\\&\sim\sum_{j=2}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}a_kb_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}\right\}\frac{1}{(n+\frac{3}{4})^{2j}}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

将 (2.28) 和 (2.29) 代入 (2.27), 有

$$\begin{aligned}&\pi G_n-\pi c_0-\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)\\&\quad\sim\frac{\frac{11}{192}}{(n+\frac{3}{4})^2}+\sum_{j=2}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{j-1}}{2j}\left(\frac{11}{96}\right)^j+\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}a_kb_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}\right\}\frac{1}{(n+\frac{3}{4})^{2j}}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

另一方面, 根据 (2.14), 有

$$\pi G_n-\pi c_0-\ln\left(n+\frac{3}{4}\right)\sim\frac{\frac{11}{192}}{(n+\frac{3}{4})^2}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{-\pi g_{2j}(3/4)}{(n+\frac{3}{4})^{2j}}, \tag{2.31}$$

其中 $g_k(h)$ 由 (2.15) 给出. 比较 (2.30) 和 (2.31) 右边 $(n+\frac{3}{4})^{-2j}$ 的系数, 我们有

$$\frac{(-1)^{j-1}}{2j}\left(\frac{11}{96}\right)^j+\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}a_kb_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}=-\pi g_{2j}\left(\frac{3}{4}\right),\quad j\geqslant 2. \tag{2.32}$$

在 (2.32) 中, 分别取 $j=2\ell$ 和 $j=2\ell+1$, 我们获得

$$-\frac{1}{4\ell}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell}+\sum_{k=1}^{\ell}a_kb_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k}=-\pi g_{4\ell}\left(\frac{3}{4}\right),\quad \ell\geqslant 1, \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{4\ell+2}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell+1}-\sum_{k=1}^{\ell}a_kb_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}=-\pi g_{4\ell+2}\left(\frac{3}{4}\right),\quad \ell\geqslant 1. \tag{2.34}$$

对于 $\ell=1$, 从 (2.33) 和 (2.34), 可得

$$\begin{aligned}a_1&=-\pi g_4\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{11}{96}\right)^2=\beta_4+\frac{1}{4}\left(\frac{11}{96}\right)^2=-\frac{3413}{368640},\\b_1&=\frac{\frac{1}{6}(\frac{11}{96})^3+\pi g_6(\frac{3}{4})}{2a_1}=\frac{\frac{1}{6}(\frac{11}{96})^3-\beta_6}{2\cdot(-\frac{3413}{368640})}=\frac{2761315}{6880608};\end{aligned}$$

对于 $\ell \geqslant 2$, 有

$$-\frac{1}{4\ell}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell}+\sum_{k=1}^{\ell-1}a_k b_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k}+a_\ell=-\pi g_{4\ell}\left(\frac{3}{4}\right),$$
$$\frac{1}{4\ell+2}\left(\frac{11}{96}\right)^{2\ell+1}-\sum_{k=1}^{\ell-1}a_k b_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}-2\ell a_\ell b_\ell=-\pi g_{4\ell+2}\left(\frac{3}{4}\right),$$

于是获得递推关系式 (2.25) 和 (2.26). 定理 2.1 证毕. □

利用递推关系式 (2.25) 和 (2.26), 我们给出 a_ℓ 和 b_ℓ 的前几个值:

$$\begin{aligned}
a_1&=-\frac{3413}{368640},\quad b_1=\frac{2761315}{6880608},\\
a_2&=\beta_8+\frac{14641}{679477248}-3a_1b_1^2=-\frac{63330965062657}{13636048382853120},\\
b_2&=\frac{161051-326149079040a_1b_1^3-81537269760\beta_{10}}{326149079040a_2}=\frac{1203743294379834720 3443}{14379932980308662430048},\\
a_3&=\beta_{12}+\frac{1771561}{9393093476352}-5a_1b_1^4-10a_2b_2^2\\
&=-\frac{-1100998392386071202469019077321252581025921599 3}{578801307757156887669276233676715983326486200320},\\
b_3&=\frac{19487171-6312158816108544a_1b_1^5-21040529387028480a_2b_2^3+10520264693514 24\beta_{14}}{6312158816108544a_3}\\
&=\frac{6757039933272849928476990265120277382339041318788602122365590549 96385}{474968492818178490488559930496880726719368626060492036751560056072992}.
\end{aligned}$$

将 (2.24) 写成

$$G_n\sim\frac{1}{2\pi}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{65}{96}\right)+c_0+\frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\nu_\ell}{(n^2+\frac{3}{2}n+\mu_\ell)^{2\ell}},\quad n\to\infty,\tag{2.35}$$

其中

$$\nu_\ell:=a_\ell,\quad \mu_\ell:=\frac{9}{16}+b_\ell,\tag{2.36}$$

于是获得 ν_ℓ 和 μ_ℓ 的前几个值:

$$\begin{aligned}
\nu_1&=a_1=-\frac{3413}{368640},\quad \mu_1=\frac{9}{16}+b_1=\frac{6631657}{6880608},\\
\nu_2&=a_2=-\frac{63330965062657}{13636048382853120},\\
\mu_2&=\frac{9}{16}+b_2=\frac{20126145245221969820345}{14379932980308662430048},\\
\nu_3&=a_3=-\frac{11009983923860712024690190773212525810259215993}{578801307757156887669276233676715983326486200320},\\
\mu_3&=\frac{9}{16}+b_3=\frac{942873770537510393747513987416523147013548984037886982909311586537443}{474968492818178490488559930496880726719368626060492036751560056072992}.
\end{aligned}$$

其中获得的 ν_ℓ 和 μ_ℓ 的前几个值与 (2.23) 中给出的值相同. 从计算的观点看, (2.35) 改进了 (2.21).

定理 2.2 对于所有的整数 $n \geqslant 0$, 下面不等式成立:

$$c_0+\frac{1}{2\pi}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{256}\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma}\right)\leqslant G_n<c_0+\frac{1}{2\pi}\ln\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{65}{96}\right).\tag{2.37}$$

常数 $\frac{1}{256}\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma}=0.65940097\cdots$ 和 $\frac{65}{96}=0.67708333\cdots$ 是最好可能的.

证明　首先证明 (2.37) 的左边不等式. 直接计算给出

$$c_0+\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{256}\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma}\right)=1 \quad 和 \quad G_0=1,$$

因此, 对于 $n=0$, (2.37) 的左边不等式中的等号成立.

现在证明 (2.37) 的左边不等式对于 $n\geqslant 1$ 也成立. 根据 (2.20) 的左边不等式, 只需证明

$$f(n)>0, \quad n\geqslant 1,$$

其中

$$f(x)=\ln\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{192(x+\frac{3}{4})^2}-\frac{1541}{122880(x+\frac{3}{4})^4}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{256}\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma}\right).$$

直接计算给出

$$f'(x)=-\frac{P(x-1)}{30(4x+3)^5(256x^2+384x+\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma})},$$

其中 ($P(x)$ 是关于 x 的 4 次多项式, 并且所有的系数都是正的)

$$\begin{aligned}P(x)&=47402240-278881\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma}+(110995584-646240\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma})x\\&\quad+(96941824-560960\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma})x^2+(37273600-215040\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma})x^3\\&\quad+(5324800-30720\mathrm{e}^{2\pi-2\gamma})x^4\\&>0, \quad x\geqslant 0,\end{aligned}$$

于是获得 $f'(x)<0$, $x\geqslant 1$, 并且有 $f(n)>\lim_{t\to\infty}f(t)=0$, $n\geqslant 1$, 因此, (2.37) 的左边不等式对于所有的 $n\geqslant 0$ 成立, 而且等号成立当且仅当 $n=0$.

其次证明 (2.37) 的右边不等式. 直接计算给出

$$G_0=1 \quad 和 \quad c_0+\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{65}{96}\right)=\frac{2\gamma+\ln(520/3)}{2\pi}=1.00421164\cdots,$$

因此, 对于 $n=0$, (2.37) 的右边不等式成立.

现在证明 (2.37) 的右边不等式对于 $n\geqslant 1$ 也成立. 根据 (2.20) 的右边不等式, 只需证明

$$g(n)<0, \quad n\geqslant 1,$$

其中

$$\begin{aligned}g(x)&=\ln\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{192(x+\frac{3}{4})^2}-\frac{1541}{122880(x+\frac{3}{4})^4}+\frac{63433}{8257536(x+\frac{3}{4})^6}\\&\quad-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{65}{96}\right).\end{aligned}$$

直接计算给出

$$g'(x)=\frac{24464384x^4+73393152x^3+55916480x^2+1307424x-10739215}{420(4x+3)^7(96x^2+144x+65)}>0, \quad x\geqslant 1,$$

从而有

$$g(n) < \lim_{t\to\infty} g(t) = 0, \quad n \geqslant 1,$$

因此, (2.37) 的右边不等式对于所有的 $n \geqslant 0$ 成立.

如果将 (2.37) 的右边不等式写成

$$\mathrm{e}^{2\pi G_n - 2\pi c_0} - n^2 - \frac{3}{2}n < \frac{65}{96},$$

那么, 利用 (2.21) 我们发现,

$$\mathrm{e}^{2\pi G_n - 2\pi c_0} - n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{65}{96} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

这给出

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{2\pi G_n - 2\pi c_0} - n^2 - \frac{3}{2}n\right) = \frac{65}{96},$$

因此, (2.37) 上界中的常数 $\frac{65}{96}$ 是最好可能的. 定理 2.2 证毕. □

不等式 (2.37) 改进了不等式 (2.7).

3 Lebesgue 常数

Fejér [31]、Gronwall [32]、Hardy [33]、Szegö [34] 和 Watson [9] 研究了 Lebesgue 常数, 发现了一些重要的性质. 例如, 他们建立了 Lebesgue 常数的单调性定理以及各种级数和积分表示式. 下面渐近公式属于 Watson [9]:

$$L_{n/2} = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + c_1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

其中

$$c_1 := \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(\gamma + 2\ln 2) = 0.989431273831146951741648\cdots, \tag{3.2}$$

这里 γ 表示 Euler-Mascheroni 常数. 在下文中, c_1 由 (3.2) 给出.

利用 (3.1) 和 (3.2), Galkin [35] 获得了下面不等式:

$$c_1 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) < L_{n/2} \leqslant 1 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

$$0.7190 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+2) < L_{n/2} \leqslant c_1 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+2), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.4}$$

Zhao [17] 建立了下面双边不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + c_1 + \frac{d_0}{(n+1)^2} - \frac{d_1}{(n+1)^4}\\ &\quad < L_{n/2} < \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + c_1 + \frac{d_0}{(n+1)^2} - \frac{d_1}{(n+1)^4} + \frac{d_2}{(n+1)^6}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{12-\pi^2}{18\pi^2},\\
d_1 &= \frac{7}{120\pi^2}\left(8-\frac{2\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{90}\right) = -\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800\pi^2},\\
d_2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(32-\frac{8\pi^2}{3}-\frac{2\pi^4}{45}-\frac{\pi^6}{945}\right) = \frac{30240-2520\pi^2-42\pi^4-\pi^6}{15120\pi^2}.
\end{aligned}
$$

不等式 (3.5) 推出 Watson 渐近公式 (3.1).

最近, Chen 和 Choi [24] 证明了对于 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $N\in\mathbb{N}_0$, 有

$$
\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+c_1+\sum_{j=1}^{2N}\frac{\lambda_j}{(n+1)^{2j}} < L_{n/2} < \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+c_1+\sum_{j=1}^{2N+1}\frac{\lambda_j}{(n+1)^{2j}}, \tag{3.6}
$$

其中

$$
\lambda_j = \frac{4}{\pi^2}\frac{B_{2j}}{j}(2^{2j-1}-1)\left(1-\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}\right), \tag{3.7}
$$

这里 B_n $(n\in\mathbb{N}_0)$ 是 Bernoulli 数. 在 (3.6) 中取 $N=1$, 我们获得下面不等式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+c_1+\frac{12-\pi^2}{18\pi^2(n+1)^2}-\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800\pi^2(n+1)^4}\\
&\quad< L_{n/2}\\
&\quad< \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+c_1+\frac{12-\pi^2}{18\pi^2(n+1)^2}-\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800\pi^2(n+1)^4}\\
&\qquad+\frac{937440-78120\pi^2-1302\pi^4-31\pi^6}{952560\pi^2(n+1)^6}, \quad n\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

不等式 (3.8) 核实了 (3.5) 的下界, 改进了 (3.5) 的上界.

不等式 (3.6) 给出下面渐近展开式:

$$
L_{n/2} \sim \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)+c_1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{(n+1)^{2j}}, \quad n\to\infty. \tag{3.9}
$$

渐近公式 (3.9) 参见文献 [36, 第 40–42 页]. 文献 [24] 给出了渐近公式 (3.9) 不同于文献 [36, 第 40–42 页] 的证明. 事实上, Watson [9] 首先证明了渐近公式 (3.9). 系数 (3.7) 能从文献 [9, (7a)] 导出.

利用 Bell 多项式, Chen 和 Choi [25] 建立了下面渐近展开式:

$$
L_{n/2}-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)-c_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\ln\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho_j}{(n+1)^j}\right), \quad n\to\infty, \tag{3.10}
$$

而且给出了一个递推公式来确定系数 ρ_j $(j\in\mathbb{N})$. 主要基于配分函数, Chen 和 Choi [25] 提供了一个显性公式来确定系数 ρ_j $(j\in\mathbb{N})$.

Lebesgue 常数有其他类型的不等式和渐近展开式. 例如, 文献 [22,23,25] 利用 Digamma 函数, 建立了 Lebesgue 常数的渐近展开式和关于其上下界估计的不等式. Chen 和 Choi [24] 利用 Digamma 函数和 Polygamma 函数, 建立了 Lebesgue 常数的渐近展开式和关于其上下界估计的不等式.

这里, 我们的第一个目的在于确定常数 p_ℓ 和 q_ℓ, 使得

$$L_{n/2} \sim c_1 + \frac{2}{\pi^2}\ln\left(n^2+2n+\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}\right) + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{p_\ell}{(n^2+2n+q_\ell)^{2\ell}}, \quad n\to\infty.$$

第二个目的在于确定最好可能的常数 a 和 b 使得不等式

$$c_1 + \frac{2}{\pi^2}\ln(n^2+2n+a) \leqslant L_{n/2} < c_1 + \frac{2}{\pi^2}\ln(n^2+2n+b)$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}_0$ 成立.

定理 3.1 下面渐近展开式成立:

$$\pi^2 L_{n/2} - \pi^2 c_1 \sim 2\ln\left(n^2+2n+\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\alpha_\ell}{((n+1)^2+\omega_\ell)^{2\ell}}, \quad n\to\infty, \tag{3.11}$$

其中 α_ℓ 和 ω_ℓ 由下面一对递推关系式给出:

$$\alpha_\ell = \pi^2\lambda_{2\ell} + \frac{1}{\ell}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell} - \sum_{k=1}^{\ell-1}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k}, \quad \ell\geqslant 2, \tag{3.12}$$

$$\omega_\ell = \frac{1}{2\ell\alpha_\ell}\left\{\pi^2\lambda_{2\ell+1} - \frac{2}{2\ell+1}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell-1}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}\right\}, \quad \ell\geqslant 2, \tag{3.13}$$

这里 λ_j 由 (3.7) 给出,

$$\alpha_1 = -\frac{16}{45}+\frac{11}{540}\pi^2+\frac{23}{16200\pi^4}, \quad \omega_1 = \frac{-143216640+9994320\pi^2+404712\pi^4+1565\pi^6}{10584(-5760+330\pi^2+23\pi^4)} - 1.$$

证明 为了证明定理 3.1, 设

$$\pi^2 L_{n/2} - \pi^2 c_1 - 4\ln(n+1) \sim 2F_3(n) + F_4(n), \tag{3.14}$$

其中

$$F_3(n) = \ln\left(1+\frac{\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1}{(n+1)^2}\right), \quad F_4(n) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\alpha_\ell}{((n+1)^2+\omega_\ell)^{2\ell}} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\alpha_\ell}{(n+1)^{4\ell}}\left(1+\frac{\omega_\ell}{(n+1)^2}\right)^{-2\ell},$$

这里 α_ℓ 和 ω_ℓ 是待确定的实数.

利用 $\ln(1+t)$ 的 Maclaurin 展开式给出

$$F_3(n) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^j\frac{1}{(n+1)^{2j}}. \tag{3.15}$$

直接计算给出

$$\begin{aligned} F_4(n) &\sim \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{(n+1)^{4j}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2j}{k}\frac{\omega_j^k}{(n+1)^{2k}} \\ &\sim \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{(n+1)^{4j}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+2j-1}{k}\frac{\omega_j^k}{(n+1)^{2k}} \end{aligned}$$

$$\sim \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-2}\alpha_{k+1}\omega_{k+1}^{j-k-2}(-1)^{j-k}\binom{j+k-1}{j-k-2}\frac{1}{(n+1)^{2(j+k)}}$$

$$\sim \sum_{j=2}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}\alpha_k\omega_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}\right\}\frac{1}{(n+1)^{2j}}. \tag{3.16}$$

将 (3.15) 和 (3.16) 代入 (3.14), 可得

$$\pi^2L_{n/2}-\pi^2c_1-4\ln(n+1)\sim\frac{2(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1)}{(n+1)^2}+\sum_{j=2}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^j\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}\alpha_k\omega_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}\right\}\frac{1}{(n+1)^{2j}}. \tag{3.17}$$

另一方面, 根据 (3.9), 我们有

$$\pi^2L_{n/2}-\pi^2c_1-4\ln(n+1)\sim\frac{2(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1)}{(n+1)^2}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\pi^2\lambda_j}{(n+1)^{2j}}, \tag{3.18}$$

其中 λ_j 由 (3.7) 给出. 比较 (3.17) 和 (3.18) 右边 $(n+1)^{-2j}$ 的系数, 我们有

$$\frac{2(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^j+\sum_{k=1}^{\lfloor j/2\rfloor}\alpha_k\omega_k^{j-2k}(-1)^j\binom{j-1}{j-2k}=\pi^2\lambda_j,\quad j\geqslant 2. \tag{3.19}$$

在 (3.19) 中, 分别取 $j=2\ell$ 和 $j=2\ell+1$, 可获得

$$-\frac{1}{\ell}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell}+\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k}=\pi^2\lambda_{2\ell},\quad \ell\geqslant 1, \tag{3.20}$$

$$\frac{2}{2\ell+1}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell+1}-\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}=\pi^2\lambda_{2\ell+1},\quad \ell\geqslant 1. \tag{3.21}$$

对于 $\ell=1$, 从 (3.20) 和 (3.21) 可得

$$\begin{aligned}\alpha_1&=-\frac{16}{45}+\frac{11}{540}\pi^2+\frac{23}{16200\pi^4},\\ \omega_1&=\frac{-143216640+9994320\pi^2+404712\pi^4+1565\pi^6}{10584(-5760+330\pi^2+23\pi^4)}-1;\end{aligned}$$

对于 $\ell\geqslant 2$, 有

$$-\frac{1}{\ell}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell}+\sum_{k=1}^{\ell-1}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k}\binom{2\ell-1}{2\ell-2k}+\alpha_\ell=\pi^2\lambda_{2\ell},$$

$$\frac{2}{2\ell+1}\left(\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}-1\right)^{2\ell+1}-\sum_{k=1}^{\ell-1}\alpha_k\omega_k^{2\ell-2k+1}\binom{2\ell}{2\ell-2k+1}+2\ell\alpha_\ell\beta_\ell=\pi^2\lambda_{2\ell+1},$$

于是获得递推关系式 (3.12) 和 (3.13). 定理 3.1 证毕. □

将 (3.11) 写成

$$L_{n/2} \sim c_1 + \frac{2}{\pi^2} \ln \left(n^2 + 2n + \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{36} \right) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{p_\ell}{(n^2+2n+q_\ell)^{2\ell}}, \tag{3.22}$$

其中

$$p_\ell := \alpha_\ell, \quad q_\ell := 1 + \omega_\ell, \tag{3.23}$$

也就是

$$\begin{aligned} L_{n/2} \sim & \frac{2}{\pi^2} \ln \left(n^2 + 2n + \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{36} \right) + c_1 \\ & + \frac{-\frac{16}{45} + \frac{11}{540}\pi^2 + \frac{23}{16200}\pi^4}{\pi^2 (n^2 + 2n + \frac{-143216640+9994320\pi^2+404712\pi^4+1565\pi^6}{10584(-5760+330\pi^2+23\pi^4)})^2} + \cdots . \end{aligned} \tag{3.24}$$

从计算的观点看, (3.22) 改进了 (3.9).

定理 3.2 对于所有的整数 $n \geqslant 0$, 下面不等式成立:

$$c_1 + \frac{2}{\pi^2} \ln(n^2 + 2n + \mathrm{e}^{\pi^2(1-c_1)/2}) \leqslant L_{n/2} < c_1 + \frac{2}{\pi^2} \ln \left(n^2 + 2n + \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{36} \right), \tag{3.25}$$

而且常数 $\mathrm{e}^{\pi^2(1-c_1)/2} = 1.05353857\cdots$ 和 $\frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{36} = 1.05917765\cdots$ 是最好可能的.

证明 首先证明 (3.25) 的左边不等式. 直接计算给出

$$c_1 + \frac{2}{\pi^2} \ln(n^2 + 2n + \mathrm{e}^{\pi^2(1-c_1)/2}) = 1 \quad \text{和} \quad L_0 = 1,$$

因此, 对于 $n = 0$, (3.25) 的左边不等式中的等号成立.

现在证明 (3.25) 的左边不等式对于 $n \geqslant 1$ 也成立. 根据 (3.8) 的左边不等式, 只需证明

$$F(n) > 0, \quad n \geqslant 1,$$

其中

$$F(x) = 4\ln(x+1) + \frac{12-\pi^2}{18(x+1)^2} - \frac{5040 - 420\pi^2 - 7\pi^4}{10800(x+1)^4} - 2\ln(x^2 + 2x + \mathrm{e}^{\pi^2(1-c_1)/2}).$$

设 $a = \mathrm{e}^{\pi^2(1-c_1)/2}$. 直接计算给出

$$F'(x) = -\frac{U(x-1)}{2700(x+1)^5(x^2+2x+a)},$$

其中 ($U(x)$ 是关于 x 的 4 次多项式, 并且所有的系数都是正的)

$$\begin{aligned} U(x) = & \ 200880 - 2340\pi^2 - (163440 + 780\pi^2 - 7\pi^4)a + 21\pi^4 \\ & + (426240 - 6720\pi^2 + 28\pi^4 - 1200\pi^2 a - 331200a)x \\ & + (336960 - 6480\pi^2 + 7\pi^4 - 300\pi^2 a - 255600a)x^2 \\ & + (115200 - 2400\pi^2 - 86400a)x^3 + (14400 - 300\pi^2 - 10800a)x^4 > 0, \quad x \geqslant 0, \end{aligned}$$

于是获得 $F'(x)<0$, $x\geqslant 1$, 并且有 $F(n)>\lim_{t\to\infty}F(t)=0$, $n\geqslant 1$, 因此, (3.25) 的左边不等式对于所有的 $n\geqslant 0$ 成立, 而且等号成立当且仅当 $n=0$.

其次证明 (3.25) 的右边不等式. 根据 (3.8) 右边不等式, 只需证明 $G(n)<0$, $n\geqslant 0$, 其中

$$\begin{aligned} G(x)=&\,4\ln(x+1)+\frac{12-\pi^2}{18(x+1)^2}-\frac{5040-420\pi^2-7\pi^4}{10800(x+1)^4}\\ &+\frac{937440-78120\pi^2-1302\pi^4-31\pi^6}{952560\pi^2(x+1)^6}-2\ln\left(x^2+2x+\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}\right). \end{aligned}$$

直接计算给出

$$G'(x)=\frac{Q(x)}{793800(x+1)^7(36x^2+72x+48-\pi^2)},$$

其中 ($Q(x)$ 是关于 x 的 4 次多项式, 并且所有的系数都是正的)

$$\begin{aligned} Q(x)=&-155\pi^8+2988\pi^6-141624\pi^4+18144000\pi^2-166561920\\ &+(15276\pi^6-139345920+17136\pi^4+12882240\pi^2)x\\ &+(-2872800\pi^2+92897280-640584\pi^4+7638\pi^6)x^2\\ &+(162570240-9313920\pi^2-649152\pi^4)x^3\\ &+(-162288\pi^4-2328480\pi^2+40642560)x^4>0,\quad x\geqslant 0, \end{aligned}$$

于是获得 $G(n)<\lim_{t\to\infty}G(t)=0$, $n\geqslant 0$, 因此, (3.25) 的右边不等式对于所有的 $n\geqslant 0$ 成立.

将 (3.25) 的右边不等式写成 $\mathrm{e}^{(\pi/2)(L_{n/2}-c_1)}-n^2-2n<\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}$. 利用 (3.9), 我们发现

$$\mathrm{e}^{(\pi/2)(L_{n/2}-c_1)}-n^2-2n=\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty,$$

这给出 $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{(\pi/2)(L_{n/2}-c_1)}-n^2-2n)=\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}$, 因此, (3.25) 上界中的常数 $\frac{4}{3}-\frac{\pi^2}{36}$ 是最好可能的. 定理 3.2 证毕. □

致谢 衷心感谢审稿人对本文所提出的有益修改建议.

参考文献

1 Landau E. Abschätzung der Koeffzientensumme einer Potenzreihe. Arch Math Phys, 1913, 21: 42–50; 250–255
2 Brutman L. A sharp estimate of the Landau constants. J Approx Theory, 1982, 34: 217–220
3 Lebesgue H. Leçons sur les Séries Trigonométriques. Paris: Gauthier-Villars, 1906
4 Watson G A. Approximation Theory and Numerical Methods. New York: John Wiley & Sons, 1980
5 王璆, 高小彬. Lebesgue 常数的一个性质. 华东工程学院学报, 1983, 4: 1–7
6 Cheney E W. 逼近论导引. 徐献瑜, 史应光, 李家楷, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
7 Rivlin T J. An Introduction to the Approximation of Function. New York: Dover Publications, 1969
8 熊规景. Lebesgue 常数估值的新探索. 数学物理学报, 1994, 14: 68–89
9 Watson G N. The constants of Landau and Lebesgue. Q J Math, 1930, 1: 310–318
10 Srivastava H M, Choi J. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Amsterdam-London-New York: Elsevier Science Publishers, 2012
11 Falaleev L P. Inequalities for the Landau constants. Sib Math J, 1991, 32: 896–897
12 Mortici C. Sharp bounds of the Landau constants. Math Comp, 2011, 80: 1011–1011
13 Chen C P. Sharp bounds for the Landau constants. Ramanujan J, 2013, 31: 301–313
14 Chen C P. Approximation formulas for Landau's constants. J Math Anal Appl, 2012, 387: 916–919

15 Nemes G. Proofs of two conjectures on the Landau constants. J Math Anal Appl, 2012, 388: 838–844
16 陈超平, 成军祥. Landau 常数的逼近公式. 数学物理学报, 2014, 34: 1245–1253
17 Zhao D. Some sharp estimates of the constants of Landau and Lebesgue. J Math Anal Appl, 2009, 349: 68–73
18 Cvijović D, Klinowski J. Inequalities for the Landau constants. Math Slovaca, 2000, 50: 159–164
19 Nemes G, Nemes A. A note on the Landau constants. Appl Math Comput, 2011, 217: 8543–8546
20 Li Y T, Liu S Y, Xu S X, et al. Full asymptotic expansions of the Landau constants via a difference equation approach. Appl Math Comput, 2012, 219: 988–995
21 Li Y, Liu S, Xu S, et al. Asymptotics of Landau constants with optimal error bounds. Constr Approx, 2014, 40: 281–305
22 Alzer H. Inequalities for the constants of Landau and Lebesgue. J Comput Appl Math, 2002, 139: 215–230
23 Chen C P. New bounds and asymptotic expansions for the constants of Landau and Lebesgue. Appl Math Comput, 2014, 242: 790–799
24 Chen C P, Choi J. Inequalities and asymptotic expansions for the constants of Landau and Lebesgue. Appl Math Comput, 2014, 248: 610–624
25 Chen C P, Choi J. Asymptotic expansions for the constants of Landau and Lebesgue. Adv Math, 2014, 254: 622–641
26 Cvijović D, Srivastava H M. Asymptotics of the Landau constants and their relationship with hypergeometric functions. Taiwanese J Math, 2009, 13: 855–870
27 Granath H. On inequalities and asymptotic expansions for the Landau constants. J Math Anal Appl, 2012, 386: 738–743
28 Popa E C. Note of the constants of Landau. Gen Math, 2010, 18: 113–117
29 Popa E C, Secelean N A. On some inequality for the Landau constants. Taiwanese J Math, 2011, 15: 1457–1462
30 Popa E C, Secelean N A. Estimates for the constants of Landau and Lebesgue via some inequalities for the Wallis ratio. J Comput Appl Math, 2014, 269: 68–74
31 Fejér L. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen. J Reine Angew Math, 1910, 138: 22–53
32 Gronwall T H. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. Math Ann, 1912, 72: 244–261
33 Hardy G H. Note on Lebesgue's constants in the theory of Fourier series. J Lond Math Soc (2), 1942, 17: 4–13
34 Szegö G. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. Math Z, 1921, 9: 163–166
35 Galkin P V. Estimates for the Lebesgue constants. Proc Steklov Inst Math, 1971, 109: 1–4
36 Wong R. Asymptotic Approximations of Integrals. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001

Asymptotics and inequalities for the constants of Landau and Lebesgue

Chaoping Chen

Abstract The constants of Landau and Lebesgue are defined, for all integers $n \geqslant 0$, respectively, by

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} \binom{2k}{k}^2 \quad \text{and} \quad L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right| dt.$$

In this paper, we give new asymptotic series for G_n and $L_{n/2}$. Based on the obtained results, we establish new inequalities for the constants of Landau and Lebesgue. Let $f \in C[-1,1]$, and let $(s_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ be the partial sum of the Chebyshev expansion of f. Cheney pointed out that, for all n up to 400, one can secure at most one extra decimal place of accuracy in replacing $s_n f$ by the polynomial of best approximation. We prove that Cheney's claim is also true for $n \leqslant 191833603$. Moreover, we show that 191833603 cannot be replaced by a larger integer.

Keywords **Landau constants, Lebesgue constants, inequality, asymptotic expansion**

MSC(2010) **41A60, 26D15**

doi: 10.1360/N012015-00295