中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 10 期: 1161～1168
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

图的上可嵌入性与独立顶点的度和

吕胜祥 *, 刘彦佩

北京交通大学数学系, 北京 100044

E-mail: lsxx23@yahoo.com.cn, ypliu@bjtn.edu.cn

收稿日期: 2008-08-10; 接受日期: 2009-04-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10771062) 和教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-07-0276) 资助项目

摘要 设 $G=(V,E)$ 是 2 (或 3)-边连通的简单图, 独立数为 α, 围长为 g, $n=|V|$. 若下列条件之一成立: (1) 独立数 $\alpha<3\lfloor\frac{g}{2}\rfloor$(或 $6\lfloor\frac{g-1}{2}\rfloor$); (2) 对 G 中任意含有 $m=3\lfloor\frac{g}{2}\rfloor$(或 $6\lfloor\frac{g-1}{2}\rfloor$) 个顶点的独立集 $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}\subseteq V$, 当 g 为偶数时, $\sum_{i=1}^m d_G(v_i)\geqslant n+4$ (或 $n-11$); 当 g 为奇数时, $\sum_{i=1}^m d_G(v_i)\geqslant n-2$ (或 $n+1$). 则 G 是上可嵌入的.

关键词 最大亏格 上可嵌入性 独立数

MSC(2000) 主题分类 05C10

1 引言

令 $G=(V(G),E(G))$ 为连通图. $S\subseteq V$ 是图 G 的任意顶点子集. 若 S 中任意两个顶点在 G 中均不相邻, 则称 S 为 G 的一个独立集; G 的最大独立集的顶点数称为 G 的独立数, 记为 $\alpha(G)$, 或简单地记作 α. G 中 S 的邻集为与 S 的顶点相邻的所有顶点的集合, 记为 $N_G(S)$; 当 S 只含有一个顶点 v 时, 简记为 $N_G(v)$. 以 S 为顶点集, 以两端点都在 S 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为 G 的由 S 导出的子图, 记为 $G[S]$; $G[S]$ 称为 G 的点导出子图. G 的围长是指 G 中最短圈的长度; 长为 k 的圈称为 k 圈. $\beta(G)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 称为 G 的 Betti 数. $A\subseteq E(G)$ 为图 G 的任意边子集. $G\setminus A$ 表示从 G 中去掉 A 中的所有边后所得到的图. 记号 $c(G\setminus A)$ 表示 $G\setminus A$ 中所有连通分支的个数; $b(G\setminus A)$ 表示 $G\setminus A$ 中所有 Betti 数为奇数的连通分支的个数. 若 T 为图 G 的一棵生成树, 记号 $\xi(G,T)$ 表示 $G\setminus E(T)$ 中边数为奇数的连通分支个数. $\xi(G)=\min_T\xi(G,T)$ 称为 G 的 Betti 亏数, 其中 min 取遍 G 的所有生成树 T. 设 F_1, F_2, F_3, $\ldots$, F_l ($l\geqslant 2$) 为图 G 的 l 个子图, 记号 $E_G(F_1,F_2,\ldots,F_l)$ 表示 G 中两端点分别在不同的 F_i 和 F_j 中的边集 ($i\neq j$). 设 F 为图 G 的一个子图, $E(F,G)$ 表示 G 中一端在 F 上而另一端不在 F 上的边集; 点 $v\in V(F)$, 若它为 $E(F,G)$ 中某 $k\geqslant 1$ 条边的端点, 则称之为 F 的 k-触点. 其它未解释的术语和记号均可参见文献 [1,2].

图 G 的最大亏格, 记为 $\gamma_M(G)$, 是指 G 可 2-胞腔嵌入的亏格为 k 的可定向曲面 S 的最大整数 k. 因为 G 在任意曲面上的 2- 胞腔嵌入至少有一个面, 由 Euler 公式易得

引用格式: 吕胜祥, 刘彦佩. 图的上可嵌入性与独立顶点的度和. 中国科学 A, 2009, 39(10): 1161–1168

$$\gamma_M(G) \leqslant \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor,$$

其中, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 若 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$, 则称图 G 是上可嵌入的.

图的最大亏格一直是拓扑图论中主要研究的问题之一 (参见文献 [3]). 自 Nordhaus 等 [4] 引进图的最大亏格以来, 图的最大亏格及其上可嵌入性至今仍受到广泛的注意. 其中 Liu[2], Xuong[5] 和 Nebeský[6] 给出了如下的关于图的最大亏格及其上可嵌入性的基本结果.

基本定理 令 G 是一个连通图, 则

(1) $\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G))$, 且 G 是上可嵌入的当且仅当 $\xi(G) \leqslant 1$;

(2) $\xi(G) = \max_{A \subseteq E(G)} \{c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - |A| - 1\}$.

在早期的文献 [7] 中, Kunda 证明了所有 4-边连通的图都是上可嵌入的. 然而, 在文献 [8] 中, Jungerman 证明存在 3-边连通而非上可嵌入的的图, 这就导致研究什么样的 $t(t \leqslant 3)$-边连通图是上可嵌入的. 目前, 已有很多文献研究图的上可嵌入性与图的相关不变量的关系, 主要结果可参见文献 [9–17]. 特别地, 文献 [9] 证明了如下结果: 设 $G = (V, E)$ 是一个 2-边连通 (或 3-边连通) 的简单图, 若对于任何 $uv \notin E(G)$ 有

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant \frac{2(|V| - 2)}{3} \left(\text{或 } \frac{|V| + 1}{3} \right),$$

则 G 是上可嵌入的. 进而这个下界是最好的. 本文在此基础上进一步研究, 得到如下结论:

定理 1 令 $G = (V, E)$ 为 2-边连通简单图, 围长为 g, 独立数为 α, $n = |V|$, $k = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$. 若下列条件之一成立:

(1) $\alpha < 3k$;

(2) 当 $g = 2k$ 时, 对 G 中任意的独立集 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{3k}\} \subseteq V$, $\sum_{i=1}^{3k} d_G(v_i) \geqslant n + 4$;

(3) 当 $g = 2k + 1$ 时, 对 G 中任意的独立集 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{3k}\} \subseteq V$, $\sum_{i=1}^{3k} d_G(v_i) \geqslant n - 2$,

则 G 是上可嵌入的.

推论 1 令 $G = (V, E)$ 为 2-边连通简单图, 围长为 g, $k = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, $n = |V|$. 当 $g = 2k$ 时, 若顶点最小度 $\delta \geqslant \frac{n+4}{3k}$; 当 $g = 2k + 1$ 时, 若顶点最小度 $\delta \geqslant \frac{n-2}{3k}$, 则 G 是上可嵌入的.

定理 2 令 $G = (V, E)$ 为 3-边连通简单图, 围长为 g, 独立数为 α, $n = |V|$, $k = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$. 若下列条件之一成立:

(1) $\alpha < 6k$;

(2) 当 $g = 2(k+1)$ 时, 对 G 中任意的独立集 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{6k}\} \subseteq V$, $\sum_{i=1}^{6k} d_G(v_i) \geqslant n - 11$;

(3) 当 $g = 2k + 1$ 时, 对 G 中任意的独立集 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{6k}\} \subseteq V$, $\sum_{i=1}^{6k} d_G(v_i) \geqslant n + 1$,

则 G 是上可嵌入的.

推论 2 令 $G = (V, E)$ 为 3-边连通简单图, 围长为 g, $k = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$, $n = |V|$. 当 $g = 2(k+1)$ 时, 若节点最小度 $\delta \geqslant \frac{n-11}{6k}$; 当 $g = 2k + 1$ 时, 若节点最小度 $\delta \geqslant \frac{n+1}{6k}$, 则 G 是上可嵌入的.

2 基本引理

关于非上可嵌入的图, 黄和刘 [10] 给出了下面的基本性质.

引理 1 令 G 为非上可嵌入的连通图. 则存在边集 $A \subseteq E(G)$ 满足如下性质:

(1) $c(G \backslash A) = b(G \backslash A) \geqslant 2$;

(2) 对 $G \backslash A$ 的任意连通分支 F, F 是 G 的点导出子图;

(3) 对 $G\backslash A$ 的任意 $k \geqslant 2$ 个不同的连通分支 $F_1, F_2, \ldots, F_k$, $|E_G(F_1, F_2, \ldots, F_k)| \leqslant 2k-3$; 特别地, 当 $k=2$ 时, $|E_G(F_1, F_2)| \leqslant 1$.

由引理 1, 可以注意到以下的事实:

事实 1 对 $G\backslash A$ 的任意连通分支 F, $\beta(F) \geqslant 1$, 所以 F 中含有圈. 进而, $|V(F)| \geqslant g$, g 为图 G 的围长.

事实 2 $|A| = \frac{1}{2}\sum_F |E(F,G)|$, 其中 F 取遍 $G\backslash A$ 的每个连通分支.

为了方便, 在下面遇到的非上可嵌入的图 G 中, 我们始终令边集 $A \subseteq E(G)$ 满足引理 1 的条件和结论, $l = c(G \setminus A)$, $F_1, F_2, \ldots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的所有连通分支. 用记号 $d(G\backslash A)$ 表示 $G\backslash A$ 中满足 $|E(F,G)| \leqslant 3$ 的连通分支 F 的个数.

引理 2 令 G 为非上可嵌入的图. 若 G 是 2-边连通的, 则 $d(G\backslash A) \geqslant 3$; 若 G 是 3-边连通的, 则 $d(G\backslash A) \geqslant 6$.

证明 因为当 G 是 2-边连通时, 有 $|E(F_i,G)| \geqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. 记 x 和 y 分别为使得 $|E(F_i,G)| = 2$ 和 $|E(F_i,G)| = 3$ 的连通分支 F_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ 的数目. 由事实 2, 可得

$$|A| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} |E(F_i,G)| \geqslant x + \frac{3}{2}y + 2(l-x-y).$$

结合引理 1 (3), 整理得

$$2l - x - \frac{1}{2}y \leqslant 2l - 3,$$

即 $x + \frac{1}{2}y \geqslant 3$, 从而

$$x + y \geqslant x + \frac{1}{2}y \geqslant 3,$$

即 $d(G\backslash A) \geqslant 3$.

当 G 是 3-边连通时, 则 $|E(F_i,G)| \geqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, 于是可以相似的证明.

引理 3 令 G 是非上可嵌入的简单图, 围长为 g. 若 F_1, F_2, F_3 为 $G\backslash A$ 中满足 $|E(F_i,G)| \leqslant 3$ 的 3 个连通分支. C_i 是 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中的最短圈. 则存在 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的独立集 $A_i \subseteq V(C_i)$ 满足下面的性质:

(1) $|A_i| \geqslant \lfloor \frac{g}{2} \rfloor (1 \leqslant i \leqslant 3)$, 且 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ 是图 G 的一个独立集;

(2) 当 g 为偶数. 若 $l=3$, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中至多有一个 1-触点; 若 $l \geqslant 4$, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中至多有一个 2-触点或者两个 1-触点;

(3) 当 g 为奇数. 若 $l=3$, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中无触点; 若 $l \geqslant 4$, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中至多有一个 1-触点.

证明 记 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的最短圈为 $C_i = v_i^{(1)} v_i^{(2)} \cdots v_i^{(g)} \cdots v_i^{(1)}$. 下面根据围长 g 的奇偶性分两种情形来证明.

情形 1 当 g 为偶数时. 首先, 取 $x_i \in V(F_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是 F_i 中连接 F_{i+1} 的触点 (其中当 $i=3$ 时, F_{i+1} 表示 F_1); 若 F_i 中不存在这样的触点, 则任取一个触点. 对 $1 \leqslant i \leqslant 3$, 令集合

$$A_i^{(1)} = \{v_i^{(j)} |\ j\text{为奇数, 且 } v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus x_i\},$$

$$A_i^{(2)} = \{v_i^{(j)} |\ j\text{为偶数, 且 } v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus x_i\}.$$

因为 C_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是 F_i 的最短圈, 所以 $A_i^{(j)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3,\ j = 1,2)$ 都是 F_i 的独立集, 而且必成立

$$|A_i^{(1)}| \geqslant \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor \quad 或 \quad |A_i^{(2)}| \geqslant \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor.$$

否则, 可以得到

$$g-1 \leqslant |V(C_i) \setminus x_i| = |A_i^{(1)} \cup A_i^{(2)}| = |A_i^{(1)}| + |A_i^{(2)}| \leqslant \left(\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - 1\right) + \left(\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - 1\right).$$

又 g 为偶数, 整理即得

$$g-1 \leqslant g-2.$$

矛盾. 于是, 不妨假设 $|A_i^{(1)}| \geqslant \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. 由引理 1, $|E(F_i,F_j)| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i,j \leqslant 3,\ i \neq j)$ 且 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是 G 的点导出子图, 再根据 x_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的取法, 则对 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中的独立集 $A_i^{(1)} \subseteq V(F_i) \setminus x_i$, 显然集合 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i^{(1)}$ 是图 G 的独立集. 而且, 当 $l \geqslant 4$ 时, 因为 $|E(F_i,G)| \leqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 所以 $A_i^{(1)} \subseteq V(F_i) \setminus x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 至多有一个 2-触点或者两个 1-触点; 当 $l = 3$ 时, 由引理 1, 可得 $|E(F_i,G)| \leqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 所以 $A_i^{(1)} \subseteq V(F_i) \setminus x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 至多有一个 1-触点.

情形 2 当 g 为奇数时. 首先, 取集合 $\{x_i, y_i\} \subseteq V(F_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是 F_i 中连接 F_{i-1} 和 F_{i+1} 的触点 (其中当 $i = 3$ 时, F_{i+1} 表示 F_1; 当 $i = 1$ 时, F_{i-1} 表示 F_3), 若 F_i 中不存在这样的集合, 则任取其中的触点. 对 $1 \leqslant i \leqslant 3$, 令集合

$$A_i^{(1)} = \{v_i^{(j)} |\ j 为奇数, 且\ v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}\},$$
$$A_i^{(2)} = \{v_i^{(j)} |\ j 为偶数, 且\ v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}\}.$$

于是, 与情形 1 完全相同的讨论, 我们也可假设 $|A_i^{(1)}| \geqslant \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 使得集合 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i^{(1)}$ 也是图 G 的独立集. 又因为当 $l \geqslant 4$ 时, $|E(F_i,G)| \leqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 所以 $A_i^{(1)} \subseteq V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 至多有一个 1-触点; 而当 $l = 3$ 时, 因为 $|E(F_i,G)| \leqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 所以 $A_i^{(1)} \subseteq V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 无触点.

引理 4 令 G 是非上可嵌入的简单图, 围长为 g. 若 $F_1, F_2, \ldots, F_6$ 为 $G \backslash A$ 中满足 $|E(F_i,G)| \leqslant 3$ 的 6 个连通分支. C_i 是 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的最短圈. 则存在 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的独立集 $A_i \subseteq V(C_i)$ 满足下面的性质:

(1) $|A_i| \geqslant \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor (1 \leqslant i \leqslant 6)$, 且 $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$ 是图 G 的一个独立集;

(2) 当 g 为偶数, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中无触点;

(3) 当 g 为奇数, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中至多有一个 1-触点.

证明 记 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的最短圈为 $C_i = v_i^{(1)} v_i^{(2)} \cdots v_i^{(g)} \cdots v_i^{(1)}$. 取点集 $\{x_i, y_i, z_i\} \subseteq V(F_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 使得 $V(F_i) \setminus \{x_i, y_i, z_i\}$ 中不含有触点, 因为 $|E(F_i,G)| \leqslant 3$, 所以这样的点集是存在的. 下面根据围长 g 的奇偶性分两种情形来证明.

情形 1 当 g 为偶数时. 对 $1 \leqslant i \leqslant 6$, 令集合

$$A_i^{(1)} = \{v_i^{(j)} |\ j 为奇数, 且\ v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i, z_i\}\},$$
$$A_i^{(2)} = \{v_i^{(j)} |\ j 为偶数, 且\ v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i, z_i\}\}.$$

与引理 3 的情形 1 相似的讨论, 必成立

$$|A_i^{(1)}| \geqslant \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor \quad 或 \quad |A_i^{(2)}| \geqslant \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor.$$

于是, 不妨假设 $|A_i^{(1)}| \geqslant \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$. 显然, $\bigcup_{i=1}^{6} A_i^{(1)}$ 是图 G 的独立集, 而且 $A_i^{(1)} \subseteq V(F_i) \setminus \{x_i, y_i, z_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 无触点.

情形 2 当 g 为奇数时. 构造一个新图 G^*:

$$V(G^*) = \bigcup_{i=1}^{6} \{x_i, y_i, z_i\}, \qquad E(G^*) = E_G(F_1, F_2, \ldots, F_6) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{6} E(C_i^*) \right).$$

其中 C_i^* $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 为 G^* 中的 3-圈 $x_i y_i z_i x_i$. 显然 $G^* \setminus E_G(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ 有 6 个连通分支 $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_6^*$. 下面我们先证明存在 $v_i \in V(C_i^*)(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 使得 $\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ 为图 G^* 的独立集且 v_i 最多为 $C_i^*(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的 1-触点.

首先, 假设 G^* 中的每个顶点都是触点, 因为 $|E(F_i, G)| \leqslant 3$, 所以每个顶点都是 1-触点. 于是不妨令边集 $\{x_6 z_5, y_6 z_4, z_6 x_3\} \subseteq E(F_6, G)$. 根据引理 3 的证明可知, 在点集 $V(C_1^*)$, $V(C_2^*)$ 和 $V(C_3^*) \setminus x_3$ 中各存在一个顶点使得它们是 G 的独立集, 不妨假设为 $\{z_1, z_2, z_3\}$. 由假设,G^* 的每个顶点都为 1-触点, 所以可得 $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ 是 G^* 的独立集且每个顶点至多为 1-触点. 其次, 若存在某个分支 $C_i^*(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中的顶点 v_i 不是触点, 则用 v_i 代替上面集合中的 z_i 也可得到同样的结论.

于是令 $\{z_1, z_2, \ldots, z_6\}$ 为 G^* 的独立集, 且 $z_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 最多为 C_i^* 的 1-触点. 根据 G^* 的构造过程, 则 $\{z_1, z_2, \ldots, z_6\}$ 也是图 G 的独立集, 且 $z_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 最多为 F_i 的 1-触点. 又因为 $V(F_i) \setminus \{x_i, y_i, z_i\}$ 中不含有触点, 所以 $V(F_i) \setminus \{x_i, y_i\}$ 中最多有一个 1-触点, 且对 F_i 中任意的独立集 $B_i \subseteq V(F_i) \setminus \{x_i, y_i\}$, $\bigcup_{i=1}^{6} B_i$ 也是图 G 的独立集. 我们令

$$A_i^{(1)} = \{v_i^{(j)} |\, j\text{为奇数, 且 } v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}\},$$
$$A_i^{(2)} = \{v_i^{(j)} |\, j\text{为偶数, 且 } v_i^{(j)} \in V(C_i) \setminus \{x_i, y_i\}\}.$$

于是, 与前面同样的讨论, 也可得结论成立.

引理 5 令 $G = (V, E)$ 是连通图, 围长为 $g \geqslant 5$. $C = v_1 v_2 v_3 \cdots v_g v_1$ 为 G 的一个最短圈, 则对圈 C 中任意 $k \geqslant 1$ 个顶点 $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, 有 $\sum_{j=1}^{k} d_G(v_{i_j}) \leqslant |V| - g + 2k$.

证明 首先, 任取圈 C 中两个顶点 v_i 和 v_j $(i \neq j)$, 若存在顶点 $u \in V(G) \setminus V(C)$, 使得 $\{uv_i, uv_j\} \subseteq E(G)$, 则可得圈 $C_1 = v_i v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_j u v_i$ 和 $C_2 = v_j v_{j+1} v_{j+2} \cdots v_i u v_j$. 显然, $|C_1| + |C_2| = g + 4$, 这与围长为 $g \geqslant 5$ 矛盾. 于是, 圈 C 中的任意两个顶点在 $V(G) \setminus V(C)$ 中都没有公共的邻接顶点, 但圈 C 中的每个顶点在 C 中正好有两个邻接顶点. 因此, 对圈 C 的任意 $k \geqslant 1$ 个顶点 $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, 可得

$$\sum_{j=1}^{k} (d_G(v_{i_j}) - 2) \leqslant |V(G) \setminus V(C)| = |V| - g,$$

整理即得

$$\sum_{j=1}^{k} d_G(v_{i_j}) \leqslant |V| - g + 2k.$$

3 定理的证明

定理 1 的证明 假设 G 不是上可嵌入的. 令 $F_1, F_2, \ldots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的 l 个连通分支. 由引理 2, 可令 $|E(F_i, G)| \leqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. 用 $C_i = v_i^{(1)} v_i^{(2)} \cdots v_i^{(g)} \cdots v_i^{(1)}$ 表示 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$

中的最短圈.

(1) 根据引理 3, 当 $\alpha < 3k$ 时, 显然 G 是上可嵌入的.

(2) 当 $g=4$ 时, 不妨假设 $v_i^{(1)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 就是 F_i 中连接 F_{i+1} 的触点 (其中当 $i=3$ 时, F_{i+1} 表示 F_1). 首先, 如果存在顶点 $u \in V(F_i) \setminus V(C_i)$ 使得 $\{uv_i^{(2)}, uv_i^{(4)}\} \subseteq E(F_i)$, 则 $uv_i^{(2)}v_i^{(3)}v_i^{(4)}u$ 也是 F_i 的一个最短圈, 而且 $\{u, v_i^{(3)}\} \subseteq V(F_i) \setminus v_i^{(1)}$ 也是 F_i 的独立集. 显然成立

$$(N_{F_i}(v_i^{(2)}) \cup N_{F_i}(v_i^{(4)})) \cap (N_{F_i}(u) \cup N_{F_i}(v_i^{(3)})) = \emptyset,$$

否则 F_i 中必存在 3- 圈. 又因为

$$(N_{F_i}(v_i^{(2)}) \cup N_{F_i}(v_i^{(4)})) \cup (N_{F_i}(u) \cup N_{F_i}(v_i^{(3)})) \subseteq V(F_i),$$

所以有

$$|N_{F_i}(v_i^{(2)}) \cup N_{F_i}(v_i^{(4)})| + |N_{F_i}(u) \cup N_{F_i}(v_i^{(3)})| \leqslant |V(F_i)|.$$

于是, 可得

$$|N_{F_i}(v_i^{(2)}) \cup N_{F_i}(v_i^{(4)})| \leqslant \frac{1}{2}|V(F_i)| \text{ 或 } |N_{F_i}(u) \cup N_{F_i}(v_i^{(3)})| \leqslant \frac{1}{2}|V(F_i)|.$$

展开即得

$$d_{F_i}(v_i^{(2)}) + d_{F_i}(v_i^{(4)}) \leqslant |V(F_i)| \quad \text{或} \;\; d_{F_i}(u) + d_{F_i}(v_i^{(3)}) \leqslant |V(F_i)|.$$

其次, 如果不存在顶点 $u \in V(F_i) \setminus V(C_i)$, 使得 $\{uv_i^{(2)}, uv_i^{(4)}\} \subseteq E(F_i)$, 则与引理 5 中相似的讨论有

$$d_{F_i}(v_i^{(2)}) - 2 + d_{F_i}(v_i^{(4)}) - 2 \leqslant |V(F_i)| - 4,$$

即

$$d_{F_i}(v_i^{(2)}) + d_{F_i}(v_i^{(4)}) \leqslant |V(F_i)|.$$

根据上面的讨论, 所以可以假设

$$d_{F_i}(v_i^{(2)}) + d_{F_i}(v_i^{(4)}) \leqslant |V(F_i)|, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{1}$$

于是令 $A_i = \{v_i^{(2)}, v_i^{(4)}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 因为 C_i 是 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中的最短圈, $A_i = \{v_i^{(2)}, v_i^{(4)}\} \subseteq V(C_i) \setminus v_i^{(1)}$, 所以 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ 是图 G 的独立集. 而且, 和引理 3 的情形 1 相同的讨论, 当 $l=3$ 时, A_i 中最多有一个 1-触点, 结合方程 (1) 与定理条件 (2), 可得

$$n + 4 \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} d_G(v_i^{(j)}) \leqslant \sum_{i=1}^{3} (|V(F_i)| + 1).$$

整理可得

$$n + 1 \leqslant |V(F_1)| + |V(F_2)| + |V(F_3)|,$$

矛盾. 而当 $l=4$ 时, 则 A_i 中最多有一个 2-触点或两个 1-触点, 同样也可得

$$n + 4 \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} d_G(v_i^{(2)}) \leqslant \sum_{i=1}^{3} (|V(F_i)| + 2),$$

整理可得

$$n - 2 \leqslant |V(F_1)| + |V(F_2)| + |V(F_3)|.$$

但另一方面, 因为 $l \geqslant 4$ 和 $|V(F_i)| \geqslant 3$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, 所以应有

$$|V(F_1)| + |V(F_2)| + |V(F_3)| \leqslant n - 3.$$

产生矛盾.

当 $g \geqslant 6$ 且为偶数时, 根据引理 3, 存在 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的独立集 $A_i \subseteq V(C_i)$ 使得 $|A_i| = k$ 且 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ 是图 G 的一个独立集; 而且, 当 $l = 3$ 时, A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中最多有一个 1-触点; 当 $l = 4$ 时, A_i 中最多有一个 2-触点或两个 1-触点. 记 $A_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)}\} \subseteq V(C_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. 因为 $g \geqslant 6$, 根据引理 5, 可得

$$\sum_{j=1}^{k} d_{F_i}(x_i^{(j)}) \leqslant |V(F_i)| - g + 2k = |V(F_i)|, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

然后, 和前面相同的讨论, 也可导出矛盾.

(3) 当 $g = 2k + 1$ 为奇数时. 根据引理 3, 存在 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 的独立集 $A_i \subseteq V(C_i)$, 使得 $|A_i| = k$ 且 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ 是图 G 的独立集; 而且, 当 $l = 3$ 时, A_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中无触点; 当 $l = 4$ 时, $A_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 中最多有一个 1-触点. 记 $A_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)}\} \subseteq V(C_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. 当 $g = 2k + 1 \geqslant 5$ 时, 根据引理 5, 成立

$$\sum_{j=1}^{k} d_{F_i}(x_i^{(j)}) \leqslant |V(F_i)| - g + 2k = |V(F_i)| - 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

而当 $g = 3$ 时, 即 $k = 1$, 显然, 上面的方程也是成立的. 于是结合定理的条件 (3), 同样也可导出矛盾. 综合以上的讨论, 图 G 是上可嵌入的.

定理 2 的证明 假设 G 不是上可嵌入的. 令 $F_1, F_2, \ldots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的 l 个连通分支. 由引理 2, 可令 $|E(F_i, G)| \leqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$. 用 C_i 表示 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中的最短圈. 根据引理 4, 存在 F_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的独立集 $A_i \subseteq V(C_i)$ 使得 $|A_i| = k$ 且 $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$ 是图 G 的独立集; 而且当 g 为偶数时, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中无触点; 当 g 为奇数时, 则 A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中至多有一个 1-触点. 记 $A_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)}\} \subseteq V(C_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$. 首先, 当 $g \geqslant 5$ 时, 根据引理 5, 可得

$$\sum_{j=1}^{k} d_{F_i}(x_i^{(j)}) \leqslant |V(F_i)| - g + 2k, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6. \tag{2}$$

又因为当 $g = 3, 4$ 时, $k = 1$, 显然, 可验证上面的方程 (2) 也是成立的. 于是, 根据引理 4, 和定理 1 的证明相仿, 同样可得图 G 是上可嵌入的.

致谢 对审稿人的宝贵意见表示衷心的感谢.

参考文献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: MacMillan, 1976
2 Liu Y P. Embedability in Graphs. Boston: Kluwer, 1995
3 Gross J L. Topological Graph Theory. New York: Wiley, 1989
4 Nordhaus E, Stewart B, White A. On the maximum genus of a graph. *J Combin Theory Ser B*, **11**: 258–267 (1971)

5 Xoung N H. How to determine the maximum genus of a graph. *J Combin Theory Ser B*, **26**: 216–227 (1979)
6 Nebeský L. A new characterization of the maximum genus of a graph. *Czechhoslovk Math J*, **31**(106): 604–613 (1981)
7 Kunda S. Bounds on the number of disjoint spanning trees. *J Combin Theory Ser B*, **17**: 199–203 (1974)
8 Jungerman M A. Characterization of upper embeddable graphs. *Trans Amer Math Soc*, **17B**(241): 401–406 (1978)
9 黄元秋, 刘彦佩. 图的上可嵌入性与非邻节点度和. 数学年刊 A 辑, **5**(19): 651–656 (1998)
10 黄元秋, 刘彦佩. 关于图的最大亏格的一个定理改进. 应用数学, **2**(11): 109–112 (1998)
11 Jaeger F, Payan C, Xuong N H. A class of upper embeddable graphs. *J Graph Theory*, **3**: 387–391 (1979)
12 Škoviera M. The maximum genus of graphs of diameter two. *Discrete Math*, **87**: 175–180 (1991)
13 Huang Y Q, Liu Y P. Face size and the maximum genus of a graph 1: simple graph. *J Combin Theory Ser B*, **80**: 356–370 (2000)
14 Huang Y Q, Liu Y P. Face size and the maximum genus of a graph part 2: nonsimple graphs. *Math Slovaca*, **51**(2): 129–140 (2001)
15 董广华, 刘彦佩. 关于图的最大亏格的结果. 中国科学 A 辑: 数学, **37**(4): 497–503 (2007)
16 Dong G H, Liu Y P. Up-embeddability via girth and the degree-sum of adjacent vertices. *Sci China Ser A*, **52**(3): 597–604 (2009)
17 欧阳章东, 唐玲, 黄元秋. 上可嵌入性, 边独立数和围长. 中国科学 A 辑: 数学, **39**(2): 225–232 (2009)