作用在有限线性空间上基柱为 $^3D_4(q)$ 的几乎单群*

刘伟俊** 代少军 龚罗中

(中南大学数学科学与计算技术学院，长沙 410075) (湖南科技学院数学系，永州 425006)

摘要 旗传递线性空间的分类完成以后，人们开始关注线传递线性空间. 线传递线性空间可以分为非点本原和点本原两种情形. 根据 Delandtsheer-Doyen 理论，非点本原线传递分类比较容易解决. 而点本原的情形，根据 O'Nan-Scott 理论和 Camina 的一些前期工作，又可以分成基柱为初等交换群或非交换单群两种情形. 本文考虑 T 是非交换单群，$T \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$ 且 G 线传递作用在有限线性空间上的情形. 并获得了一些有用的引理. 特别地，证明了当 T 同构于 $^3D_4(q)$ 时，T 是线传递的，这里 q 是素数 p 的方幂.

关键词 线传递 线性空间 自同构 几乎单群

1 引言

一个线性空间 $\mathcal{S}$ 是由点集合 $\mathcal{P}$ 和线集合 $\mathcal{L}$ 构成的相关结构，使得 $\mathcal{P}$ 中任意两点都恰好包含在唯一的线中. 本文关心的是有一个线传递自同构群的线性空间. 这意味着每一条线都包含着同样数目的点. 我们将此线性空间称为正则线性空间. 并假定 $\mathcal{P}$ 是有限点集，$|\mathcal{L}| > 1$.

设 G 和 $\mathcal{S}$ 分别表示为一个群和一个线性空间，使得 G 是线传递地作用在 $\mathcal{S}$ 上的自同构群. 我们以后假定 $\mathcal{S}$ 的参数为 (b, v, r, k)，其中 b 为线的数目，v 为点的数目，r 表示通过一个点的线的数目，k 表示一条线上点的数目且 $k > 2$. 既然 G 在 $\mathcal{L}$ 上是传递的，则 G 也是在 $\mathcal{P}$ 上传递的，这是 Block 定理的一个结果 [1].

旗传递线性空间的分类完成以后 [2,3]，人们开始关注线传递线性空间. 线传递线性空间可以分为非点本原和点本原两种情形. 根据 Delandtsheer-Doyen 理论，

收稿日期：2005-01-20；接受日期：2006-07-20

* 国家自然科学基金 (批准号:10471152) 资助项目

** E-mail: wjliu@mail.csu.edu.cn

非点本原线传递分类比较容易解决．而点本原的情形，根据 O'Nan-Scott 理论和 Camina 的一些前期工作, 又可以分成基柱为初等交换群或非交换单群两种情形．本文考虑 T 是非交换单群， $T \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$ 且 G 线传递作用在有限线性空间上的情形．在这种情形下， Camina 和他的学生 Spiezia 在 2000 年证明了 T 不能是零散单群 [4]. 在 2003 年， Camina 等 [5] 证明了 T 不能是交错群．当假设 $G = T$ 时，有几个结果 1)[6−9] ．应当指出，当 T 的 Lie 秩比较小时，往往需要将 G 是线传递约化成 T 是线传递．本文是这种约化的一个探索．在这篇文章中，我们证明了下面的定理：

主要定理 设 G 是线传递地作用在一个有限线性空间 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上的几乎单群，且 $L(q) \trianglelefteq G \leqslant \mathrm{Aut}(L(q))$, $L(q)$ 是有限域 $GF(q)$ 上的 Lie 型单群．如果 $L(q)$ 同构于 ${}^3D_4(q)$, 则 $L(q)$ 是线传递的，这里 q 是素数 p 的方幂.

本文第 1 作者和他的学生们首先研究了 G 的基柱的 Lie 秩为 1 的情形．同时也考虑了其他 Lie 秩为 2 的 Lie 型单群，例如 $G_2(q)$ 和 ${}^2F_4(2^{2n+1})$. 其次叙述了一些概念和定义及群 ${}^3D_4(q)$ 和正则线性空间的一些初等结果.

2 概念，定义及初等结果

首先介绍本文所要用到的一些关于有限群理论的定义和概念．对于群的结构将采用下列符号：如果 X 和 Y 是任意有限群，则 $X \cdot Y$ 表示群 X 被群 Y 的一个扩张． $X : Y$ 和 $X^{\cdot}Y$ 分别表示可裂和非可裂扩张． $X \times Y$ 表示 X 和 Y 的直积．符号 $[m]$ 表示任意 m 阶群，而 Z_m 或更简单地 m 表示阶为 m 的循环群．在本文中，群论的其他符号是标准的．另外我们用 $\mathrm{Fix}_\Omega(K)$ 表示 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ 的子群 K 稳定 Ω 中点的集合．设 G 表示一个群．我们用符号 $e(G)$ 表示 G 中对合的数目.

设 G 是一个有限群．如果 H 是群 G 的某个合成列中的一项，则称 H 是次正规的 (subnormal). 称群 G 为拟单的 (quasisimple), 如果它是完全的 (即 $G = G'$) 且 $G/Z(G)$ 是单群，这里 $Z(G)$ 表示 G 的中心.

设 G 和 A 是有限群， Ω 是一个有限集合．一个三元系 (A, G, Ω) 称为是例外的 (exceptional), 如果它们满足以下条件：

(1) G 是 A 的正规子群;

(2) A 和 G 都是 Ω 上的传递置换群;

(3) A 和 G 在 $\Omega \times \Omega$ 上的相同轨道只有 $\Omega \times \Omega$ 中的对角，即 $\{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \Omega\}$.

我们称三元系 (A, G, Ω) 是算术例外的, 如果 A 的一个子群 B 包含 G, 使得 (B, G, Ω) 是例外的，并有 B/G 是循环群．当 A 是一个几乎单的本原置换群时， Guralnick 等 [10] 获得了它们的分类．特别地，当 $\mathrm{Soc(A)}$ 有 Lie 秩不小于 2 时，有下面的引理：

引理 2.1[10] 设 G 是一个几乎单的本原群，且 $L \trianglelefteq A \leqslant \mathrm{Aut}(L)$ 及 L 是非交

1) Spiezia F. Simple groups and automorphisms of linear spaces. Ph.D. thesis, Norwich: University of East Anglia, 1997

换单群．假设存在 A 的子群 B 和 G, 使得 (B,G) 是例外的，其中 G 在 A 中是正规的，B/G 是循环的．设 M 是 A 的一个点稳定子群．若 L 是 Lie 秩不小于 2 且 $L \neq \mathrm{Sp}_4(2)' \cong \mathrm{PSL}_2(9)$, 则 $M \cap L$ 是一个子域群，即一个阶为奇素数 r 的域自同构的中心化子．更进一步地

(i) $r \neq p$ (这里 p 是域的特征);

(ii) 如果 $r=3$, 则 L 是 Sp_4(q) 型群且 q 是偶数;

(iii) 不存在 $\mathrm{Aut}(L)$ 稳定的 r 阶元的 L 共轭类.

现在叙述关于群 $^3D_4(q)$ 的一些基本性质.

Kleidman[11] 决定了 $^3D_4(q)$ 的极大子群

引理 2.2[11]　设 $^3D_4(q) = H_0 \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}(^3D_4(q))$, 这里 q 是素数方幂．假设 M 是 H 的不包含 H_0 的极大子群，则 $M_0 = M \cap H_0$ 与 H_0 共轭于表 1 中子群之一：

表 1

群的结构	群的阶	注记
$[q^9]:(\mathrm{SL}_2(q^3)\circ(Z_{q-1}))\cdot d$	$q^{12}(q^6-1)(q-1)$	$d=(2,q-1)$
$[q^{11}]:((Z_{q^3-1})\circ SL_2(q))\cdot d$	$q^{12}(q^3-1)(q^2-1)$	$d=(2,q-1)$
$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	Lie 型单群
$\mathrm{PGL}_3^{\varepsilon}(q)$	$q^3(q^3-\varepsilon 1)(q^2-1)$	$q>2, 3\mid(q-\varepsilon 1), \varepsilon=\pm$
$^3D_4(q_0)$	$q_0^{12}(q_0^6-1)^2\cdot$ $(q_0^4-q_0^2+1)$	$q=q_0^m, m\neq 3$ 是素数
$L_2(q^3)\times L_2(q)$	$q^4(q^6-1)(q^2-1)$	$2\mid q$
$(\mathrm{SL}_2(q^3)\times\mathrm{SL}_2(q))\cdot 2$	$q^4(q^6-1)(q^2-1)$	q 奇数，对合的中心化子
$(Z_{q^2+\varepsilon q+1}\circ\mathrm{SL}_3^{\varepsilon}(q))\cdot f_\varepsilon\cdot 2$	$2q^3(q^3-\varepsilon 1)^2(q+\varepsilon 1)$	$f_\varepsilon=(3,q-\varepsilon 1), \varepsilon=\pm$
$(Z_{q^2+\varepsilon q+1})^2\cdot\mathrm{SL}_2(3)$	$24(q^2+\varepsilon q+1)^2$	$\varepsilon=\pm$
$(Z_{q^4-q^2+1})\cdot 4$	$4(q^4-q^2+1)$	

引理 2.3[11,12]　(i) 如果 q 是偶数，则 $^3D_4(q)$ 有两个对合共轭类，并且非中心对合的中心化子的阶为 $q^{10}(q^2-1)$.

(ii) 如果 q 是奇数，则 $^3D_4(q)$ 只含有对合共轭类，并且一个对合的中心化子的阶为 $q^4(q^6-1)(q^2-1)$.

引理 2.4[11]　在 H_0 中恰好有 7 个极大 “挠”, 用 T_j 表示这些极大 “挠”, $(0 \leqslant j \leqslant 6)$. T_j 和 $N_{H_0}(T_j)/T_j$ 的结构如表 2 所示.

引理 2.5　设 $q=q_0^m$ $(m \geqslant 3)$ 是素数，$\varepsilon=\pm$, 则

(1) $(q-\varepsilon 1)^2$ 不整除 $|^3D_4(q_0)|$,

(2) $q^2+\varepsilon q+1$ 不整除 $|^3D_4(q_0)|$,

表 2

T_j	T_j 的结构	$N_{H_0}(T_j)/T_j$
T_0	$Z_{q^3-1}\times Z_{q-1}$	D_{12}
T_1	$Z_{(q^3-1)(q+1)}$	$Z_2\times Z_2$
T_2	$Z_{(q^3+1)(q-1)}$	$Z_2\times Z_2$
T_3	$Z_{q^2+q+1}\times Z_{q^2+q+1}$	$\mathrm{SL}_2(3)$
T_4	$Z_{q^2-q+1}\times Z_{q^2-q+1}$	$\mathrm{SL}_2(3)$
T_5	$Z_{q^4-q^2+1}$	Z_4
T_6	$Z_{q^3+1}\times Z_{q+1}$	D_{12}

(3) q^4-q^2+1 不整除 $|{}^3D_4(q_0)|$,

(4) 如果 m 是奇素数，则 $(q_0^4-q_0^2+1, q^6-1)=1$.

引理 2.6 对任意的正整数 $a\geqslant 1$, 下面论断成立:

(1) $(a^2-a+1, a^2+1)=1$.

(2) $(a^2-a+1, a^4-a^2+1)=1$.

(3) $(a^2-a+1, a^4+1)=1$.

(4) $(a^2-a+1, a^8-a^4+1)=1$.

(5) $(a^2-a+1, a^{16}-a^8+1)=1$.

从现在开始，假设 G 是线性空间 $\mathcal{S}$ 的一个自同构群. 设 G 是线传递的，则 $\mathcal{S}$ 是正则线性空间. 我们假定 $\mathcal{S}$ 的参数为 (b,v,r,k), 并且满足以下等式:

$$vr=bk, \tag{2.1}$$

$$v=r(k-1)+1. \tag{2.2}$$

设

$$b_1=(b,v),\quad b_2=(b,v-1),\quad k_1=(k,v),\quad k_2=(k,v-1).$$

显然,

$$k=k_1k_2,\quad b=b_1b_2,\quad r=b_2k_2,\quad v=b_1k_1.$$

在文献 [5] 中，作者定义了有效素数，它整除 b 但不整除 v. 也许这种素数最初被使用是在刘伟俊文 1) 中. 我们知道，每一个 b_2 的素因子都是一个有效素数，因此每一个不是射影平面的线性空间都存在有效素数.

设 L 是 $\mathcal{S}$ 中的一条线，则 G_L 表示 G 中稳定线 L 的稳定子群.

这里有两个在本文中经常用到的事实：第 1 是 G 中任意一个对合和 G_L 中的某个对合是共轭的. 第 2 是如果 G 中有一个对合不稳定 $\mathcal{S}$ 中任何点，则 G 是旗传递的 [16], 因此我们假设每一个对合都至少稳定一个点.

以下论断在研究线性空间的线传递自同构群时是非常有用的.

1) 刘伟俊. 区传递与 $2-(v,k,1)$ 设计. 博士学位论文，杭州：浙江大学， 1998

引理 2.7[14]　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}$ 上． K 是 G 的一个子群. 如果对于任意的 $L\in\mathcal{L}$ 和某个 $\alpha\in\mathcal{P}$, 有 $K\nleqslant G_L$ 及 $K\leqslant G_\alpha$, 则 $N_G(K)\leqslant G_\alpha$.

引理 2.8[15]　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}$ 上. 如果存在一个素数 p, 使得 $p|b$ 但 $p\nmid v$, 则对于某个 $\alpha\in\mathcal{P}$, $N_G(P)\leqslant G_\alpha$, 其中 P 是 G 的 Sylow p 子群.

引理 2.9[16]　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}$ 上. 对于某个 $\alpha\in\mathcal{P}$, P 是 G_α 的一个 Sylow p 子群. 如果 P 不是 G 的 Sylow p 子群，则存在一条通过点 α 的线 L, 使得 $P\leqslant G_L$.

下面的引理在计算稳定点的数目时是非常有用的：

引理 2.10[9]　设 G 是作用在 Ω 上传递的群，K 是 G 中一个元素的共轭类. 设 $x\in K$, $\mathrm{Fix}_\Omega(\langle x\rangle)$ 表示被 $\langle x\rangle$ 稳定的 Ω 中点的集合，则

$$|\mathrm{Fix}_\Omega(\langle x\rangle)|=|G_\alpha\cap K|\cdot|\Omega|/|K|,$$

这里 $\alpha\in\Omega$. 特别地，如果 G 是仅含有一个对合的共轭类，则有

$$|\mathrm{Fix}_\Omega(\langle i\rangle)|=\frac{e(G_\alpha)\cdot|\Omega|}{e(G)},$$

这里 i 是 G 中的对合， $e(G)$ 表示 G 包含对合的数目.

考虑对合作用在 $\mathcal{P}$ 上的轮换分解，我们发现了下面的引理，这是一个非常有用的不等式，并且在本文的定理证明中起着重要的作用：

引理 2.11[17]　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 上， $\mathcal{S}$ 的参数是 (b,v,r,k). 设 i 是 G_L 中的一个对合, 这里 L 是 $\mathcal{S}$ 中的一条线. 令 $f_1=|\mathrm{Fix}_\mathcal{P}(\langle i\rangle)|$ 及 $f_2=|\mathrm{Fix}_\mathcal{L}(\langle i\rangle)|$, 则有以下几种情形出现：

(i) 如果 $f_1=0$ 或对于某条线 L, $\mathrm{Fix}_\mathcal{P}(\langle i\rangle)\subseteq L$ 及 k 是偶数，则有 $f_2=v/k$;

(ii) 如果 $f_1=1$, 则 k 是偶数且 $f_2=(v-1)/k$, 或 k 是奇数且 $f_2=(v-1)/(k-1)$.

(iii) 如果不是情形 (i) 和 (ii), 则有 $f_2>v/k$.

引理 2.12[17]　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 上， $\mathcal{S}$ 的参数是 (b,v,r,k). 设 i 是 G_L 中的一个对合, 这里 L 是 $\mathcal{S}$ 中的一条线. 令 $f_1=|\mathrm{Fix}_\mathcal{P}(\langle i\rangle)|$, $f_2=|\mathrm{Fix}_\mathcal{L}(\langle i\rangle)|$. 如果 $\mathcal{S}$ 不是射影平面且 $f_1\geqslant 2$, 则 $v\leqslant f_2^2$.

引理 2.13　设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 上， $\mathcal{S}$ 的参数是 (b,v,r,k). 设 i 是 G_L 中的一个对合，这里 L 是 $\mathcal{S}$ 中的一条线. 如果 $\mathcal{S}$ 不是射影平面且 $f_1\geqslant 2$, 则 $v<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{G_L}(i)|^2}$.

证明　这是引理 2.12 的一个推论.

最后我们介绍一个由 Gill 博士获得的重要结果 1).

引理 2.14　设 G 点传递作用在一个有限射影平面 $\mathcal{S}$ 上，则要么 $\mathcal{S}$ 是一个 q 阶的 Desarguesian 平面，且 $\mathrm{PSL}(3,q)\leqslant G\leqslant P\Gamma L(3,q)$, 要么 G 没有分支.

1) Gill N. Line-transitive linear spaces. Ph.D. thesis, Cambridge: University of Cambridge, 2005

3 主要定理的证明

首先，我们证明以下 3 个引理.

引理 3.1 设 G 传递地作用在有限集合 Ω 上. 假设在 G 中存在极大子群 H, 使得 H 是 G 的正规子群. 如果 H 不是传递的，则对于某个 $\alpha \in \Omega$, 有 $H_\alpha = G_\alpha$.

证明 假设存在一个元素 $g \in G_\alpha$ 但 $g \notin H_\alpha$, 则 $G = HG_\alpha$ (H 是 G 的极大子群), 因此

$$G/H = HG_\alpha/H \cong G_\alpha/(H \cap G_\alpha) = G_\alpha/H_\alpha,$$

于是

$$|G : G_\alpha| = |H : H_\alpha|.$$

所以 H 在 Ω 上是传递的，这产生了矛盾.

引理 3.2 设 G 线传递地作用在线性空间 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上. 如果 H 是 G 的正规子群且 $|G : H| = s$, s 是素数，但 H 不是线传递的，则要么 $(G, H, \mathcal{P})$ 是例外的，要么 $\mathcal{S}$ 是一个射影平面.

证明 因为 H 不是线传递，且 H 是 G 的极大子群，所以由引理 3.1, 我们得到 $G_L = H_L$. 有两种可能：

假设 H 作用在 $\mathcal{S}$ 上是点传递的，α 和 β 是 $\mathcal{P}$ 中两个点. 设 L 是通过这两点的一条线. 因为 $G_{\alpha,\beta} \leqslant G_L$ 且 $H_{\alpha,\beta} \leqslant H_L$, 则有 $G_{\alpha,\beta} = H_{\alpha,\beta}$. 注意到 $|G_\alpha : H_\alpha| = s$, 故我们可以推出，对所有的对 $\{\alpha, \beta\}$, $|H_\alpha : H_{\alpha,\beta}| < |G_\alpha : G_{\alpha,\beta}|$. 另一方面，考虑到 H 和 G 是 $\mathcal{P}$ 上的置换群， H 和 G 仅有的相同轨道是对角的. 从这个条件我们能得到三元系 $(G, H, \mathcal{P})$ 是例外的.

假设 H 作用在 $\mathcal{S}$ 上不是点传递的. 由 Frattini 论断，对所有的 $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$, 有 $G = N_G(P)H$, 这里 p 是整除 $|H|$ 的任意素数. 若 $N_G(P) \leqslant G_\alpha$, 则 $G = G_\alpha H$, 因而 H 是点传递的，这与假设矛盾. 因此由引理 2.9, $P \leqslant G_\alpha$, $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ 意味着 $P \leqslant G_L$. 现在令 $b_H = |H : H_L|$ 及 $v_H = |H : H_\alpha|$. 如果 p 整除 $|H|$ 但不整除 v_H, 则 H_α 包含一个 H 中的 Sylow p 子群，因此 $P \leqslant H_L$, 于是 $p \nmid b_H$. 反之，整除 b_H 的素数必定是 v_H 的因子. 更进一步 $b = sb_H$ 及 $v = sv_H$ (由引理 3.1, 注意到 $G_L = H_L$ 和 $G_\alpha = H_\alpha$), 因此整除 b 的素数一定是 v 的因子，从而不存在有效素数，因而 $\mathcal{S}$ 是一个射影平面.

下面的论断是有意义的. 对于主要定理的证明非常重要：

引理 3.3 设 $G = T : \langle x \rangle$ 在线性空间 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上是线传递的，则 T 作用在 $\mathcal{P}$ 上是传递的.

证明 如果 $\mathcal{S}$ 是射影平面，则由引理 2.14, 有 $\mathrm{PSL}(3, q) \leqslant T$, 因此 T 在 $\mathcal{P}$ 上是传递的. 如果 T 在 $\mathcal{S}$ 上是线传递的，则由文献 [1] 知 T 是点传递的. 于是我们假定 $\mathcal{S}$ 不是射影平面且 T 不是线传递的. 设 $o(x) = n > 1$ 及 s 是 n 的素因子，则存在一个 G 的正规子群 H, 使得 $|G/H| = s$ 且 H 不是线传递的 (否则用 H 代

替 G). 设 $y = x^{n/s}$. 则 $G/H = \langle yH \rangle$. 由引理 3.2, 知三元系 $(G, H, \mathcal{P})$ 是例外的．因此由文献 [10] 中引理 3.3, 得到 y 恰好稳定 $\mathcal{P}$ 中一个点，记为 α. 考虑 x 作用在 $\mathcal{P}$ 的轮换分解，我们发现除了 α 外， x 不稳定 $\mathcal{P}$ 中其他任意一点．否则与 y 恰好稳定 $\mathcal{P}$ 中一个点相矛盾，因此 $x \in G_\alpha$ 且 $G = TG_\alpha$, 这意味着 T 作用在 $\mathcal{P}$ 上是传递的．

主要定理的证明　因为 $T = {}^3D_4(q) \trianglelefteq G \leqslant \mathrm{Aut}({}^3D_4(q))$, 可以假设 $G = T : \langle x \rangle$, 其中 $x \in \mathrm{Out}(T)$, $\mathrm{Out}(T)$ 是 T 的外自同构群．设 $q = p^a$, a 是正整数， p 是素数．可以假设 x 是一个域自同构．设 $o(x) = m$, 则 $m|a$.

假设 T 作用在 $\mathcal{S}$ 上不是线传递的．更进一步假设 G 是一个阶最小的线传递群，因此存在一个子群 H, 使得 $T \trianglelefteq H \lhd G$, 且 $|G:H|$ 是一个素数和 H 不是线传递的．由引理 3.2, $(G, H, \mathcal{P})$ 是例外的三元系．由引理 3.3, T 是点传递的，因此 x 包含在 G_α 之中但不包含在 G_L 中．再由引理 2.7, 得到 $N_G(\langle x \rangle) \leqslant G_\alpha$. 因为 $\mathrm{GF}(p)$ 是一个被 x 稳定的域，所以 ${}^3D_4(p) \leqslant C_T(x)$. 由引理 2.2, 包含 ${}^3D_4(p)$ 的子群只有子域群，因此对某个整数 d 及 $q = q'^d$, 有 $C_T(x) \cong {}^3D_4(q')$, 从而 $\mathrm{GF}(q')$ 是被 x 所稳定的 $\mathrm{GF}(q)$ 的子域，也就是说， x 稳定 $\mathrm{GF}(q')$ 中所有的元素，因此 d 整除 m. 现在 ${}^3D_4(q') \leqslant G_\alpha \cap T = T_\alpha$, 所以由引理 2.2, 有 $T_\alpha = {}^3D_4(q_0)$, 这里 $q = q_0^c$ 且 $c \mid d$ 有

$$v = \frac{q^{12}(q^6-1)^2(q^4-q^2+1)}{q_0^{12}(q_0^6-1)^2(q_0^4-q_0^2+1)}.$$

设 i 是 T 中的一个对合， I 表示 i 在 G 中的一个共轭类．如果 q 是偶数，则取 i 为一个非中心对合，也就是说， i 不包含在 T 的任意 Sylow 2 子群的中心之中．因此由引理 2.3, 当 q 为偶数时， $|C_G(i)| = q^{10}(q^2-1)m$; 当 q 为奇数时 $|C_G(i)| = q^4(q^6-1)(q^2-1)m$.

另外由引理 2.13, 有 $v < \frac{|C_G(i)|^2}{|C_{G_L}(i)|^2}$, 显然 $|C_{G_L}(i)| \geqslant 2$, 故 $v < |C_G(i)|^2$, 于是，

$$\frac{q^{12}(q^6-1)^2(q^4-q^2+1)}{q_0^{12}(q_0^6-1)^2(q_0^4-q_0^2+1)} < q^{20}(q^2-1)^2m^2 \quad 或 \quad q^8(q^6-1)^2(q^2-1)^2m^2,$$

整理得到

$$q^{12}(q^6-1)^2(q^4-q^2+1) < q^{20}(q^2-1)^2m^2q_0^{28} \quad 或 \quad q^8(q^6-1)^2(q^2-1)^2m^2q_0^{28}.$$

由此可推出

$$q^2 < aq_0^{14},$$

即

$$p^{2a(c-7)/c} < a,$$

这里 $c > 1$ 且 $c|a$, 因此我们得到 $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 或 $c = a = 8$ 且 $p = 2$. 更进一步，当 c 是素数时，由文献 [10] 知 $c \nmid |G_2(p)|$, 因此 c 只可能是 $4, 5, 6$ 或 $c = a = 8$ 且 $p = 2$.

为了完成主要定理的证明，只要排除 $c=4,5,6$ 和 $c=a=8$ 且 $p=2$ 的情形即可.

(1) 当 $c=a=8$ 且 $p=2$ 时，我们有 $q=2^8=256, q_0=2$ 及 $m+8$, 于是

$$v=\frac{2^{84}(2^{128}-2^{112}+2^{96}-2^{81}+2^{65}-2^{49}+2^{32}-2^{16}+1)}{63^2\cdot 13}.$$

由引理 2.3, 当 q 为偶数时， $|C_G(i)|\leqslant 2^{83}(2^{16}-1)$; 由引理 2.13, 有 $v<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{G_L}(i)|^2}$, 由于 $|C_{G_L}(i)|\geqslant 2$, 故 $v<\frac{1}{4}|C_G(i)|^2$. 于是

$$\frac{2^{84}(2^{128}-2^{112}+2^{96}-2^{81}+2^{65}-2^{49}+2^{32}-2^{16}+1)}{63^2\cdot 13}<\frac{2^{166}(2^{16}-1)^2}{4}.$$

整理得到

$$(2^{16}-63^2\cdot 13)2^{112}+(63^2\cdot 13-2^{15})2^{97}+(2^{16}-63^2\cdot 13)2^{80}+2^{65}-2^{49}+2^{32}-2^{16}+1<0.$$

然而 $2^{16}=65536>63^2\cdot 13=51597>2^{15}=32768$, 显然上式不成立，矛盾.

(2) 因为 $T_\alpha={}^3D_4(q_0)$, $q=q_0^c$, 这里 $c=4,5,6$, 所以 $G_\alpha=T_\alpha:\langle x\rangle$ 不包含 G 的 Sylow p 子群. 因此由引理 2.9, $Q_0\leqslant G_L$, 于是 $Q_0\leqslant T\cap G_L=T_L$, 这里 Q_0 是 ${}^3D_4(q_0)$ 的 Sylow p 子群. 由引理 2.2, 我们知道群 T_L 共轭于 ${}^3D_4(q_1)$ 或者是 T 的某个极大子群的子群，这里 q 是 q_1 的方幂且 q_0 整除 q_1.

假设 $T_L={}^3D_4(q_1)$. 此时有 $|C_{T_\alpha}(i)|\leqslant|C_{T_L}(i)|\leqslant|C_{G_L}(i)|$, 则由引理 2.13, 得到 $v<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{G_L}(i)|^2}<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{T_\alpha}(i)|^2}$. 即

$$\frac{q^{12}(q^6-1)^2(q^4-q^2+1)}{q_0^{12}(q_0^6-1)^2(q_0^4-q_0^2+1)}<\left(\frac{q^{10}(q^2-1)m}{q_0^{10}(q_0^2-1)}\right)^2 \quad 或 \quad \left(\frac{q^4(q^6-1)(q^2-1)m}{q_0^4(q_0^6-1)(q_0^2-1)}\right)^2,$$

整理得到

$$q^4<2a^2q_0^4.$$

于是

$$p^{2a}<\sqrt{2}p^{2a/c}\cdot a,$$

这样迫使 $c=1$, 这是一个矛盾. 这个矛盾说明对任意 q_1 及 $q_0\mid q_1$, T_L 不可能包含 ${}^3D_4(q_1)$. 另外，因为 q_0^{12} 整除 $|T_L|$, 所以 T_L 不能是表 1 中最后两行群的子群.

(i) 当 $c=5$ 时，让 K 表示 T_α 中的阶为 $q_0^4-q_0^2+1$ 的循环群，则由引理 2.5(4) 和引理 2.2 可得 $K\leqslant Z_{q^4-q^2+1}$ 且 $K\nleqslant G_L$. 于是由引理 2.7, 我们有 $Z_{q^4-q^2+1}\leqslant N_G(K)\leqslant G_\alpha$, 但这与引理 2.5(3) 矛盾.

(ii) 当 $c=4$ 时，我们有

$$v=\quad q_0^{36}(q_0^2+1)^2(q_0^4-q_0^2+1)(q_0^4+1)(q_0^8-q_0^4+1)(q_0^{16}-q_0^8+1).$$

设 $b=\frac{|G|}{|G_L|}=\frac{|T|m}{|T_L|m_1}=\frac{|T|a_1m}{|M|m_1}$. 这里 M 为 T 的极大子群， $|T|=|T_L|a_1$. 令 $\frac{|T|}{|M|}=b'$, 则 b' 整除 b.

如果 $M\cong[q^9]:(\mathrm{SL}_2(q^3)\circ(Z_{q-1}))\cdot d$, $[q^{11}]:((Z_{q^3-1})\circ\mathrm{SL}_2(q))\cdot d$, $G_2(q)$, $\mathrm{PGL}_3^\varepsilon(q)$, $L_2(q^3)\times L_2(q)$, $(\mathrm{SL}_2(q^3)\times\mathrm{SL}_2(q))\cdot 2$, 或者 $(Z_{q^2+\varepsilon q+1}\circ\mathrm{SL}_3^\varepsilon(q))\cdot f_\varepsilon\cdot 2(\varepsilon=$

$-1)$, 当 $q=q_0^4$ 时有 $q_0^2-q_0+1\geqslant 3$ 整除 q^2+q+1. 于是 $q_0^2-q_0+1$ 整除 b', 即整除 b. 由引理 2.6, $q_0^2-q_0+1$ 不整除 v. 于是存在一个素数 s 整除 $q_0^2-q_0+1$, 使得 $s\mid b$ 但是 $s\nmid v$. 令 S 为 T 的 Sylow s 子群. 由引理 2.8, $N_G(S)\leqslant G_\alpha$. 又 $S\leqslant T_\alpha\leqslant G_\alpha$, 但是 $S\nleqslant T_L$(否则 $S\leqslant T_L\leqslant M$, 故 $s\nmid \frac{|T|}{|T_L|}$, 矛盾), 于是 $S\nleqslant G_L$, 从而得到 $N_T(S)\leqslant T_\alpha$. 由于 $q_0^2-q_0+1$ 整除 q^3-1, 则 $Z_{q^3-1}\leqslant N_T(S)\leqslant T_\alpha$, 即 q^3-1 整除 $|T_\alpha|=|^3D_4(q_0)|(q=q_0^4)$. 显然矛盾.

如果 $M\cong(Z_{q^2+\varepsilon q+1}\circ \mathrm{SL}_3^\varepsilon(q))\cdot f_\varepsilon\cdot 2(\varepsilon=1)$, 由引理 2.4, 令 $K=Z_{q_0^3+1}\times Z_{q_0+1}\leqslant^3 D_4(q_0)$, 但是 $K\nleqslant(Z_{q^2+\varepsilon q+1}\circ\mathrm{SL}_3^\varepsilon(q))\cdot f_\varepsilon\cdot 2$, 故由引理 2.7, 对某个 $\alpha\in\mathcal{P}$, 有 $Z_{q^3-1}\times Z_{q-1}\leqslant N_T(K)\leqslant T_\alpha$. 于是 $|N_T(K)|$ 整除 $|T_\alpha|$, 即 $(q^3-1)(q-1)$ 整除 $|T_\alpha|=|^3D_4(q_0)|(q=q_0^4)$. 显然矛盾.

(iii) 当 $c=6$ 时，我们有

$$v=q_0^{60}(q_0^2+1)^2(q_0^4-q_0^2+1)(q_0^6+q_0^3+1)^2\cdot(q_0^6-q_0^3+1)^2(q_0^{12}-q_0^6+1)^2(q_0^{24}-q_0^{12}+1).$$

当 q 为偶数时, 设 Q_1 为 T_α 的 Sylow 2 子群. 显然不是 T 的 Sylow 2 子群, 故 $Q_1\leqslant T_L$. 设 i 为 T_L 的一个中心对合, 则 Q_1 包含在 T_L 的任意 Sylow 2 子群的中心之中. 于是 $Q_1\leqslant C_{T_L}(i)$, 故有 $|C_{T_L}(i)|\geqslant q_0^{12}$. 由引理 2.3, $|C_G(i)|=q^{10}(q^2-1)m=q_0^{60}(q_0^{12}-1)m$. 由引理 2.13, $v<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{G_L}(i)|^2}<\frac{|C_G(i)|^2}{|C_{T_L}(i)|^2}$. 于是得到以下不等式:

$$v<\frac{q_0^{120}(q_0^{12}-1)^2m^2}{q_0^{24}},$$

整理得到

$$q^2=q_0^{12}<q_0^{15}<m^2<a^2,$$

即 $q=p^a<a$, 由于 $p=2$ 且 $a\geqslant 6$, 故上式不成立，矛盾.

当 q 为奇数时， $|C_G(i)|=q_0^{24}(q_0^{36}-1)(q_0^{12}-1)m$. 由引理 2.13, $|C_{T_L}(i)|<\frac{|C_G(i)|}{\sqrt{v}}$, 得到 $|C_{T_L}(i)|<q_0^2a$. 如果 T_L 中存在一个阶为 $(q_0^3-1)(q_0+1)$ 的循环群 K, 则 $q_0^4<(q_0^3-1)(q_0+1)<|C_K(i)|<|C_{T_L}(i)|$. 故有 $q_0^4<q_0^2a$, 即 $p^a<a^3$. 由于 $p\geqslant 3$ 且 $a\geqslant 6$, 故上式不成立，矛盾. 如果 T_L 中不存在一个阶为 $(q_0^3-1)(q_0+1)$ 的循环群 K, 由引理 2.7, $N_T(K)\leqslant T_\alpha$, 于是 $Z_{q^3-1}\leqslant T_\alpha$. 即 q^3-1 整除 $|T_\alpha|=|^3D_4(q_0)|(q=q_0^6)$. 显然矛盾.

综上所述，我们完成了主要定理的证明.

致谢　本文是第 1 作者在剑桥大学做访问学者期间完成的. 他从 Saxl 教授处获得了很多有价值的建议. 在此对 Saxl 教授表示衷心感谢，同时也感谢 Gill 博士与之进行的有益讨论.

参　考　文　献

1　Block R E. On the orbits of collineation groups. Math Z, 1967, 96(1): 33–49

2 Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J, et al. Linear spaces with flag-transitive automorphism groups. Geometriae Dedicata, 1990, 36(1): 89–94
3 Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J. Finite linear spaces with flag-transitive groups. J Combin Theory Ser. A, 1988, 49(1): 268–293
4 Camina A, Spiezia F. Sporadic groups and automorphisms of linear spaces. J Combin Designs, 2000, 8: 353–362
5 Camina A R, Neumann P M, Praeger C E. Alternating groups acting on finte linear spaces. Proc London Math Society, 2003, 87: 29–53
6 Liu W J. Finite linear spaces admitting a projective group $\mathrm{PSU}(3, q)$ with q even. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 374: 291–305
7 Liu W J. Finite linear spaces admitting a two-dimensional projective linear group. J Combin Theory Series A, 2003, 103: 209–222
8 Liu W J. Suzuki groups and automorphisms of finite linear spaces. Discrete Math. 2003, 269: 181–190
9 Liu W J, Zhou S L, Li H L, et al. Finite linear spaces admitting a ree simple croup. Europ J Combin, 2004, 25: 311–325
10 Guralnick R M, Muller P, Saxl J. The rational function analogue of a question of schur and exceptionality of permutation representations. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003, 162, no 773
11 Kleidman P B. The maximal subgroups of the steinberg triality groups$^3D_4(q)$ and of their automorphism groups. J Algebra, 1988, 115(1): 182–199
12 Thomas G. A cheracterization of groups $D_4^2(q^3)$, $q = 2^n$. J Algebra, 1970, 14: 373–385
13 Camina A R, Siemons J. Block transitive automorphisms of $2-(v, k, 1)$ block designs. Journal of Combinatorial Theory Series A, 1989, 51(2): 268–276
14 Zhou S L, Li H L, Liu W J. The Ree groups $^2G_2(q)$ and $2-(v, k, 1)$ block designs. Discrete Mathematics, 2000, 224: 251–258
15 Liu W J, Li H L, Ma C G. Suzuki groups $Sz(q)$ and $2-(v, k, 1)$ designs. Europ J Combin, 2001, 22(3): 513–519
16 Liu W J. The chevalley groups $G_2(q)$ with q odd and $2-(v, k, 1)$ designs. Europ J Combin, 2003, 24(2): 331–346
17 Liu W J, Li S Z, Gong L Z. Almost simple groups with socle Ree (q) acting on finite linear spaces. Europ J Combin, 2006, 27(6): 788–800