中 国 科 学 (A 辑)
第 28 卷 第 10 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1998 年 10 月

Banach 空间值鞅的原子分解 *

刘培德 侯友良

(武汉大学数学系, 武汉 430072)

摘要 研究了 B 值鞅的若干类型的原子, 讨论了 B 值鞅的原子分解以及在 $0<\alpha\leqslant 1$ 情形某些鞅空间的相互关系, 其中的结果与值空间的凸性和光滑性有着密切的联系.

关键词 **B** 值鞅 鞅空间 原子分解 **Banach** 空间几何学

70 年代中期引进的原子分解方法[1~3] 在调和分析与鞅论中有着重要的作用, 它是一种简捷有力的工具, 不仅可以将单指标和多指标的情形一并处理, 而且可以提供通常情形难以处理的问题的答案. 本文将讨论 Banach 空间值鞅的原子分解, 并应用原子分解方法建立 B 值鞅的若干不等式; 在小指标的情形, 即 $0<\alpha\leqslant 1$ 时建立某些鞅空间, 例如 $H_\alpha(X)$ 与 ${}_pH_\alpha(X)$ 之间的相互嵌入关系; 某些类型原子分解的存在性和鞅空间的嵌入关系都与值空间的几何性质有着紧密的联系. B 值鞅的原子分解理论是向量值调和分析的一个组成部分.

设 (Ω, Σ, P) 是完备概率空间, X 是 Banach 空间, X 上的范数记为 $\|\cdot\|$. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是与 Σ 的某个递增子 σ 代数序列 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的 X 值鞅. 记 $\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f_n)_{n\geqslant 0}$ 为 f 的鞅差序列, 其中 $\mathrm{d}f_n=f_n-f_{n-1}$, $n\geqslant 0$, $f_{-1}\equiv 0$. 若 $0<p<\infty$, 记

$$f_n^*=\sup_{i\leqslant n}\|f_i\|,\qquad f^*=\sup_{n\geqslant 0}f_n^*,$$

$$\sigma_n^{(p)}(f)=\left(\sum_{i=0}^{n}E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\mid\Sigma_{i-1})\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \sigma^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 0}\sigma_n^{(p)}(f),$$

$$S_n^{(p)}(f)=\left(\sum_{i=0}^{n}\|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad S^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 0}S_n^{(p)}(f).$$

本文将讨论 $0<\alpha\leqslant 1$ 情形的 B 值鞅的下述空间:

$$H_\alpha=\{f=(f_n);\ \|f\|_{H_\alpha}=\|f^*\|_\alpha<\infty\},$$

$${}_pH_\alpha=\{f=(f_n);\ \|f\|_{{}_pH_\alpha}=\|S^{(p)}(f)\|_\alpha<\infty\},\quad 0<p<\infty,$$

$${}_p\Sigma_\alpha=\{f=(f_n);\ \|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}=\|\sigma^{(p)}(f)\|_\alpha<\infty\},\quad 0<p<\infty.$$

设 (λ_n) 是非负不减适应 R. V. 序列, 记 $\lambda_\infty=\lim_{n\to\infty}\lambda_n$. 定义

1998-01-14 收稿, 1998-06-18 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19771063)

$$\mathscr{D}_\alpha=\{f=(f_n);\ \exists(\lambda_n),\ \|f_n\|\leqslant\lambda_{n-1},\lambda_\infty\in L_\alpha\},$$
$$\|f\|_{\mathscr{D}_\alpha}=\inf\|\lambda_\infty\|_\alpha.$$
$${}_p\mathscr{Q}_\alpha=\{f=(f_n);\ \exists(\lambda_n),\ S_n^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{n-1},\lambda_\infty\in L_\alpha\},$$
$$\|f\|_{{}_p\mathscr{Q}_\alpha}=\inf\|\lambda_\infty\|_\alpha.$$

以下用 E_n 表示关于 Σ_n 的条件期望, E 表示期望. 类似于标量值情形, 一个 X 值可测函数 a 称为 $(1,\alpha,r;p)$(或 $(2,\alpha,r;p)$, $(3,\alpha,r)$)原子(这里 $0<\alpha, r\leqslant\infty, 1\leqslant p<\infty$), 若存在停时 τ, 使得

(i) $a_n=\mathrm{E}_n a=0$, $\forall n\leqslant\tau$,

(ii) $\|\sigma^{(p)}(a)\|_r\leqslant\mathrm{P}(\tau<\infty)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}$(或 (ii$'$) $\|S^{(p)}(a)\|_r\leqslant\mathrm{P}(\tau<\infty)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}$, (ii$''$) $\|a^*\|_r\leqslant\mathrm{P}(\tau<\infty)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}}$).

已经知道 B 值鞅的不等式、鞅空间的相互关系都与值空间的几何性质有着紧密的联系. 文献[4, 5] 对此作了系统地阐述. 有关 Banach 空间的凸性、光滑性和 RN 性质的定义及有关结论见文献[5～7]. 本文仍沿用文献[5] 中的符号与术语, 特别地将用到其中的下述结果:

引理 1[4]　设 X 是 Banach 空间, $1<p\leqslant2$, $1<\alpha<\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间;

(ii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足 $\|f^*\|_\alpha\leqslant C\|S^{(p)}(f)\|_\alpha$;

(iii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足 $\|f^*\|_\alpha\leqslant C\|\sigma^{(p)}(f)\|_\alpha$;

(iv) 对每个 X 值鞅 $f=(f_n)$, 若 $\mathrm{E}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty\left(\text{或 Walsh-Paley 鞅}, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^p\in \mathrm{L}_\infty\right)$, 则 f_n a.e. 收敛或依概率收敛.

引理 2[4]　设 X 是 Banach 空间, $2\leqslant q<\infty$, $1<\alpha<\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 一致凸空间;

(ii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足 $\|S^{(q)}(f)\|_\alpha\leqslant C\|f^*\|_\alpha$;

(iii) 对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)$, 若 $\sup\limits_{n\geqslant0}\|f_n\|_1<\infty$(或 Walsh-Paley 鞅, $\sup\limits_{n\geqslant0}\|f\|_\infty<\infty$), 则 $S^{(p)}(f)<\infty$, a.e.

1　原子分解

定理 1　设 X 是 Banach 空间, $1<p\leqslant2$, $0<\alpha\leqslant1$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间;

(ii) ${}_p\Sigma_\alpha$ 中的每个鞅 $f=(f_n)$ 存在分解

$$f_n=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k\mathrm{E}_n a^k,\quad n\geqslant0 \tag{1}$$

并且

$$\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}\sim\inf\left(\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2}$$

这里 a^k 是 $(1,\alpha,\infty;p)$ 原子, $k\in\mathrm{Z}$, 并且 $\sup\limits_k\|a^{k*}\|_\alpha<\infty$. $(\mu_k)_{k\in\mathrm{Z}}$ 是非负实数列, $(\mu_k)\in \mathrm{l}_\alpha$.

(2)式中的 inf 是对 f 的所有如上的原子分解取的．此时级数 $\sum_{k\in Z}\mu_k a^k$ 依 ${}_p\Sigma_\alpha$ 范数收敛于 f．

证　(i)⇒(ii)．设 $f=(f_n)\in {}_p\Sigma_\alpha$．对每个 $k\in Z$，定义

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant 0:\ \sigma_{n+1}^{(p)}(f)>2^k\},\quad \inf\varnothing=\infty,$$

$\tau_k\uparrow\infty$．考虑停止鞅 $f^{(\tau_k)}=(f_{\tau_k\wedge n})_{n\geqslant 0}$，有

$$\sum_{k\in Z}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})=\sum_{k\in Z}\left(\sum_{m=0}^n I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}\mathrm{d}f_m-\sum_{m=0}^n I_{\{m\leqslant\tau_k\}}\mathrm{d}f_m\right)=$$

$$\sum_{m=0}^n\sum_{k\in Z}(I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}-I_{\{m\leqslant\tau_k\}})\mathrm{d}f_m=f_n.\tag{3}$$

令 $\mu_k=2^k 3P(\tau_k<\infty)^{\frac{1}{\alpha}}$，$a_n^k=\mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$，$\forall k\in Z$，$n\geqslant 0$（$\mu_k=0$ 时令 $a_n^k=0$）．易知对于每个 $k\in Z$，$a^k=(a_n^k)_{n\geqslant 0}$是 X 值鞅，并且由 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)})=\sigma_{\tau_k}^{(p)}(f)\leqslant 2^k$ 知

$$\sigma^{(p)}(a^k)=\left(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\|\mathrm{d}a_n^k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{\mu_k}\left(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n^{(\tau_{k+1})}-\mathrm{d}f_n^{(\tau_k)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\frac{1}{\mu_k}(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})+\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)}))\leqslant\frac{1}{\mu_k}(2^{k+1}+2^k)\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{\alpha}}.\tag{4}$$

当 X 同构于 p 一致光滑空间时，由引理 1 和(4)式知

$$\|a^{k*}\|_p\leqslant C\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_p\leqslant CP(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

故$(a_n^k)_{n\geqslant 0}$是 L_p 有界鞅．由于 p 光滑空间具有 RN 性质，从而此鞅收敛，仍记其极限为 a^k，则 $E_n a^k=a_n^k$，$\forall n\geqslant 0$．由 a_n^k 的定义知当$n\leqslant\tau_k$ 时 $a_n^k=0$．又由(4)式，$\|\sigma^{(p)}(a^k)\|_\infty\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{\alpha}}$，故 a^k 是$(1,\alpha,\infty;p)$原子，$\forall k\in Z$．(3)式说明 f 有如(1)式的分解．

易知在$\{\tau_k=\infty\}$上 a^{k*}和 $\sigma^{(p)}(a^k)=0$．由 X 的光滑性，应用 Hölder 不等式，引理 1 和(4)式，

$$E(a^{k*})^\alpha=E(a^{k*}I_{\{\tau_k<\infty\}})^\alpha\leqslant(E(a^{k*})^p)^{\frac{\alpha}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{p}}\leqslant$$

$$C(E\sigma^{(p)}(a^k)^p)^{\frac{\alpha}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{p}}=$$

$$C(E\sigma^{(p)}(a^k)^p I_{\{\tau_k<\infty\}})^{\frac{\alpha}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{p}}\leqslant C.\tag{5}$$

于是$\sup_k\|a^{k*}\|_\alpha<\infty$．现在来计算 $\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}$．实际上

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^\alpha=3^\alpha\sum_{k\in Z}2^{k\alpha}P(\tau_k<\infty)=3^\alpha\sum_{k\in Z}2^{k\alpha}P(\sigma^{(p)}(f)^\alpha>2^{k\alpha})=$$

$$\frac{3^\alpha}{2^\alpha-1}\sum_{k\in Z}(2^{(k+1)\alpha}-2^{k\alpha})P(\sigma^{(p)}(f)^\alpha>2^{k\alpha})=$$

$$\frac{3^\alpha}{2^\alpha-1}\sum_{k\in Z}2^{k\alpha}P(2^{(k-1)\alpha}<\sigma^{(p)}(f)^\alpha\leqslant 2^{k\alpha})\leqslant$$

$$\frac{2^\alpha 3^\alpha}{2^{\alpha-1}}E\sigma^{(p)}(f)^\alpha=\frac{2^\alpha 3^\alpha}{2^{\alpha-1}}\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}^\alpha.\tag{6}$$

或从倒数第 2 步有

$$\sum_{k\in Z}\mu_k^\alpha\geqslant\frac{3^\alpha}{2^\alpha-1}E\sigma^{(p)}(f)^\alpha=\frac{3^\alpha}{2^\alpha-1}\|f\|_{p\Sigma_\alpha}^\alpha. \tag{7}$$

关于所有如此的原子分解取下确界即得到(2)式．此外由(a_n^k)的定义知 $f-\sum_{k=1}^m\mu_ka^k=f-f^{(\tau_{m+1})}+f^{(\tau_l)}$．由于 $f\in{}_p\Sigma_\alpha$ 时 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$, a.e．于是 $\tau_{m+1}\to\infty$, a.e.（$m\to\infty$）．从而

$$\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^\alpha=(\sigma^{(p)}(f)^p-\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{m+1})})^p)^{\frac{\alpha}{p}}\to0,\ \text{a.e.}$$

又 $\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^\alpha\leqslant\sigma^{(p)}(f)^\alpha$，后者可积．由控制收敛定理知

$$\|f-f^{(\tau_{m+1})}\|_{p\Sigma_\alpha}^\alpha=E\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^\alpha\to0\quad(m\to\infty).$$

另一方面 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_l)})\leqslant2^l$，故知 $\lim\limits_{l\to-\infty}\|f^{(\tau_l)}\|_{p\Sigma_\alpha}=0$．总之，$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ l\to-\infty}}\left\|f-\sum_{k=l}^m\mu_ka^k\right\|_{p\Sigma_\alpha}=0$.

(ii)⇒(i)．实际上若 $E\sum_{n=0}^\infty\|df_n\|^p<\infty$，由于 $E\sigma^{(p)}(f)^\alpha\leqslant(E\sigma^{(p)}(f)^p)^{\frac{\alpha}{p}}=\left(E\sum_{n=0}^\infty\|df_n\|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}<\infty$，故 $f\in{}_p\Sigma_\alpha$．设 f_n 有(ii)中的原子分解．注意 $\sup_k E\|a^{k*}\|^\alpha<\infty$，$(\mu_k)\in l_\alpha$，因而

$$E\|f_m-f_n\|^\alpha\leqslant E\sum_{k\in Z}\mu_k^\alpha\|a_m^k-a_n^k\|^\alpha\leqslant$$
$$C\sum_{|k|>k_0}\mu_k^\alpha+C\sum_{k\in Z}\mu_k^\alpha(\sup_{|k|\leqslant k_0}E\|a_m^k-a_n^k\|)^\alpha. \tag{8}$$

a^k 是相应的原子，故 $a_n^k\xrightarrow{L_1}a^k$，$k\in Z$．(8)式说明$(f_n)$是 L_α 中的Cauchy 列从而依概率收敛．根据引理 1 知 X 同构于p 一致光滑空间．

注 **1**　(i)⇒(ii)实际上对 $0<\alpha<\infty$都成立．为此只需验证(5)式在此情形也成立．实际上对于 $0<\alpha\leqslant p$，(5)式仍然成立．此外，有 $E\sigma^{(p)}(a^k)^\alpha=E(\sigma^{(p)}(a^k)I_{\{\tau_k<\infty\}})^\alpha\leqslant1$．于是当 $\alpha\geqslant p$ 时，利用 X 的p 光滑性和引理 1 得到 $E(a^{k*})^\alpha\leqslant CE\sigma^{(p)}(a^k)^\alpha\leqslant C$.

定理 **2**　设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant2$，$0<\alpha\leqslant1$，则以下条件等价：

(i) X 同构于p 一致光滑空间；

(ii) ${}_p\mathcal{Q}_\alpha$ 中的每个鞅$f=(f_n)$有分解

$$f_n=\sum_{k\in Z}\mu_kE_na^k,\quad n\geqslant0, \tag{9}$$

并且

$$\|f\|_{p\mathcal{Q}_\alpha}\sim\inf\left(\sum_{k\in Z}\mu_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{10}$$

这里 a^k 是$(2,\alpha,\infty;p)$原子，$k\in Z$，$\sup_k\|a^{k*}\|_\alpha<\infty$，$(\mu_k)_{k\in Z}$是非负实数列，$(\mu_k)\in l_\alpha$．此时 $\sum_{k\in Z}\mu_ka^k$ 以${}_p\mathcal{Q}_\alpha$ 范数收敛于f.

证　(i)⇒(ii)．设$f=(f_n)\in{}_p\mathcal{Q}_\alpha$．$(\lambda_n)$是与$(\Sigma_n)$适应的非负不减 R.V.序列，$S_n^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{n-1}$，$\lambda_\infty\in L_\alpha$．令 $\tau_k=\inf\{n\geqslant0:\lambda_n>2^k\}$，$\mu_k$，$a_n^k$ 如定理 1 证明中一样，则 $a^k=(a_n^k)_{n\geqslant0}$是 X 值鞅并且$S^{(p)}(f^{(\tau_k)})=S_{\tau_k}^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{\tau_k-1}\leqslant2^k$．类似于上面(4)式的证明得到 $S^{(p)}(a^k)\leqslant P(\tau_k<$

$\infty)^{-\frac{1}{\alpha}}$. 由 X 的 p 光滑性和引理 1,

$$\sup_n \| a_n^k \|_p \leqslant \| a^{k*} \|_p \leqslant C \| S^{(p)}(a^k) \|_p \leqslant C\mathrm{P}(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

于是存在 $\mathrm{L}_p(X)$中函数, 仍记为 a^k, 使得 $a_n^k = \mathrm{E}_n a^k$, $n \geqslant 1$. 同样的验证表明 a^k 是$(2, \alpha, \infty; p)$原子, $\sup_k \| a^{k*} \|_\alpha < \infty$并且(9)式成立. 类似于(6)式,

$$\sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k^\alpha = 3^\alpha \sum_{k\in \mathrm{Z}} 2^{k\alpha} \mathrm{P}(\tau_k < \infty) = 3^\alpha \sum_{k\in \mathrm{Z}} 2^{k\alpha} \mathrm{P}(S^{(p)}(f) > 2^k) \leqslant$$

$$\frac{2^\alpha 3^\alpha}{2^\alpha - 1} \mathrm{E} S^{(p)}(f)^\alpha \leqslant \frac{2^\alpha 3^\alpha}{2^\alpha - 1} \mathrm{E} \lambda_\infty^\alpha. \tag{11}$$

另一方面, 类似于(7)式,

$$\sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k^\alpha = 3^\alpha \sum_{k\in \mathrm{Z}} 2^{k\alpha} \mathrm{P}(\lambda_\infty > 2^k) \geqslant \frac{3^\alpha}{2^\alpha - 1} \mathrm{E} \lambda_\infty^\alpha. \tag{12}$$

综合(11)和(12)式得(10)式. 对于最后的论断, 首先

$$S^{(p)}(f - f^{(\tau_{m+1})})^p = \sum_{k=m+1}^{\infty} (S^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})^p - S^{(p)}(f^{(\tau_k)})^p) =$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} S^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})} - f^{(\tau_k)})^p = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^p S^{(p)}(a^k)^p. \tag{13}$$

令 $\rho_{n,k} = \| S^{(p)}(a^k) \|_\infty I_{\{\tau_k \leqslant n\}}$, $\rho_n = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^p \rho_{n,k}^p \right)^{\frac{1}{p}}$, 则$(\rho_n)_{n\geqslant 0}$是适应非降 R.V. 序列. 由(13)式得出 $S_n^{(p)}(f - f^{(\tau_{m+1})}) \leqslant \rho_{n-1}$. 由于 $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$\rho_n^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha I_{\{\tau_k \leqslant n\}} \| S^{(p)}(a^k) \|_\infty^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha I_{\{\tau_k \leqslant n\}} P(\tau_k < \infty)^{-1}. \tag{14}$$

由此式和类似于(11)式的不等式得到

$$\mathrm{E} \rho_\infty^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha \leqslant C\mathrm{E}(S^{(p)}(f)^\alpha - S_m^{(p)}(f)^\alpha).$$

从而

$$\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{{}_p\mathscr{Q}_\alpha} \leqslant C\mathrm{E}(S^{(p)}(f)^\alpha - S_m^{(p)}(f)^\alpha) \to 0 \quad (m \to \infty).$$

又 $\| f^{(\tau_l)} \|_{{}_p\mathscr{Q}_\alpha} \leqslant 2^l \to 0 \ (l \to -\infty)$. 最终得出 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ l\to-\infty}} \left\| f - \sum_{k=1}^{m} \mu_k a^k \right\|_{{}_p\mathscr{Q}_\alpha} = 0.$

(ii)⇒(i). 设 $f = (f_n)$是 X 值鞅, $S^{(p)}(f) \in \mathrm{L}_\infty$, 则 $f \in {}_p\mathscr{Q}_\alpha$. 若 $f_n = \sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k \mathrm{E}_n a^k$, $n \geqslant 0$ 是 f 相应的原子分解, 类似于定理 1(ii)⇒(i)的证明知(f_n)依概率收敛. 从而 X 同构于 p 一致光滑空间.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, $0 < \alpha \leqslant 1$, 则以下条件等价:

(i) X 具有 RN 性质;

(ii) $\mathscr{D}_\alpha$ 中每个鞅 $f = (f_n)$有分解

$$f_n = \sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k \mathrm{E}_n a^k, \quad n \geqslant 0, \tag{15}$$

并且

$$\| f \|_{\mathscr{D}_\alpha} \sim \inf \left(\sum_{k \in \mathrm{Z}} \mu_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{16}$$

这里 a^k 是(3, α, ∞)原子, $k \in \mathrm{Z}$. $(\mu_k)_{k\in \mathrm{Z}}$是非负实数列, $(\mu_k) \in l_\alpha$. 此时 $\sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k a^k$ 依 $\mathscr{D}_\alpha$ 范数收敛于 f.

证　(i)⇒(ii). 设 $f=(f_n)\in \mathscr{D}_\alpha$, (λ_n)是相应的适应非降 R.V. 序列. 定义 τ_k, μ_k 和 a_n^k 同定理 2, 则对任意 $n \geqslant 0$,

$$\| a_n^k \| = \mu_k^{-1} \| f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)} \| \leqslant \mu_k^{-1} (2^{k+1} + 2^k) \leqslant \mathrm{P}(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

由此, $\| a^{k*} \|_\infty \leqslant \mathrm{P}(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{\alpha}}$. X 具有 RN 性质, 故存在 X 值可积函数 a^k, 使得 $a_n^k = \mathrm{E}_n a^k$, $n \geqslant 0$. 当 $n \leqslant \tau_k$ 时 $a_n^k = 0$, 从而 a^k 是(3, α, ∞)原子并且(15)式成立. 类似于定理 2 中(10)式的证明可得(16)式. 现在令 $\lambda_n^\alpha = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha I_{\{\tau_k \leqslant n\}} \| a^k \|_\infty^\alpha$, 则$(\lambda_n)$是适应非降 R.V. 序列, 并且

$$\| f_n - f_n^{(\tau_{m+1})} \|^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha \| a_n^k \|^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha I_{\{\tau_k \leqslant n-1\}} \| a_n^k \|^\alpha \leqslant \lambda_{n-1}^\alpha. \tag{17}$$

由 $\| a^k \|_\infty \leqslant \mathrm{P}(\tau_k < \infty)^{-\frac{1}{\alpha}}$得到

$$\mathrm{E}\lambda_\infty^\alpha \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^\alpha \leqslant 3^\alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{k\alpha} \mathrm{P}(f^* > 2^k) \leqslant \frac{2^\alpha 3^\alpha}{2^\alpha - 1} \int_{\{f^* > 2^{m+1}\}} f^{*\alpha} \mathrm{dP}. \tag{18}$$

由(17)式知 $\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{\mathscr{D}_\alpha} \leqslant \| \lambda_\infty \|_\alpha$. 再由(18)式得出 $\| f - f^{(\tau_{m+1})} \|_{\mathscr{D}_\alpha} \to 0 \ (m \to \infty)$. 又 $\| f^{(\tau_l)} \|_{\mathscr{D}_\alpha} \leqslant 2^l \to 0 \ (l \to -\infty)$. 于是 $\left\| f - \sum_{k=l}^{m} \mu_k a^k \right\|_{\mathscr{D}_\alpha} \to 0 \ (m \to \infty, \ l \to -\infty)$.

(ii)⇒(i). 当$\sup_n \| f_n \|_\infty < \infty$时, $f \in \mathscr{D}_\alpha$, f 存在形如(15)式的原子分解. 由(3, α, ∞)原子的定义知$\mathrm{E}(a^{k*})^\alpha = \mathrm{E}(a^{k*})^\alpha I_{\{\tau_k < \infty\}} \leqslant 1$, 从而$\sup_k \| a^{k*} \|_\alpha \leqslant 1$. 类似定理 1(ii)⇒(i)的证明知$(f_n)$依概率收敛. 由控制收敛定理可知$(f_n)$依 L_1 范数收敛, 从而 X 具有 RN 性质.

注 2　定理 2 和 3 中(i)⇒(ii)的关系对于 $0 < \alpha < \infty$也成立.

定理 4　设 X 是 Banach 空间, $1 < p \leqslant 2$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于p 一致光滑空间;

(ii) 每个 ${}_p\Sigma_\alpha$ 中的鞅$f=(f_n)$存在分解

$$f_n = \sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k \mathrm{E}_n a^k, \quad n \geqslant 0, \tag{19}$$

并且

$$\left(\sum_{k\in \mathrm{Z}} \mu_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant C \| f \|_{{}_p\Sigma_\alpha}, \tag{20}$$

这里 a^k 是(3, α, p)原子, $k \in \mathrm{Z}$. $(\mu_k)_{k\in \mathrm{Z}}$是非负实数列, $(\mu_k) \in l_\alpha$.

证　(i)⇒(ii). 设 $f=(f_n)\in {}_p\Sigma_\alpha$, 对每个 $k \in \mathrm{Z}$, 令

$$F_k = \{ \sigma^{(p)}(f) > 2^k \}, \quad \tau_k = \inf\{ n \geqslant 0: 2\mathrm{E}_n I_{F_k} > 1 \}.$$

并且令 $\mu_k = Cp(p-1)^{-1} 2^{\frac{1}{p}} 2^{k+1} \mathrm{P}(\tau_k < \infty)^{\frac{1}{\alpha}}$, $a_n^k = \mu_k^{-1} (f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)})$, 其中 C 是引理 1(iii)

中的常数. 易知 τ_k 是单调增加的, $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$是 X 值鞅. 由于 X 的 p 光滑性, Doob 不等式和引理 1 给出

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(a^{k*})^p &\leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathrm{E}\|a_n^k\|^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \frac{\mathrm{E}\|f_n^{(\tau_{k+1})} - f_n^{(\tau_k)}\|^p}{\mu_k^p} = \\ &\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{\mu_k^p} C^p \mathrm{E}\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})} - f^{(\tau_k)})^p = \\ &C^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{\mu_k^p}\mathrm{E}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}.\end{aligned}\tag{21}$$

但

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} = \\ &\quad \mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} I_{\{\sigma^{(p)}(f)\leqslant 2^{k+1}\}} + \\ &\quad \mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} I_{\{\sigma^{(p)}(f)>2^{k+1}\}} \leqslant \\ &\quad 2^{(k+1)p}\mathrm{P}(\tau_k<\infty) + \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}(\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\mathrm{E}_{n-1}I_{F_{k+1}}) \leqslant \\ &\quad 2^{(k+1)p}\mathrm{P}(\tau_k<\infty) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}.\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\leqslant 2\cdot 2^{(k+1)p}\mathrm{P}(\tau_k<\infty)$, (21)式变为 $\mathrm{E}(a^{k*})^p\leqslant \mathrm{P}(\tau_k<\infty)^{1-\frac{p}{\alpha}}$. $(a_n^k)_{n\geqslant 0}$是 L_p 有界鞅. X 具有 RN 性质, 故存在函数 $a^k\in\mathrm{L}_p$, 使得 $\mathrm{E}_n a^k = a_n^k$, $n\geqslant 0$. 当 $n\leqslant\tau_k$ 时 $a_n^k=0$. 故 a^k 是$(3, \alpha, p)$原子. 由 a^k 的定义得到(19)式. 为证(20)式, 只需注意对于适当的常数 C_p,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha &= C_p\sum_{k\in\mathrm{Z}}2^{k\alpha}\mathrm{P}(\tau_k<\infty)\leqslant C_p\sum_{k\in\mathrm{Z}}2^{k\alpha}\mathrm{P}(2\sup_n(\mathrm{E}_n I_{F_k}>1))\leqslant \\ &C_p\sum_{k\in\mathrm{Z}}2^p 2^{k\alpha}\mathrm{E}\sup_n(\mathrm{E}_n I_{F_k})^p\leqslant C_p\sum_{k\in\mathrm{Z}}2^{k\alpha}\mathrm{P}(F_k) = \\ &C_p\sum_{k\in\mathrm{Z}}2^{k\alpha}\mathrm{P}(\sigma^{(p)}(f)>2^k)\leqslant C_p\|f\|^\alpha_{\Sigma_\alpha^p}.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i). 注意到对于$(3, \alpha, p)$原子 a 有 $\|a^*\|_p\leqslant \mathrm{P}(\tau<\infty)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}}$. 利用Hölder不等式,

$$\mathrm{E}a^{*\alpha} = \mathrm{E}a^{*\alpha}I_{\{\tau<\infty\}}\leqslant(\mathrm{E}a^{*p})^{\frac{\alpha}{p}}\mathrm{P}(\tau<\infty)^{1-\frac{\alpha}{p}}\leqslant 1.$$

由此, 类似于定理 1(ii)⇒(i)的证明可知, 若 X 值鞅 $f=(f_n)$满足 $\mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$, 则$(f_n)$依概率收敛. 从而 X 同构于 p 一致光滑空间.

2　鞅空间

定理 5　设 X 是 Banach 空间, $1<p\leqslant 2$, $0<\alpha\leqslant 1$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间；

(ii) ${}_p\Sigma_\alpha\subset H_\alpha$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 成立

$$\|f\|_{H_\alpha}\leqslant C\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha};\tag{22}$$

(iii) ${}_p\mathcal{Q}_\alpha\subset H_\alpha$，并且存在 $C>0$，使得对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 成立

$$\|f\|_{H_\alpha}\leqslant C\|f\|_{{}_p\mathcal{Q}_\alpha}.\tag{23}$$

证　(i)⇒(ii)．由定理 1，当 $f=(f_n)\in{}_p\Sigma_\alpha$ 时，f 有关于 $(1,\alpha,\infty;p)$ 的原子分解 $f_n=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k a_n^k$，$n\geqslant 0$，并且(2)式成立．由于 $\sup_k\|a^{k*}\|_\alpha<\infty$，故

$$\mathrm{E}(f^*)^\alpha\leqslant\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\mathrm{E}(a^{k*})^\alpha\leqslant C\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\leqslant C\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}.$$

此即(22)式．类似地可利用定理 2 证明(23)式．故(i)⇒(iii)成立．

(ii)⇒(i)．设 $f=(f_n)$ 满足 $\mathrm{E}\sigma^{(p)}(f)^p=\sum_{n=0}^\infty\mathrm{E}\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$．由 Hölder 不等式 $\mathrm{E}\sigma^{(p)}(f)^\alpha\leqslant(\mathrm{E}\sigma^{(p)}(f)^p)^{\frac{\alpha}{p}}<\infty$，$f\in{}_p\Sigma_\alpha$．对于鞅 $(f_{n+m}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 应用(22)式得到 $\|f_{m+n}-f_n\|_\alpha\leqslant C\|\sigma^{(p)}(f)-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)\|_\alpha$，由控制收敛定理 f_n 是 L_α 中 Cauchy 列从而依概率收敛，X 同构于 p 一致光滑空间．

(iii)⇒(i)．设 $f=(f_n)$ 是 X 值的 Walsh-Paley 鞅，满足 $\mathrm{E}\sigma^{(p)}(f)^p=\sum_{n=0}^\infty\mathrm{E}\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$，则有 $S_n^{(p)}(f)=\sigma_n^{(p)}(f)$，$\forall n$，$\|f\|_{{}_p\mathcal{Q}_\alpha}\leqslant\|f\|_{{}_p\Sigma_\alpha}$．对于 $\mathcal{F}=(f_{m+n}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 用(23)式得

$$\|f_{m+n}-f_n\|_\alpha\leqslant C\|\mathcal{F}\|_{{}_p\mathcal{Q}_\alpha}\leqslant C\|\sigma^{(p)}(f)-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)\|_\alpha,$$

由此与(ii)⇒(i)一样可知(f_n)依概率收敛．从而 X 同构于 p 一致光滑空间．

定理 6　设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$0<\alpha\leqslant 1$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 q 一致凸空间；

(ii) $\mathcal{D}_\alpha\subset{}_qH_\alpha$，并且存在 $C>0$，使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{{}_qH_\alpha}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha};\tag{24}$$

(iii) $\mathcal{D}_\alpha\subset{}_q\Sigma_\alpha$，并且存在 $C>0$，使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{{}_q\Sigma_\alpha}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}.\tag{25}$$

证　(i)⇒(ii)，(iii)．设 $f=(f_n)\in\mathcal{D}_\alpha$，空间 X 具有 RN 性质．由定理 3，f 存在$(3,\alpha,\infty)$原子分解 $f_n=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k a_n^k$，$n\geqslant 0$，并且(16)式成立．由此分解知 $(\mathrm{d}f_n)I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}=\mu_k\mathrm{d}a_n^k$．于是

$$S^{(q)}(f)^q=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k\in\mathrm{Z}}\|\mathrm{d}f_n\|^q I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\sum_{n=0}^\infty\|\mathrm{d}f_n\|^q I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}=$$
$$\sum_{k\in\mathrm{Z}}\sum_{n=0}^\infty\mu_k^q\|\mathrm{d}a_n^k\|^q=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^q S^{(q)}(a^k)^q.$$

注意到 $\|a^{k*}\|_\infty\leqslant\mathrm{P}(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{\alpha}}$，并且当 $\tau_k=\infty$ 时 $a^{k*}=0$，由 X 的 q 一致凸性，利用引理 2 得

$$\mathrm{E}S^{(q)}(a^k)^\alpha=\mathrm{E}S^{(q)}(a^k)^\alpha I_{\{\tau_k<\infty\}}\leqslant(\mathrm{E}S^{(q)}(a^k)^q)^{\frac{\alpha}{q}}\mathrm{P}(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{q}}\leqslant$$
$$C(\mathrm{E}(a^{k*})^q)^{\frac{\alpha}{q}}\mathrm{P}(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{q}}\leqslant$$
$$(\mathrm{E}(a^{k*})^q I_{\{\tau_k<\infty\}})^{\frac{\alpha}{q}}\mathrm{P}(\tau_k<\infty)^{1-\frac{\alpha}{q}}\leqslant C.$$

利用以上两式和(16)式得

$$\mathrm{E}S^{(q)}(f)^\alpha\leqslant\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\mathrm{E}S^{(q)}(a_k)^\alpha\leqslant C\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\leqslant C\|f\|_{\mathscr{D}_\alpha}^\alpha.$$

此即(24)式．类似上述两式可得到 $\sigma^{(q)}(f)^q=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^q\sigma^{(q)}(a^k)^q$，以及 $\mathrm{E}\sigma^{(q)}(a^k)^\alpha\leqslant C$．从而 $\mathrm{E}\sigma^{(q)}(f)^\alpha\leqslant C\sum_{k\in\mathrm{Z}}\mu_k^\alpha\leqslant C\|f\|_{\mathscr{D}_\alpha}^\alpha$．此即(25)式．

(ⅱ)或(ⅲ)⇒(ⅰ)．设 $f=(f_n)$为 X 值 Walsh-Paley 鞅，满足$\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty$，则 $\|f\|_{\mathscr{D}_\alpha}<\infty$．由(24)或(25)式可得 $S^{(p)}(f)<\infty$, a.e. 或 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$, a.e. 在后一种情形由于 $d^*(f)=\sup_n\|df_n\|\in L_\infty$, Garsia 引理说明 $S^{(p)}(f)<\infty$, a.e. 由引理2, X 同构于 q 一致凸空间.

参 考 文 献

1 Herz C. H_p-spaces of martingales, $0<p\leqslant1$. Z Wahrs Verw Geb, 1974, 28: 189～205

2 Bernard A, Muisonneuve B. Decomposition Atomique de Martingales de la Class H^1. Lecture Notes in Mathematics, Vol 581. Berlin: Springer-Verlag, 1977

3 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes Mathematics, Vol 1 568. Berlin: Springer-Verlag, 1994

4 刘培德. 鞅空间与 Banach 空间的几何性质. 中国科学, A辑, 1990,(7): 694～704

5 刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学. 武汉: 武汉大学出版社, 1993

6 Pisier G. Martingales in uniformly convex Banach spaces. Israel J Math, 1975, 20: 326～350

7 Long R L. Martingale Spaces and Inequalities. Beijing: Peking Univ Press, 1993