定理 1 (参见 G. Farin, *Subsplines über Dreiecken*, Dissertation, Braunschweig, FRG, 1979) 对于 $x\in[0,1]$，一致地成立着

$$\lim_{k\to\infty} G_n^{(k)}f(x) = B_n(f;x). \tag{4}$$

Farin 定理告诉我们，当 k 充分大时，$G_n^{(k)}f(x)$ 将非常靠近 $B_n(f;x)$，因此，不难验证

定理 2 $B_n(f;x)>0$ 对 $x\in[0,1]$ 成立的一个充要条件是：存在非负整数 k，使得 $G_n^{(k)}f_i>0$，$i=0,1,\cdots,n+k$.

有例子说明定理 2 中的">0"不能改成"$\geqslant 0$".

近年来，Bernstein 多项式在计算几何中得到了广泛的应用，在应用中，人们希望知道在怎样的条件下，所设计出的曲线和曲面是凸的. 因

$$\frac{d^2}{dx^2}B_n(f;x) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\Delta^2 f_i J_i^{n-2}(x), \tag{5}$$

故当 $\Delta^2 f_i\geqslant 0$，$i=0,1,\cdots,n-2$，即特征多边形 $G_n^{(0)}f$ 是凸的时，曲线 $y=B_n(f;x)$ 是凸的. 作为上述结论的推广，有

定理 3 如果存在非负整数 k，使升阶多边形是凸的，即 $\Delta^2 G_n^{(k)}f_i\geqslant 0$，$i=0,1,\cdots,n+k-2$，则 $y=B_n(f;x)$ 是 $[0,1]$ 上的凸曲线.

周建伟

(中国科学技术大学数学系，合肥)

平稳弱相关过程积分的收敛性

在随机微分方程理论中，平稳弱相关模型已被深入研究. 假设 $g(x,\omega)$ 是一以 ε 为相关长度的平稳弱相关过程，人们已获得形如

$$\eta(t,\omega) = \int_0^t G(x)g(x,\omega)\,dx, \quad (0\leqslant t\leqslant T)$$

的过程的任意有限维分布的渐近正态性. 其中 $G(x)$ 是具有光滑的一阶导数的函数. 本文给出了 $\eta(\cdot)$ 的一个弱不变原理.

定理 当相关长度 ε 趋于零时，随机过程 $\dfrac{\eta(t)}{\sqrt{2\langle g^2(x)\rangle\varepsilon}}$ 在 $c(0,T)$ 上弱收敛于 Gauss 过程

$$H(t,\omega) = \int_0^t G(x)dW(x,\omega),$$

其中 W 是标准 Wiener 过程.

作为这一结果的直接推论，可以给出 $\eta(t)$ 的任何连续泛函向作为极限的 Gauss 过程的相应泛函的依分布的收敛性.

林正炎

(杭州大学数学系)

一类平面三次系统的分枝与相图

1981 年，C. S. Coleman 在"Hilbert 第十六问题，多少个环?"一文中说，对于平面多项式微分系统，"当 $n>2$ 时，不知道眼的最大个数是多少，也不知道眼内的眼有多么复杂的样式，或者是否存在包含不止一个奇点的眼". 所谓眼，即极限环. 本文对 $n=3$ 情形，给出两种"眼"的样式.

考虑平面 Hamilton 扰动系统

$$\frac{dx}{dt} = y(1-cy^2) + \mu x(x^2+y^2-\lambda),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x(1-ax^2) + \mu y(x^2+y^2-\lambda), \tag*{$(1)_\mu$}$$

其中 $a>c>0$，$0<\mu\ll 1$. 系统 $(1)_{\mu=0}$ 的通积分具有极坐标形式 $\left(-\infty<h<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$:

$$r^2 = \frac{1\pm[1-h(a\cos^4\theta + c\sin^4\theta)]^{1/2}}{a\cos^4\theta + c\sin^4\theta}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1\pm\sqrt{V(\theta,h)}}{u(\theta)}, \tag{2}$$

用 r_+^2 记 (2) 式右边根号前取正号的式子，引入记号

$$\theta_1 = \arccos\frac{3c-a}{a+c}, \quad b_1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{c},$$

$$b_2 = \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{2\sqrt{V\left(\theta,\frac{1}{c}\right)}}{u^2(\theta)} d\theta \Big/ \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{\sqrt{V\left(\theta,\frac{1}{c}\right)}}{u(\theta)} d\theta, \tag{3}$$

$$b_3 = \int_{0}^{\pi/2} \frac{2\sqrt{V\left(\theta,\frac{1}{a}\right)}}{u^2(\theta)} d\theta \Big/ \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{V\left(\theta,\frac{1}{a}\right)}}{u(\theta)} d\theta. \tag{4}$$

用 C_m^k 表示套在一起的一串 k 个包围重数和为 m 的多个奇点的极限环，用包含号“$\supset$”表示有相包关系的极限环．我们用 Понтрягин 与张芷芬定理及 Мельников 方法讨论当 λ 改变时，系统 $(1)_\mu$ 的极限环与奇异环分枝，作为特例，得到下述结论:

定理 (i) 当 $b_3+o(\mu)<\lambda<b_2+o(\mu)$ 时，系统 $(1)_\mu$ 存在包围 9 个奇点的大圈包住分别包围 3 个奇点的两个中型圈的极限环分布，记为

$$C_9^1 \supset (C_3^1 + C_3^1)$$

型.

(ii) 当 $b_2+o(\mu)<\lambda<b_1$ 时，系统 $(1)_\mu$ 存在包围 9 个奇点的大圈包住四个分别包围一个奇点的小圈的极限环分布，记为 $C_9^1 \supset (C_1^1+C_1^1+C_1^1+C_1^1)$ 型.

李继彬

（昆明工学院数学教研室）

关于算子代数稠密性的几点注记

为探讨著名的超不变子空间问题，1955 年，R. V. Kadison 提出了较为合适的相关问题，即可迁代数问题；1972年，C. Foias 首次引进了算子值域的概念，把可迁代数问题的解决推进了一步．1978 年，H. Radjavi 引进了具有极小不变算子值域的一类算子代数，文末他提出问题：$\mathfrak{U}$ 是一个算子代数，$\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$（$\mathfrak{U}$ 的不变算子值域格）的极小元子集非空时，是否 $\mathfrak{U}$ 在 $B(H)$ 中强稠? 关于此问题，目前人们已证得当 $\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$ 含一个或两个极小元时，回答是肯定的．进一步，我们得到下列结果:

定理 1 设 $\mathfrak{U}$ 是 $B(H)$ 的可迁子代数，$\{K_\omega H: \omega\in\Omega\}$ 为 $\mathfrak{U}$ 的极小不变算子值域族，如果 Ω 是一至多可数集，则 $\mathfrak{U}$ 在 $B(H)$ 中强稠.

定理 2 设 $\mathfrak{U}$ 为 $B(H)$ 的可迁子代数，$[K_\omega H: \omega\in\Omega\}$ 为 $\mathfrak{U}$ 的极小不变算子值域族，则要么 $\mathfrak{U}$ 在 $B(H)$ 中强稠，要么对任给 $n\in N$，皆存在 Ω 中子集 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$\omega_i\quad 1\leqslant i\leqslant n$ 两两不同，及 $B(H)$ 中可逆算子 $S_i\quad 1\leqslant i\leqslant n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} K_{\omega_i} S_i = 0.$$

H. Radjavi 同时还注意到下列问题，设 $\mathfrak{U}$ 为可迁代数，若存在 $M\in\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$，$M\neq\{0\}$，对任给 $N\in\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$，若 $\{0\}\neq N\leqslant M\Rightarrow N=M$，则 $\mathfrak{U}$ 在 $B(H)$ 中强稠吗? 对此，我们有下述结果

定理 3 设 $A\in B(H)$，$\{A\}'$ 记 A 的换位，如果存在 $M\neq\{0\}$，$M\in\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$，对任给 $N\in\mathrm{Lat}_{1/2}\mathfrak{U}$，有 $\{0\}\neq N\subseteq M\Rightarrow N=M$，则要么 A 有非平凡超不变子空间，要么 $A=\lambda I$，λ 为复数.

陈　铭

（陕西师范大学数学系，西安）

关于多项式表素数问题

设 $Q(n)=n^2-n+p$，本文用同余式和二次剩余的理论研究了 $Q(n)$ 表示素数的问题．得到了

定理 1 设 q 为奇素数，$Q(n)=n^2-n+p$，则

$$Q(n)\equiv 0 \pmod q,$$

有解的充分与必要条件是

$$p\equiv 0,-2,\cdots,-r(r-1),\cdots,-\frac{q^2-1}{4} \pmod q,$$

且有解时，对应于 $p\equiv -r(r-1) \pmod q$，其解为

$$n\equiv r \pmod q,\quad r=1,2,\cdots,\frac{q+1}{2}.$$

定理 2 设 p_l 为小于 $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ 的最大素数，若 $1\leqslant n\leqslant \frac{p_l+1}{2}$ 时，$Q(n)$ 均表素数，则当

$$1\leqslant n\leqslant p-1$$

时，$Q(n)$ 亦均表素数.

定理 3 设 $Q(n)$ 当 $1\leqslant n\leqslant p-1$ 时均表素数，则当 $1\leqslant n\leqslant \frac{p-3}{2}$ 时，$4(n^2+p)-1$ 亦均为素数.

定理 4 设 $4p-1$ 为素数，则当 $1\leqslant n\leqslant p-1$ 时，$Q(n)$ 均为素数的充分必要条件是 p 必为 $4p-1$ 的二次剩余中的最小素数.

裘卓明

（山东大学数学系，济南）