离散周期集上的弱 Gabor 双框架

李云章*, 赵静

北京工业大学应用数理学院, 北京 100124

E-mail: yzlee@bjut.edu.cn, jingzhao@emails.bjut.edu.cn

收稿日期: 2017-05-31; 接受日期: 2018-01-23; 网络出版日期: 2018-07-19; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271037) 资助项目

摘要 因其在数字信号处理的潜在应用, 近年来, 离散 Gabor 分析引起了众多学者的关注. 本文研究整数集 $\mathbb{Z}$ 的离散周期子集 S 上的 Gabor 分析. 众所周知, 当 $S \neq \mathbb{Z}$ 时, $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Gabor 框架到 $l^2(S)$ 上的投影不可能穷尽 $l^2(S)$ 的所有 Gabor 框架. 本文引入了弱 Gabor 双框架 (weak Gabor bi-frame, WGBF), 其推广了 Gabor 双框架的概念, 得到了 $l^2(S)$ 上 WGBF 的 Zak 变换域刻画和时域刻画. 所得结果即使 $S = \mathbb{Z}$ 时仍是新的, 并给出了一些例子.

关键词 框架 Gabor 框架 双框架 弱 Gabor 双框架 离散 Gabor 分析

MSC (2010) 主题分类 42C40, 42C15

1 引言

设 $\mathcal{H}$ 是一个可分的 Hilbert 空间, $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中一个至多可数序列. 若存在正常数 C 使得对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq C \|f\|^2, \quad (1.1)$$

则称 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个 Bessel 序列, C 称为其 Bessel 界. 若存在常数 $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ 使得对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$C_1 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq C_2 \|f\|^2, \quad (1.2)$$

则称 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个框架, 其中 C_1 和 C_2 为其框架界. 设 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架, $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个序列. 若 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架, 且满足对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$f = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle f, \tilde{e}_i \rangle e_i, \quad (1.3)$$

英文引用格式: Li Y Z, Zhao J. Weak Gabor bi-frames on discrete periodic sets (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1803–1818, doi: 10.1360/SCM-2017-0349

则称 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 为 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 的一个对偶. 显然, 若 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 的一个对偶, 则 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 也是 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 的一个对偶. 因此, 此时称 $(\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组对偶框架 (双框架). 容易验证, $(\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组双框架当且仅当 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 和 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的两个 Bessel 序列, 且对任意 $f, g \in \mathcal{H}$, 有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle f, \tilde{e}_i \rangle \langle e_i, g \rangle. \quad (1.4)$$

关于框架的基础知识参见文献 [1, 2]. 有时, 为了一些特殊的目的, 无论 $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 和 $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是否为 Bessel 序列, 只要 (1.4) 对 f 和 g 属于 $\mathcal{H}$ 的稠子集时成立就足够了. 另外, 对于一些具有特殊结构的序列, Bessel 假设并不容易实现. 在文献中, 大多数仿射双框架 (又称小波对偶框架) 是由细分函数通过扩充原则得到的 (参见文献 [3–8] 和 [9–11] 及其参考文献). 为了得到仿射系的 Bessel 性质, 需要对细分函数强加一些人为的、不自然的条件. 因此, 一个自然的问题是, 若细分函数没有这些限制条件, 我们将得到什么? Jia 和 Li^[12, 13] 引入了弱仿射双框架 (weak affine bi-frame, WABF) 的概念, 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 约化子空间背景下刻画了 WABF, 得到了基于一对无光滑性限制细分函数的 WABF 构造, 并导出了与之相关的快速算法. 他们在文献 [14] 中研究了在 Sobolev 空间对背景下的类似问题. Li 和 Jia^[15] 引入了 $L^2(\mathbb{R})$ 一般闭子空间中的弱 Gabor 双框架 (WGBF) 的概念, 刻画了 $\mathbb{R}$ 的周期子集上的 WGBF.

小波和 Gabor 框架在全空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上已被广泛研究, 在其子空间背景下也受到部分学者的关注. 相关结果参见文献 [16–20] 和 [21–27] 及其参考文献. 近年来, 由于其在数字信号处理的潜在应用, 离散 Gabor 分析引起了众多数学家以及工程专家的关注 (参见文献 [28–35] 和 [36–43]). 众所周知, 在一定条件下, 可通过对 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Gabor 框架进行采样得到 $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Gabor 框架 (参见文献 [44–46]). 但是, 这些条件都是人为的, 十分苛刻的. 它们排除了一些好的例子. 直观地讲, 离散 Gabor 分析理论与连续情形是类似的, 但有时会有很大差别. Heil^[47] 证明了, 在连续情形下 Gabor 框架只有当它们是由不光滑或具有差的衰减性的函数生成时才是基, 但在离散情形下 Gabor 基可由具有良好衰减性的序列生成.

受上述工作启发, 本文研究整数集 $\mathbb{Z}$ 的离散周期集上的弱 Gabor 双框架. 该理论可以模拟周期间断性信号出现的情形, 利用它, 人们可以在保留观测数据的所有特征的条件有效地对信号进行 Gabor 分析. 当然, 人们可以把信号看作是存在于整个集合 $\mathbb{Z}$ 的情形, 并按照通常的方法进行分析. 但显然, 如果信号只在很短的时间周期内被发射, 这显然不是最佳的方法.

我们以 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{N}$ 和 $l_0(S)$ 分别表示整数集、正整数集和限制在 $\mathbb{Z}$ 的一个子集 S 上的有限支撑序列, 以 I_t 、 $\mathbb{N}_t$ 和 $\mathcal{M}_{s,t}$ 分别表示 $t \times t$ 单位矩阵、 $\mathbb{N}_t = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}$ 和 $s \times t$ 复值矩阵全体, 其中 $s, t \in \mathbb{N}$. 设 $\mathcal{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{s,t}$. 以 $\mathcal{A}^*$ 表示 $\mathcal{A}$ 的共轭转置. 对 $E = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}_s$, $F = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \mathbb{N}_t$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_n$, 定义 $\mathcal{A}_{E \times F} = (a_{i_l, j_k})_{1 \leq l \leq m, 1 \leq k \leq n}$. 以 $\text{card}(\Delta)$ 表示集合 $\Delta \subset \mathbb{Z}$ 的势. 对 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 定义其相应的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 为

$$\hat{f}(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k \cdot}.$$

对 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$, 定义 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的调制算子 E_γ 和平移算子 T_k 为对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 有

$$E_\gamma f(\cdot) = e^{2\pi i \gamma \cdot} f(\cdot), \quad T_k f(\cdot) = f(\cdot - k). \quad (1.5)$$

对 $g \in l^2(\mathbb{Z})$ 和 $N, M \in \mathbb{N}$, 我们以 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 表示由 g 生成的 Gabor 系:

$$\mathcal{G}(g, N, M) = \{E_{\frac{m}{M}} T_n g : m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.6)$$

设 S 是 $\mathbb{Z}$ 的一个非空子集, 若对任意 $j \in S$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有 $j + nN \in S$, 则称 S 是 $N\mathbb{Z}$ - 周期的. 我们以 $l^2(S)$ 表示 $l^2(\mathbb{Z})$ 的闭子空间:

$$l^2(S) = \{f \in l^2(\mathbb{Z}) : \text{对任意 } j \notin S, f(j) = 0\}.$$

众所周知, 只有 $N \leq M$ 时, $\mathcal{G}(g, N, M)$ 才有可能是 $l^2(\mathbb{Z})$ 的框架. 但由文献 [30] 知, 当 $N > M$ 且 S 是 $\mathbb{Z}$ 的一个恰当的 $N\mathbb{Z}$ - 周期子集时, $l^2(S)$ 中存在一个框架 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 是可能的. 因此, $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Gabor 框架到 $l^2(S)$ 上的投影不可能穷尽 $l^2(S)$ 的所有 Gabor 框架. 读者可以参见文献 [30, 48–52] 查阅关于 $l^2(S)$ 的 Gabor 框架的相关结果. 本文在下述基本假定下研究 $l^2(S)$ 的弱 Gabor 双框架:

基本假定:

(i) $N, M \in \mathbb{N}$, 且 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 p 和 q 是两个互质的正整数.

(ii) S 是 $\mathbb{Z}$ 的一个 $N\mathbb{Z}$ - 周期子集.

定义 1.1 设 $N, M \in \mathbb{N}$ 且 S 满足基本假定, $g, h \in l^2(S)$. 若存在 $l^2(S)$ 的一个稠子集 $\mathcal{V}$ 使得对任意 $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$, 有

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f_1, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f_2 \rangle, \quad (1.7)$$

其中上述级数绝对收敛, 则称 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 为 $l^2(S)$ 的一组弱 Gabor 双框架 (WGBF).

注 1.1 特别地, 若定义 1.1 中的 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 和 $\mathcal{G}(h, N, M)$ 均为 Bessel 序列, 则容易验证 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组双框架. 此时, 我们也称 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 为 $l^2(S)$ 的一组 Gabor 双框架 (Gabor bi-frame, GBF). 显然, WGBF 是 GBF 的推广.

注 1.2 为准确起见, 我们称一组满足 (1.7) 的 WGBF 为一组与 $\mathcal{V}$ 相关的 WGBF. 此外, 若 $\mathcal{V}$ 是 $l^2(S)$ 的一个线性子空间, 则由内积的极化恒等式可得 (1.7) 等价于对任意 $f \in \mathcal{V}$, 有

$$\|f\|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle. \quad (1.8)$$

为叙述方便, 我们引入一些记号和概念. 设 $L \in \mathbb{N}$, E 是 $\mathbb{Z}$ 的一个子集. 我们以 χ_E 表示 E 上的特征函数, 以 $L^2(E \times [0, 1], \mathbb{C}^L)$ 表示 Hilbert 空间:

$$L^2(E \times [0, 1], \mathbb{C}^L) = \left\{ \xi : \sum_{j \in E} \sum_{l=1}^L \int_0^1 |\xi_l(j, \theta)|^2 d\theta < \infty \right\}.$$

其内积定义为对任意 $\xi, \eta \in L^2(E \times [0, 1], \mathbb{C}^L)$, 有

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j \in E} \sum_{l=1}^L \int_0^1 \xi_l(j, \theta) \overline{\eta_l(j, \theta)} d\theta, \quad (1.9)$$

其中 ξ_l 和 η_l 分别表示 ξ 和 η 的第 l 个分量. 类似地, 我们以 $L^\infty(E \times [0, 1], \mathbb{C}^L)$ 表示集合:

$$L^\infty(E \times [0, 1], \mathbb{C}^L) = \left\{ \xi : \text{对每个 } 1 \leq l \leq L, \sup_{j \in E} \|\xi_l(j, \cdot)\|_{L^\infty[0, 1]} < \infty \right\}.$$

为简单起见, 记 $L^2(E \times [0, 1], \mathbb{C}^1) = L^2(E \times [0, 1])$, $L^\infty(E \times [0, 1], \mathbb{C}^1) = L^\infty(E \times [0, 1])$.

设 N 和 M 满足基本假定. 对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 定义其离散 Zak 变换 $\mathcal{Z}_{qN}f$ 为: 对 $j \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{Z}_{qN}f(j, \theta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(j + lqN) e^{2\pi i l \theta}. \quad (1.10)$$

定义 $\mathbf{Z}_{qN}f$ 为对 $j \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathbf{Z}_{qN}f(j, \theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{qN}f(j, \theta) \\ \mathcal{Z}_{qN}f(j + M, \theta) \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{qN}f(j + (p-1)M, \theta) \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\mathcal{Z}_{qN}$ 具有伪周期性: 对任意 $k, l, j \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{Z}_{qN}f(j + kqN, \theta + l) = e^{-2\pi i k \theta} \mathcal{Z}_{qN}f(j, \theta). \quad (1.11)$$

给定 $S \subset \mathbb{Z}$, 由 $\mathbb{Z}$ 的子集构成的一个至多可数集族 $\{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ 称为 S 的一个分划, 是指 $\chi_S = \sum_{i \in \mathcal{I}} \chi_{S_i}$. 称 $\mathbb{Z}$ 的两个子集 S_1 和 S_2 是 $qN\mathbb{Z}$ -同余的, 是指存在 S_1 的一个分划 $\{S_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 使得 $\{S_{1,k} + kqN\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 S_2 的一个分划. 另外, 若 S_1 和 S_2 均为有限集, 则 $\{S_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ 中仅有有限多个 $S_{1,k}$ 非空.

由 $\mathcal{Z}_{qN}$ 的伪周期性 (参见文献 [30, 定理 2.1] 和 [52, 引理 1]), 我们有下列的命题.

命题 1.1 设 N, M 和 S 满足基本假定, 且 K 是一个 $qN\mathbb{Z}$ -同余于 $\tilde{S}_0 = \mathbb{N}_{qN} \cap S$ 的集合, 则

- (i) $\mathcal{Z}_{qN}$ 和 $\mathbf{Z}_{qN}$ 分别是 $l^2(\mathbb{Z})$ 到 $L^2(\mathbb{N}_{qN} \times [0, 1))$ 上以及到 $L^2(\mathbb{N}_M \times [0, 1), \mathbb{C}^p)$ 上的酉算子;
- (ii) $\mathcal{Z}_{qN}|_{l^2(S)}$ 是 $l^2(S)$ 到 $L^2(\tilde{S}_0 \times [0, 1))$ 上的酉算子;
- (iii) $\{\mathcal{Z}_N f|_{K \times [0, 1)} : f \in l^2(S)\} = \{F \in L^2(K \times [0, 1)) : \text{在 } (K \setminus S) \times [0, 1) \text{ 上, } F = 0\}$;
- (iv) 在 $l^2(S)$ 上, 对 $j \in \mathbb{Z}$, 有 $D(j)\mathbf{Z}_{qN} = \mathbf{Z}_{qN}$;
- (v) $l^2(S)$ 通过 $\mathbf{Z}_{qN}$ 变换的象限制在集合 $\mathbb{N}_M \times [0, 1)$ 上是

$$\{D(j)\mathcal{F}(j, \theta) : \mathcal{F} \in L^2(\mathbb{N}_M \times [0, 1), \mathbb{C}^p)\};$$

- (vi) $l^\infty_\mathbb{Z}(S)$ 通过 $\mathbf{Z}_{qN}$ 变换的象限制在集合 $\mathbb{N}_M \times [0, 1)$ 上是

$$\{D(j)\mathcal{F}(j, \theta) : \mathcal{F} \in L^\infty(\mathbb{N}_M \times [0, 1), \mathbb{C}^p)\},$$

其中, 对 $j \in \mathbb{Z}$, $D(j)$ 是 $p \times p$ 对角矩阵:

$$D(j) = \text{diag}(\chi_S(j), \chi_S(j + M), \dots, \chi_S(j + (p-1)M)), \quad (1.12)$$

$$l^\infty_\mathbb{Z}(S) = \{f \in l^2(S) : \mathcal{Z}_{qN}f \in L^\infty(\mathbb{Z} \times [0, 1))\}. \quad (1.13)$$

注意到 $l^\infty_\mathbb{Z}(S)$ 在 $l^2(S)$ 中稠密, 且由命题 1.1 以及 $\mathcal{Z}_{qN}$ 的伪周期性可得

$$l^\infty_\mathbb{Z}(S) = \{f \in l^2(\mathbb{Z}) : \mathcal{Z}_{qN}f|_{\mathbb{N}_{qN} \times [0, 1)} \in L^\infty(\mathbb{N}_{qN} \times [0, 1)), \text{在 } (\mathbb{N}_{qN} \setminus \tilde{S}_0) \times [0, 1) \text{ 上, } \mathcal{Z}_{qN}f = 0\},$$

其中 $\tilde{S}_0 = \mathbb{N}_{qN} \cap S$.

本文剩余部分组织如下. 第 2 节致力于 $l^2(S)$ 中与 $l^\infty_\mathbb{Z}(S)$ 相关的 WGBF 的 Zak 变换域刻画. 第 3 节致力于 $l^2(S)$ 中与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF 的时域刻画. 另外, 我们还给出了一些例子. 本文所得结果即使在 $l^2(\mathbb{Z})$ 中仍是新的.

2 WGBF 的 Zak 变换域刻画

本节给出 $l^2(S)$ 中与 $l^2_{\mathbb{Z}}(S)$ 相关的 WGBF 的 Zak 变换域刻画, 其中 N 、 M 和 S 满足基本假定.

定义 2.1 ^[30, 52] 设 N 和 M 满足基本假定. 给定 $g \in l^2(\mathbb{Z})$, 定义与之相关的矩阵值函数 $G: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{q,p}$ 为对 $j \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$G(j, \theta)_{r,k} = (\mathcal{Z}_{qN}g)(j + kM - rN, \theta), \quad r \in \mathbb{N}_q, \quad k \in \mathbb{N}_p. \quad (2.1)$$

注 2.1 类似地, 记与 $h \in l^2(\mathbb{Z})$ 相关的矩阵值函数为 H . 由 $\mathcal{Z}_{qN}$ 的伪周期性和文献 [30, 引理 2.2] 知, 任意定义在 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$ 上且元素均属于 $L^2(\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1))$ 的矩阵值函数 $G: \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1) \rightarrow \mathcal{M}_{q,p}$ 通过 (2.1) 唯一确定一个 $g \in l^2(\mathbb{Z})$. 详细证明参见文献 [30, 52].

引理 2.1 设 N 、 M 和 S 满足基本假定. 对任意 $E \subset \mathbb{N}_p$, 定义

$$S_E = \{j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} : \text{当 } k \in E \text{ 时, } j + kM \in S; \text{当 } k \in \mathbb{N}_p \setminus E \text{ 时, } j + kM \notin S\}, \quad (2.2)$$

$$T_1 = \bigcup_{\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_q} \bigcup_{k \in E} (S_E - rN + kM), \quad (2.3)$$

$$T_2 = \bigcup_{E \subsetneq \mathbb{N}_p} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_q} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_p \setminus E} (S_E - rN + kM), \quad (2.4)$$

则有

- (i) 集合 $\{S_E : E \subset \mathbb{N}_p\}$ 是 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 的一个分划;
- (ii) 集合 T_1 是 $qN\mathbb{Z}$ - 同余于 $\mathbb{N}_{qN} \cap S$ 的;
- (iii) 集合 T_2 是 $qN\mathbb{Z}$ - 同余于 $\mathbb{N}_{qN} \setminus S$ 的.

证明 (i) 是显然的. 下证 (ii) 和 (iii). 由 (i) 和文献 [30, 引理 2.2] 可知, $\bigcup_{E \subset \mathbb{N}_p} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_q} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_p} (S_E - rN + kM)$ 是 $qN\mathbb{Z}$ - 同余于 $\mathbb{N}_{qN}$ 的. 又注意到 S 是 $N\mathbb{Z}$ - 周期的. 从而,

$$\bigcup_{E \subset \mathbb{N}_p} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_q} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_p} [(S_E - rN + kM) \cap S], \quad (2.5)$$

$$\bigcup_{E \subset \mathbb{N}_p} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_q} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_p} [(S_E - rN + kM) \setminus S] \quad (2.6)$$

是分别 $qN\mathbb{Z}$ - 同余于 $\mathbb{N}_{qN} \cap S$ 和 $\mathbb{N}_{qN} \setminus S$ 的.

由 S 的 $N\mathbb{Z}$ - 周期性和 S_E 的定义, 可得

当 $(r, k) \in \mathbb{N}_q \times E$ 时, $S_E - rN + kM \subset S$, 当 $(r, k) \in \mathbb{N}_q \times (\mathbb{N}_p \setminus E)$ 时, $(S_E - rN + kM) \cap S = \emptyset$;

当 $(r, k) \in \mathbb{N}_q \times E$ 时, $(S_E - rN + kM) \setminus S = \emptyset$, 当 $(r, k) \in \mathbb{N}_q \times (\mathbb{N}_p \setminus E)$ 时, $S_E - rN + kM \subset \mathbb{Z} \setminus S$.

故集合 (2.5) 和 (2.6) 分别等于 T_1 和 T_2 . 由此可得 (ii) 和 (iii). 证毕. $\square$

下述引理说明一个 $q \times p$ 矩阵值函数如何决定 $l^2(S)$ 中的一个序列.

引理 2.2 设 N 、 M 和 S 满足基本假定, G 是一个定义在 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$ 上元素属于 $L^2(\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1))$ 的 $q \times p$ 矩阵值函数, 则下列叙述等价:

- (i) 定义在 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$ 上的 $G(\cdot, \cdot)$ 通过 (2.1) 唯一确定一个函数 $g \in l^2(S)$.
- (ii) 对任意 $(r, k) \in \mathbb{N}_q \times (\mathbb{N}_p \setminus E)$, $E \subsetneq \mathbb{N}_p$, 在 $S_E \times [0, 1)$ 上, 有 $G(\cdot, \cdot)_{r,k} = 0$, 其中 S_E 定义如 (2.2).
- (iii) 对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有 $G(j, \theta) = G(j, \theta)D(j)$.

证明 根据引理 2.1(i) 知, $\{S_E : E \subset \mathbb{N}_p\}$ 是 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 的一个分划. 同时注意到, 当 $j \in S_{\mathbb{N}_p} \neq \emptyset$ 时, $D(j) = I_p$. 由此即可得 (ii) 与 (iii) 的等价性. 下证 (i) 与 (ii) 等价. 根据注 2.1, 定义在 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$ 上的 G 通过 (2.1) 唯一确定一个函数 $g \in l^2(\mathbb{Z})$. 因此, 只需证 (ii) 成立当且仅当在 $\mathbb{Z} \setminus S$ 上, $g(\cdot) = 0$. 由引理 2.1 知, T_2 与 $\mathbb{N}_{qN} \setminus S$ 是 $qN\mathbb{Z}$ -同余的. 于是, $\mathbb{Z} \setminus S = T_2 + qN\mathbb{Z}$, 其中 T_2 定义如 (2.4). 又注意到 (ii) 等价于对任意 $j \in T_2$, 有 $\mathcal{Z}_{qN}g(j, \cdot) = 0$. 因此, 由 $\mathcal{Z}_{qN}$ 的定义可得 (ii) 等价于在 $\mathbb{Z} \setminus S$ 上, $g(\cdot) = 0$. 证毕. $\square$

作为引理 2.2 和文献 [52, 定理 1] 的直接推论, 我们有下列引理:

引理 2.3 设 N 、 M 和 S 满足基本假定. 若 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 和 $\mathcal{G}(h, N, M)$ 均为 $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Bessel 序列, 则 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组 GBF 当且仅当对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$(H^*G)(j, \theta) = \frac{1}{M}D(j).$$

由文献 [52, 引理 4] 可知, 对每个 $\ell \in \mathbb{Z}$, 均存在唯一的 $(k_\ell, r_\ell, m_\ell) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$, 使得

$$\ell = k_\ell q + (m_\ell q - r_\ell)p. \quad (2.7)$$

此外, ℓ 取遍 $\mathbb{N}_q$ 当且仅当 r_ℓ 取遍 $\mathbb{N}_q$. 下文中, 我们以 $U_\ell(\theta)$ 和 $V_\ell(\theta)$ 分别表示下述 $p \times p$ 和 $q \times q$ 矩阵值函数: 对任意 $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$U_\ell(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{-2\pi i \theta} I_{k_\ell} \\ I_{p-k_\ell} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad V_\ell(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{q-r_\ell} \\ e^{2\pi i \theta} I_{r_\ell} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

引理 2.4 设 N 、 M 和 S 满足基本假定, 则对任意 $\ell \in \mathbb{Z}$ 和 $(j, \theta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, 有

$$D\left(j + \frac{M}{q}\ell\right) = U_\ell^*(\theta)D(j)U_\ell(\theta).$$

定理 2.1 设 N 、 M 和 S 满足基本假定, 且 $g, h \in l^2(S)$, 则 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_\infty^\infty(S)$ 相关的 WGBF 当且仅当对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$(H^*G)(j, \theta) = \frac{1}{M}D(j). \quad (2.9)$$

证明 由文献 [52, 引理 5] 可知, 对任意 $j, \ell \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$(H^*G)\left(j + \frac{M}{q}\ell, \theta\right) = U_\ell^*(\theta)(H^*G)(j, \theta)U_\ell(\theta).$$

从而, 由引理 2.4 可得 (2.9) 等价于对任意 $j \in \mathbb{Z}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有 $(H^*G)(j, \theta) = \frac{1}{M}D(j)$, 进而等价于对任意 $j \in \mathbb{N}_M$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$(H^*G)(j, \theta) = \frac{1}{M}D(j). \quad (2.10)$$

注意到 $\{\frac{1}{\sqrt{M}}e^{\frac{2\pi i m}{M}} : m \in \mathbb{N}_M\}$ 是 $l^2(\mathbb{N}_M)$ 的标准正交基. 由于 $f \in l_\infty^\infty(S)$, 再根据文献 [52, 引理 3] 可得对任意 $r \in \mathbb{N}_q$, 有

$$\sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{M}{M}} T_{(nq+r)N} g \rangle \langle E_{\frac{M}{M}} T_{(nq+r)N} h, f \rangle$$

$$= M \sum_{j=0}^{M-1} \langle (\overline{G(j, \cdot)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \cdot))_r, e^{2\pi i n \cdot} \rangle_{L^2[0,1]} \overline{\langle (\overline{H(j, \cdot)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \cdot))_r, e^{2\pi i n \cdot} \rangle_{L^2[0,1]}},$$

其中 $\overline{G(j, \cdot)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \cdot), \overline{H(j, \cdot)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \cdot) \in L^2([0, 1], \mathbb{C}^q)$. 又因为 $\{e^{2\pi i n \cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0, 1]$ 的标准正交基, 对任意 $r \in \mathbb{N}_q$, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} h, f \rangle \\ &= M \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 (\overline{G(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta))_r \overline{(\overline{H(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta))_r} d\theta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

由 $f \in l_{\mathbb{Z}}^{\infty}(S)$, 根据文献 [52, 命题 1] 可知, $\mathcal{G}(f, N, M)$ 是一个 Bessel 序列. 又由于 $M - \mathbb{N}_M = \mathbb{N}_M$, 故而等价于 $\{E_{\frac{M-m}{M}} T_{-nN} f : m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}\}$ 是一个 Bessel 序列. 而

$$\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle = e^{\frac{-2\pi i m n N}{M}} \langle E_{\frac{M-m}{M}} T_{-nN} f, g \rangle,$$

故 $\{\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle\}_{m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{N}_M \times \mathbb{Z})$. 类似可得 $\{\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h \rangle\}_{m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{N}_M \times \mathbb{Z})$. 从而, 级数 $\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle$ 绝对收敛, 因此,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} h, f \rangle \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{(nq+r)N} h, f \rangle. \end{aligned}$$

再结合 (2.11), 可得对任意 $f \in l_{\mathbb{Z}}^{\infty}(S)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle &= M \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 (\overline{G(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta))_r \overline{(\overline{H(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta))_r} d\theta \\ &= M \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 \langle \overline{G(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta), \overline{H(j, \theta)} \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta) \rangle_{\mathbb{C}^q} d\theta \\ &= M \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 \langle (\overline{H^* G})(j, \theta) \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta), \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta) \rangle_{\mathbb{C}^p} d\theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

根据命题 1.1(i), 对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 有

$$\|f\|^2 = \|\mathbf{Z}_{qN} f\|_{L^2(\mathbb{N}_M \times [0,1], \mathbb{C}^p)}^2. \quad (2.13)$$

考虑到 $l_{\mathbb{Z}}^{\infty}(S)$ 是 $l^2(S)$ 的线性稠子空间. 结合 (2.12) 和 (2.13), 由注 1.2 可得

$$(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$$

是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_{\mathbb{Z}}^{\infty}(S)$ 相关的 WGBF 当且仅当对任意 $f \in l_{\mathbb{Z}}^{\infty}(S)$, 有

$$\sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 \langle (\overline{H^* G})(j, \theta) \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta), \mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta) \rangle_{\mathbb{C}^p} d\theta = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \int_0^1 \|\mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta)\|_{\mathbb{C}^p}^2 d\theta. \quad (2.14)$$

下证 (2.10) 与 (2.14) 的等价性以完成证明. 显然, 由命题 1.1 (iv) 知 (2.10) 可导出 (2.14). 现证 (2.14) $\Rightarrow$ (2.10). 设 (2.14) 成立. 由命题 1.1 以及 $\mathcal{Z}_{qN}$ 的伪周期性可知 $G(j, \theta)$ 和 $H(j, \theta)$ 的元素均属于 $L^2(\mathbb{N}_M \times [0, 1))$, 从而, $\overline{(H^*G)(j, \theta)}$ 的元素均属于 $L^1(\mathbb{N}_M \times [0, 1))$. 这意味着 $(0, 1)$ 中几乎每个点都是 $\overline{(H^*G)(j, \theta)}$ 中元素的 Lebesgue 点, 其中 $j \in \mathbb{N}_M$. 任意固定 $\theta_0 \in (0, 1)$ 、 $j_0 \in \mathbb{N}_M$ 和 $x \in \mathbb{C}^p$, 在 (2.14) 中取 f 使得

$$\mathbf{Z}_{qN} f(j, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \chi_{\{j_0\}}(j) \chi_{(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)}(\theta) D(j)x.$$

由命题 1.1(i) 和 1.1(vi) 可知, f 是有意义的. 根据引理 2.2(iii), 经简单计算可得

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} \langle \overline{(H^*G)(j_0, \theta)} x, x \rangle d\theta = \left\langle \frac{1}{M} D(j_0)x, x \right\rangle. \quad (2.15)$$

在 (2.15) 中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得 $\langle \overline{(H^*G)(j_0, \theta_0)} x, x \rangle = \langle \frac{1}{M} D(j_0)x, x \rangle$, 再由文献 [1, 引理 2.4.4] 可得

$$(H^*G)(j_0, \theta_0) = \frac{1}{M} D(j_0).$$

由 x 、 j_0 和 θ_0 的任意性知, (2.10) 成立. 证毕. $\square$

注意到, 由 (2.9) 可得对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$\text{rank}(G(j, \theta)) = \text{rank}(H(j, \theta)) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_S(j + kM), \quad (2.16)$$

则由文献 [30, 定理 3.3], 我们有下述推论:

推论 2.1 设 N 、 M 和 S 满足基本假定. 若 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l^\infty_\mathcal{Z}(S)$ 相关的 WGBF, 则 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 和 $\mathcal{G}(h, N, M)$ 在 $l^2(S)$ 完备.

设 N 、 M 和 S 满足基本假定. 由定理 2.1 以及推论 2.1 之前的论述可知, 对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, 有

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_S(j + kM) \leq q$$

是 $l^2(S)$ 中存在与 $l^\infty_\mathcal{Z}(S)$ 相关的 WGBF 的必要条件. 下述例子表明它也是充分条件.

例 2.1 设 N 、 M 和 S 满足基本假定, 且 S 满足对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, 有 $\sum_{k=0}^{p-1} \chi_S(j + kM) \leq q$. 定义 $g, h \in l^2(S)$ 使得对任意 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 a.e. $\theta \in [0, 1)$, 有

$$G(j, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{若 } (j, \theta) \in S_\emptyset \times [0, 1), \quad \text{card}(S_\emptyset) > 0, \\ U(j, \theta) \Lambda^{(1)}(j, \theta) V(j, \theta), & \text{若 } (j, \theta) \in S_E \times [0, 1), \quad \emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p, \quad \text{card}(S_E) > 0, \end{cases}$$

$$H(j, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{若 } (j, \theta) \in S_\emptyset \times [0, 1), \quad \text{card}(S_\emptyset) > 0, \\ U(j, \theta) \Lambda^{(2)}(j, \theta) V(j, \theta), & \text{若 } (j, \theta) \in S_E \times [0, 1), \quad \emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p, \quad \text{card}(S_E) > 0, \end{cases}$$

其中 S_E 定义如 (2.2), $U(j, \theta)$ 是一个 $q \times q$ 的西矩阵值可测函数; 对 $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p$ 、 $\text{card}(S_E) > 0$ 和 $(j, \theta) \in S_E \times [0, 1)$, $V(j, \theta)$ 满足 $V_{E \times E}$ 是一个西矩阵值可测函数, 且 $V_{E \times E}$ 之外的元素均为零; $\Lambda^{(1)}(j, \theta)$ 和 $\Lambda^{(2)}(j, \theta)$ 为 $q \times p$ 矩阵值函数, 并满足

$$\Lambda_{\mathbb{N}_{\text{card}(E)} \times E}^{(1)} = \text{diag}(\lambda_1(j, \theta), \lambda_2(j, \theta), \dots, \lambda_{\text{card}(E)}(j, \theta)),$$

$$\Lambda_{\mathbb{N}_{\text{card}(E)} \times E}^{(2)} = \text{diag}(\mu_1(j, \theta), \mu_2(j, \theta), \dots, \mu_{\text{card}(E)}(j, \theta)),$$

且它们之外的元素均为零, 其中对 $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p$, $\text{card}(S_E) > 0$, $(j, \theta) \in S_E \times [0, 1)$ 和 $1 \leq i \leq \text{card}(E)$, 有 $\lambda_i(j, \theta), \mu_i(j, \theta) \in L^2(S_E \times [0, 1))$, $\lambda_i(j, \theta) \overline{\mu_i(j, \theta)} = \frac{1}{M}$, 则 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l^\infty(S)$ 相关的 WGBF.

证明 由 $U(j, \theta)$ 和 $V(j, \theta)$ 的假设可知 $U(j, \theta)$ 和 $V(j, \theta)$ 的元素属于 $L^\infty(\bigcup_{\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p} S_E \times [0, 1))$, 进而, $G(j, \theta)$ 和 $H(j, \theta)$ 的元素均属于 $L^2(\bigcup_{\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p} S_E \times [0, 1))$. 又注意到对任意 $(j, \theta) \in S_\emptyset \times [0, 1)$, 有

$$G(j, \theta) = H(j, \theta) = 0, \quad (2.17)$$

且由引理 2.1 知, $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} = \bigcup_{E \subset \mathbb{N}_p} S_E$. 由此可知, $G(j, \theta)$ 和 $H(j, \theta)$ 中的元素属于 $L^2(\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1))$. 从而, 根据注 2.1 可得 $g, h \in l^2(\mathbb{Z})$. 经简单计算, 对任意 $(j, \theta) \in \bigcup_{\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p} S_E \times [0, 1)$, 有

$$V(j, \theta) = V(j, \theta)D(j). \quad (2.18)$$

再结合 (2.17), 由引理 2.1(i) 可得对任意 $(j, \theta) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$, 有

$$G(j, \theta)D(j) = G(j, \theta) \quad \text{和} \quad H(j, \theta)D(j) = H(j, \theta).$$

故由引理 2.2 可得 $g, h \in l^2(S)$. 由 $G(j, \theta)$ 和 $H(j, \theta)$ 的定义, 易证: 对任意 $(j, \theta) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1)$, 有

$$(H^*G)(j, \theta) = \frac{1}{M}D(j).$$

因此, 由定理 2.1 可得 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组 WGBF. $\square$

注 2.2 根据文献 [52, 命题 1], 经简单推导, 易证例 2.1 中的 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组 GBF 当且仅当对 $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p$, $\text{card}(S_E) > 0$ 和 $1 \leq i \leq \text{card}(E)$, 有

$$\lambda_i(j, \theta), \mu_i(j, \theta) \in L^\infty(S_E \times [0, 1)).$$

因此, 若存在 $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N}_p$, $\text{card}(S_E) > 0$ 和 $1 \leq i_0 \leq \text{card}(E)$, 使得 $\lambda_{i_0}(j, \theta)$ 或 $\mu_{i_0}(j, \theta) \notin L^\infty(S_E \times [0, 1))$, 则 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组 WGBF, 但不是一组 GBF.

3 WGBF 的时域刻画

本节致力于 $l^2(S)$ 中与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF 的时域刻画, 其中 N 、 M 和 S 满足基本假定.

引理 3.1 设 $M \in \mathbb{N}$, $g, h \in l^2(\mathbb{Z})$, 则对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 有

$$\sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} h, f \rangle = M \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{f(j)} h(j) \overline{g(j-lM)} f(j-lM), \quad (3.1)$$

且上述级数绝对收敛.

证明 定义 $\Gamma: l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{N}_M \times \mathbb{Z})$ 如下: 对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, $(j, l) \in \mathbb{N}_M \times \mathbb{Z}$, 有

$$\Gamma f(j, l) = f(j-lM),$$

则 Γ 是一个酉算子. 从而, 对任意 $f \in l^2(\mathbb{Z})$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}\langle f, E_{\frac{m}{M}} g \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} &= \langle \Gamma f, \Gamma E_{\frac{m}{M}} g \rangle_{l^2(\mathbb{N}_M \times \mathbb{Z})} = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(j-lM) \overline{g(j-lM)} \right) e^{-\frac{2\pi i m j}{M}}, \\ \langle f, E_{\frac{m}{M}} h \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(j-lM) \overline{h(j-lM)} \right) e^{-\frac{2\pi i m j}{M}}.\end{aligned}$$

注意到 $\{\frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i j}{M}} : j \in \mathbb{N}_M\}$ 是 $l^2(\mathbb{N}_M)$ 的标准正交基, 故

$$\sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} g \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \langle E_{\frac{m}{M}} h, f \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = M \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{f(j-lM)} h(j-lM) G(j),$$

其中 $G(\cdot) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(\cdot-lM) \overline{g(\cdot-lM)}$. 又因为

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\overline{f(j-lM)} h(j-lM) G(j)| &\leq \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(j-lM) h(j-lM)| \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(j-lM) g(j-lM)| \right) \\ &\leq M \|h\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|g\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|f\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 < \infty,\end{aligned}$$

且 $G(\cdot)$ 是 $M\mathbb{Z}$ -周期的, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} g \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \langle E_{\frac{m}{M}} h, f \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} &= M \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{f(j-lM)} h(j-lM) G(j-lM) \\ &= M \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{f(j)} h(j) G(j) \\ &= M \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{f(j)} h(j) \overline{g(j-lM)} f(j-lM).\end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\overline{f(j)} h(j) \overline{g(j-lM)} f(j-lM)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\overline{f(j)} h(j)| \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\overline{g(j-lM)} f(j-lM)| \\ &\leq \|f\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \|g\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|h\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.2 设 $N, M \in \mathbb{N}$, 且 $g, h \in l^2(\mathbb{Z})$. 定义

$$P(j) = (P_{m,l}(j))_{m,l \in \mathbb{Z}}, \quad P_{m,l}(j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j-nN+LM)} h(j-nN+mM),$$

则对任意 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 有

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle = M \sum_{j=0}^{M-1} \langle P(j) F(j), F(j) \rangle, \quad (3.2)$$

且上式左端级数绝对收敛, 其中 $F(j) = (f(j+lM))_{l \in \mathbb{Z}}$.

证明 固定 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 则 $\mathcal{Z}_q N f \in L^\infty(\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$, 进一步由文献 [52, 命题 1] 可知, $\mathcal{G}(f, N, M)$ 是 Bessel 序列. 注意到对任意 $\tilde{f} \in l^2(\mathbb{Z})$, $m \in \mathbb{N}_M$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} \tilde{f} \rangle = e^{-\frac{2\pi i m n N}{M}} \langle \tilde{f}, E_{\frac{M-m}{M}} T_{-nN} f \rangle.$$

从而, $\{\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle\}_{m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}}, \{\langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h \rangle\}_{m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{N}_M \times \mathbb{Z})$, 这意味着级数

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle$$

是绝对收敛的. 因此,

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle.$$

再将 $T_{nN} g$ 和 $T_{nN} h$ 代入引理 3.1 可得

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle = M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN - lM)} h(j - nN) f(j - lM) \overline{f(j)} \right].$$

因为 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 所以仅有有限多个 $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN - lM)} h(j - nN) f(j - lM) \overline{f(j)}$ 不为零. 又注意到 $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_M + M\mathbb{Z}$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle \\ &= M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + (m-l)M)} h(j - nN + mM) f(j + (m-l)M) \overline{f(j + mM)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由于 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 则任意固定 $j \in \mathbb{N}_M$, 上述求和关于 m 和 l 仅有有限多个非零项. 同时注意到对任意 $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\overline{g(j_1 - nN)} h(j_2 - nN)| \leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|h\|_{l^2(\mathbb{Z})} < \infty.$$

故由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \\ &= M \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + (m-l)M)} h(j - nN + mM) f(j + (m-l)M) \overline{f(j + mM)} \\ &= M \sum_{j=0}^{M-1} \langle P(j) F(j), F(j) \rangle. \end{aligned}$$

证毕. □

定理 3.1 设 $N, M \in \mathbb{N}$ 且 S 满足基本假定, $g, h \in l^2(S)$, 则 $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF 当且仅当对任意 $l \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \mathbb{N}_N \cap S \cap (S - lM)$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + lM)} h(j - nN) = \frac{1}{M} \delta_{l,0}. \quad (3.4)$$

证明 由 $l_0(S)$ 是 $l^2(S)$ 的线性稠子空间可知, $(\mathcal{G}(g, N, M), \mathcal{G}(h, N, M))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF 当且仅当

$$\|f\|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{\frac{m}{M}} T_{nN} g \rangle \langle E_{\frac{m}{M}} T_{nN} h, f \rangle,$$

运用引理 3.2 可知, 其等价于对任意 $f \in l_0(S)$, 有

$$\sum_{j=0}^{M-1} \langle P(j)F(j), F(j) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \langle F(j), F(j) \rangle, \quad (3.5)$$

其中 $F(j) = (f(j + lM))_{l \in \mathbb{Z}}$. 在 $\mathbb{N}_M$ 上定义

$$\varepsilon(\cdot) = \text{diag}(\dots, \chi_s(\cdot - 2M), \chi_s(\cdot - M), \chi_s(\cdot), \chi_s(\cdot + M), \chi_s(\cdot + 2M), \dots),$$

则由 $l_0(S) = \chi_s l_0(\mathbb{Z})$ 可知, 对任意 $j \in \mathbb{N}_M$, 有

$$\{F(\cdot) : f \in l_0(S)\} = \{\varepsilon(\cdot)F(\cdot) : f \in l_0(\mathbb{Z})\}.$$

故 (3.5) 可重写为对任意 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 有

$$\sum_{j=0}^{M-1} \langle P(j)\varepsilon(j)F(j), \varepsilon(j)F(j) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \langle \varepsilon(j)F(j), \varepsilon(j)F(j) \rangle,$$

即对任意 $f \in l_0(\mathbb{Z})$, 有

$$\sum_{j=0}^{M-1} \langle \varepsilon(j)P(j)\varepsilon(j)F(j), F(j) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \langle \varepsilon(j)F(j), F(j) \rangle. \quad (3.6)$$

为完成证明, 接下来分两个步骤来证明 (3.4) 和 (3.6) 的等价性.

步骤 1 等式 (3.6) 等价于对任意 $j \in \mathbb{N}_M$, 有

$$\varepsilon(j)P(j)\varepsilon(j) = \frac{1}{M}\varepsilon(j). \quad (3.7)$$

易知 (3.7) 可导出 (3.6). 下证 (3.6) $\Rightarrow$ (3.7). 设 (3.6) 成立. 任意固定 $j_0 \in \mathbb{N}_M$, $x \in l_0(\mathbb{Z})$. 在 (3.6) 取 f 使得在 $\mathbb{N}_M$ 上, $F(\cdot) = \chi_{\{j_0\}}(\cdot)x$, 则

$$\left\langle \left(\varepsilon(j_0)P(j_0)\varepsilon(j_0) - \frac{1}{M}\varepsilon(j_0) \right) x, x \right\rangle = 0.$$

根据文献 [1, 引理 2.4.4] 以及 j_0 和 x 的任意性即可得 (3.7).

步骤 2 等式 (3.7) 等价于 (3.4).

因为对任意 $(m, l) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $j \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon(j)P(j)\varepsilon(j)$ 的 (m, l) 位置元素 $(\varepsilon(j)P(j)\varepsilon(j))_{m, l}$ 是

$$P_{m, l}(j)\chi_s(j + lM)\chi_s(j + mM),$$

(3.7) 等价于对任意 $j \in \mathbb{N}_M$ 和 $(m, l) \in \mathbb{Z}^2$, 有

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + lM)} h(j - nN + mM) \right) \chi_s(j + lM)\chi_s(j + mM) = \frac{1}{M} \delta_{m, l} \chi_s(j + mM). \quad (3.8)$$

注意到, 当 $j \notin (S - lM) \cap (S - mM)$ 时,

$$\chi_s(j + lM)\chi_s(j + mM) = \frac{1}{M}\delta_{m,l}\chi_s(j + mM) = 0,$$

故 (3.8) 成立当且仅当对任意 $(m, l) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $j \in \mathbb{N}_M \cap (S - lM) \cap (S - mM)$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + lM)}h(j - nN + mM) = \frac{1}{M}\delta_{m,l}. \quad (3.9)$$

又由于 $\mathbb{N}_M + M\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, (3.9) 等价于对任意 $(m, l) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $j \in S \cap (S - (l - m)M)$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + (l - m)M)}h(j - nN) = \frac{1}{M}\delta_{l-m,0}, \quad (3.10)$$

即对任意 $l \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in S \cap (S - lM)$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(j - nN + lM)}h(j - nN) = \frac{1}{M}\delta_{l,0}.$$

再由 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(\cdot - nN + lM)}h(\cdot - nN)$ 的 $N\mathbb{Z}$ -周期性, 得上式等价于 (3.4). 证毕. $\square$

例 3.1 给定 $S = \{0, 1\} + 3\mathbb{Z}$, 且 $f_1, f_2 \in l^2(\mathbb{Z})$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$f_1(6n) = f_2(6n) = \frac{1}{2}\delta_{n,0} \quad \text{和} \quad f_1(6n + 4) = f_2(6n + 2) = 0. \quad (3.11)$$

设 $g, h \in l^2(S)$ 满足

$$\hat{g}(\cdot) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(3n) e^{6\pi i n \cdot} \right) = \hat{f}_1(\cdot), \quad (3.12)$$

$$\hat{g}(\cdot) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(3n + 1) e^{2\pi i (3n + 1) \cdot} \right) = \hat{f}_2(\cdot), \quad (3.13)$$

则 $(\mathcal{G}(g, 3, 2), \mathcal{G}(h, 3, 2))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF.

证明 易证

$$\{(l, j) : l \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_3 \cap S \cap (S - 2l)\} = \{(l, 0) : l \in (3\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z} + 2)\} \cup \{(l, 1) : l \in (3\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z} + 1)\},$$

则由定理 3.1 可知, $(\mathcal{G}(g, 3, 2), \mathcal{G}(h, 3, 2))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF 当且仅当对任意的 $l \in \mathbb{Z}$, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(-3n + 6l)}h(-3n) = \frac{1}{2}\delta_{l,0}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(-3n + 6l + 4)}h(-3n) = 0, \quad (3.15)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(1 - 3n + 6l)}h(1 - 3n) = \frac{1}{2}\delta_{l,0}, \quad (3.16)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g(1 - 3n + 6l + 2)}h(1 - 3n) = 0. \quad (3.17)$$

定义 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in l^2(\mathbb{Z})$, 使得

$$\tilde{h}_1(n) = \begin{cases} h(-3m), & \text{当 } n = 3m, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ 时,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\tilde{h}_2(n) = \begin{cases} h(1-3m), & \text{当 } n = 3m-1, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ 时,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 (3.14)–(3.17) 可重写为对任意 $l \in \mathbb{Z}$, 有

$$\tilde{h}_1 * \bar{g}(6l) = \frac{1}{2} \delta_{l,0}, \quad (3.18)$$

$$\tilde{h}_1 * \bar{g}(6l+4) = 0, \quad (3.19)$$

$$\tilde{h}_2 * \bar{g}(6l) = \frac{1}{2} \delta_{l,0}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{h}_2 * \bar{g}(6l+2) = 0, \quad (3.21)$$

且 (3.12) 和 (3.13) 可重写为

$$[\tilde{h}_1 * \bar{g}]^\wedge(\cdot) = \hat{f}_1(\cdot), \quad (3.22)$$

$$[\tilde{h}_2 * \bar{g}]^\wedge(\cdot) = \hat{f}_2(\cdot). \quad (3.23)$$

由 (3.22) 和 (3.23) 可导出 $\tilde{h}_1 * \bar{g} = f_1$ 和 $\tilde{h}_2 * \bar{g} = f_2$, 再由 (3.11), 即可得 (3.18)–(3.21). 证毕. $\square$

例 3.2 设 $S = \{0, 1\} + 3\mathbb{Z}$, F 是一个 $\frac{1}{6}\mathbb{Z}$ -周期函数, 满足: $F, \frac{1}{F} \in L^2[-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}]$,

$$F(\cdot) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-12\pi i n \cdot}, \quad \frac{1}{F(\cdot)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(n) e^{-12\pi i n \cdot}.$$

定义 $g, h \in l^2(\mathbb{Z})$, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$g(6n) = \frac{1}{2} \delta_{n,0}, \quad g(6n+1) = \overline{f(n)}, \quad g(6n+2) = g(6n+3) = g(6n+4) = g(6n+5) = 0,$$

$$h(3n) = \delta_{n,0}, \quad h(6n+1) = \frac{\overline{\tilde{f}(n)}}{2}, \quad h(6n+2) = h(6n+4) = h(6n+5) = 0,$$

则 $(\mathcal{G}(g, 3, 2), \mathcal{G}(h, 3, 2))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF.

证明 显然, $g, h \in l^2(S)$. 定义 $f_1, f_2 \in l^2(\mathbb{Z})$ 使得

$$\hat{f}_1(\cdot) = \frac{1}{2} + e^{-2\pi i \cdot} F(\cdot), \quad \hat{f}_2(\cdot) = \frac{1}{2} + \frac{e^{2\pi i \cdot}}{4F(\cdot)}.$$

则易证 (3.11)–(3.13) 成立. 因此, 由例 3.1 可得 $(\mathcal{G}(g, 3, 2), \mathcal{G}(h, 3, 2))$ 是 $l^2(S)$ 的一组与 $l_0(S)$ 相关的 WGBF. $\square$

致谢 作者感谢审稿人的宝贵意见, 它提高了文章的可读性.

参考文献

- Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2016

- 2 Young R M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. New York: Academic Press, 1980
- 3 Atreas N, Melas A, Stavropoulos T. Affine dual frames and extension principles. *Appl Comput Harmon Anal*, 2014, 36: 51–62
- 4 Bownik M, Rzeszotnik Z. Construction and reconstruction of tight framelets and wavelets via matrix mask functions. *J Funct Anal*, 2009, 256: 1065–1105
- 5 Daubechie I, Han B. Pairs of dual wavelet frames from any two refinable functions. *Constr Approx*, 2004, 20: 325–352
- 6 Daubechies I, Han B, Ron A, et al. Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames. *Appl Comput Harmon Anal*, 2003, 14: 1–46
- 7 Ehler M. On multivariate compactly supported bi-frames. *J Fourier Anal Appl*, 2007, 13: 511–532
- 8 Ehler M, Han B. Wavelet bi-frames with few generators from multivariate refinable functions. *Appl Comput Harmon Anal*, 2008, 25: 407–414
- 9 Ron A, Shen Z. Affine systems in $L^2(\mathbb{R}^d)$: The analysis of the analysis operator. *J Funct Anal*, 1997, 148: 408–447
- 10 Stavropoulos T. The geometry of extension principles. *Houston J Math*, 2012, 38: 833–853
- 11 Zhou F Y, Li Y Z. Multivariate FMRA's and FMRA frame wavelets for reducing subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$. *Kyoto J Math*, 2010, 50: 83–99
- 12 Jia H F, Li Y Z. Weak (quasi-)affine bi-frames for reducing subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$. *Sci China Math*, 2015, 58: 1005–1022
- 13 Jia H F, Li Y Z. Refinable function-based construction of weak (quasi-)affine bi-frames. *J Fourier Anal Appl*, 2014, 20: 1145–1170
- 14 Li Y Z, Jia H F. Weak nonhomogeneous wavelet bi-frames for reducing subspaces of sobolev spaces. *Numer Funct Anal Optim*, 2017, 38: 181–204
- 15 Li Y Z, Jia H F. Weak Gabor bi-frames on periodic subsets of the real line. *Int J Wavelets Multiresolut Inf Process*, 2015, 13: 1550046
- 16 Casazza P G, Christensen O. Weyl-Heisenberg frames for subspaces of $L^2(\mathbb{R})$. *Proc Amer Math Soc*, 2001, 129: 145–155
- 17 Dai X, Diao Y, Gu Q. Subspaces with normalized tight frame wavelets in $\mathbb{R}$. *Proc Amer Math Soc*, 2002, 130: 1661–1667
- 18 Dai X, Diao Y, Gu Q, et al. Frame wavelets in subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$. *Proc Amer Math Soc*, 2002, 130: 3259–3268
- 19 Dai X, Diao Y, Gu Q, et al. The existence of subspace wavelet sets. *J Comput Appl Math*, 2003, 155: 83–90
- 20 Gabardo J P, Han D. Subspace Weyl-Heisenberg frames. *J Fourier Anal Appl*, 2001, 7: 419–433
- 21 Gabardo J P, Han D. Balian-low phenomenon for subspace Gabor frames. *J Math Phys*, 2004, 45: 3362–3378
- 22 Gabardo J P, Han D. The uniqueness of the dual of Weyl-Heisenberg subspace frames. *Appl Comput Harmon Anal*, 2004, 17: 226–240
- 23 Gabardo J P, Han D, Li Y Z. Lattice tiling and density conditions for subspace Gabor frames. *J Funct Anal*, 2013, 265: 1170–1189
- 24 Gabardo J P, Li Y Z. Rational time-frequency Gabor frames associated with periodic subsets of the real line. *Int J Wavelets Multiresolut Inf Process*, 2014, 12: 1450013
- 25 Li Y Z, Zhang Y. Rational time-frequency vector-valued subspace Gabor frames and Balian-Low theorem. *Int J Wavelets Multiresolut Inf Process*, 2013, 11: 1350013
- 26 Seip K. Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1993, 117: 213–220
- 27 Tian Y, Li Y Z. Subspace dual super wavelet and Gabor frames. *Sci China Math*, 2017, 60: 2429–2446
- 28 Cahill J, Li S. Dimension invariance of finite frames of translates and Gabor frames. *Adv Comput Math*, 2012, 37: 505–520
- 29 Li S. Discrete multi-Gabor expansions. *IEEE Trans Inform Theory*, 1999, 45: 1954–1967
- 30 Li Y Z, Lian Q F. Gabor systems on discrete periodic sets. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1639–1660
- 31 Li S, Liu Y, Mi T. Sparse dual frames and dual Gabor functions of minimal time and frequency supports. *J Fourier Anal Appl*, 2013, 19: 48–76
- 32 Lopez J, Han D. Discrete Gabor frames in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. *Proc Amer Math Soc*, 2013, 141: 3839–3851
- 33 Qiu S. Discrete Gabor transforms: The Gabor-Gram matrix approach. *J Fourier Anal Appl*, 1998, 4: 1–17
- 34 Qiu S. The undersampled discrete Gabor transform. *IEEE Trans Signal Process*, 1998, 46: 1221–1228
- 35 Moreno-Picot S, Arevalillo-Herraez M, Diaz-Villanueva W. A linear cost algorithm to compute the discrete Gabor transform. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 2667–2674
- 36 Søndergaard P L. Efficient algorithms for the discrete Gabor transform with a long fir window. *J Fourier Anal Appl*, 2012, 18: 456–470
- 37 Strohmer T. Numerical algorithms for discrete Gabor expansions. In: *Gabor Analysis and Algorithms. Applied and*

- Numerical Harmonic Analysis. Boston: Birkhäuser, 1998, 267–294
- 38 Tao L, Hu G H, Kwan H K. Multiwindow real-valued discrete Gabor transform and its fast algorithms. *IEEE Trans Signal Process*, 2015, 63: 5513–5524
 - 39 Tao L, Kwan H K. Multirate-based fast parallel algorithms for 2-D DHT-based real-valued discrete Gabor transform. *IEEE Trans Image Process*, 2012, 21: 3306–3311
 - 40 Tao L, Kwan H K. Fast parallel approach for 2-D DHT-based real-valued discrete Gabor transform. *IEEE Trans Image Process*, 2009, 18: 2790–2796
 - 41 Tao L, Kwan H K. Novel DCT-based real-valued discrete Gabor transform and its fast algorithms. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 2151–2164
 - 42 Wiesmeyr C, Holighaus N, Sondergaard P L. Efficient algorithms for discrete Gabor transforms on a nonseparable lattice. *IEEE Trans Signal Process*, 2013, 61: 5131–5142
 - 43 Xia X G, Qian S. Convergence of an iterative time-variant filtering based on discrete Gabor transform. *IEEE Trans Signal Process*, 1999, 47: 2894–2899
 - 44 Janssen A J E M. From continuous to discrete Weyl-Heisenberg frames through sampling. *J Fourier Anal Appl*, 1997, 3: 583–596
 - 45 Orr R S. Derivation of the finite discrete Gabor transform by periodization and sampling. *Signal Process*, 1993, 34: 85–97
 - 46 Søndergaard P L. Gabor frame by sampling and periodization. *Adv Comput Math*, 2007, 27: 355–373
 - 47 Heil C. A Discrete Zak Transform. Technical Report MTR-89W00128, 1989
 - 48 Li Y Z, Lian Q F. Tight Gabor sets on discrete periodic sets. *Acta Appl Math*, 2009, 107: 105–119
 - 49 Li Y Z, Lian Q F. Super Gabor frames on discrete periodic sets. *Adv Comput Math*, 2013, 38: 763–799
 - 50 Li Y Z, Lian Q F. Multi-window Gabor frames and oblique Gabor duals on discrete periodic sets. *Sci China Math*, 2011, 54: 987–1010
 - 51 Lian Q F, Li Y Z. Super oblique Gabor duals of super Gabor frames on discrete periodic sets. *Numer Funct Anal Optim*, 2013, 34: 284–322
 - 52 Lian Q F, Li Y Z. The duals of Gabor frames on discrete periodic sets. *J Math Phys*, 2009, 50: 013534

Weak Gabor bi-frames on discrete periodic sets

Yunzhang Li & Jing Zhao

Abstract Due to its good potential for digital signal processing, discrete Gabor analysis has received broad interests in recent years. This paper addresses Gabor analysis on a general discrete periodic subset S of $\mathbb{Z}$. It is well known that the projections of Gabor frames for $l^2(\mathbb{Z})$ onto $l^2(S)$ cannot cover all Gabor frames for $l^2(S)$ if $S \neq \mathbb{Z}$. In this paper, we introduce the notion of weak Gabor bi-frame (WGBF) which generalizes the one of Gabor bi-frame. We obtain a Zak transform domain characterization and a time domain characterization of WGBF in $l^2(S)$. The obtained results are new even if $S = \mathbb{Z}$. Some examples are provided.

Keywords frame, Gabor frame, bi-frame, weak Gabor bi-frame, discrete Gabor analysis

MSC(2010) 42C40, 42C15

doi: 10.1360/SCM-2017-0349