一类高阶多维非线性 Schrödinger 方程组的初值问题和周期初值问题*

郭 柏 灵

本文考虑如下一类高阶多维非线性 Schrödinger 方程组

$$i\boldsymbol{u}_t + (-1)^m \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^m \boldsymbol{u}}{\partial x_j^m} + \beta(x,t) q(|\boldsymbol{u}|^2)\boldsymbol{u} + K(x,t)\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

和初始条件

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(x), \qquad -\infty < x_1, x_2, \cdots, x_n < \infty, \tag{2}$$

或周期初始条件

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(x), \qquad -\infty < x_1, x_2, \cdots, x_n < \infty, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(x_j + 2\pi, t) = \boldsymbol{u}(x_j, t), \qquad \forall x_j, t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^T$, $|\boldsymbol{u}|^2 = |u_1|^2 + \cdots + |u_N|^2$, $K(x,t) = (k_{lr}(x,t))$, $l, r = 1, 2, \cdots, N$. $i = \sqrt{-1}$. 我们将证明初值问题 (1)、(2) 和周期初值问题 (1)、(3)、(4) 一类广义解的存在性、唯一性. 对于初值问题 (1)、(2), 我们设它的解 $u_j(x,t)$ 及其某些导数当 $|x| \to \infty$ 时趋于 $0 (j = 1, 2, \cdots, N)$. 对于周期初值问题 (1)、(3)、(4), 我们设 $a_{ij}(x,t)$, $\beta(x,t)$, $k_{lr}(x,t)$ 和 $u_0^l(x) (i, j = 1, 2, \cdots, n; r, l = 1, 2, \cdots, N)$ 均为 x_j 的周期 2π 函数. 我们沿用前文**的通常的记号和约定. 对于定解问题 (1)、(2) 和 (1)、(3)、(4) 的解, 我们有如下估计:

引理 1 若满足以下条件: (i) $a_{ij}(x,t)$, $k_{lr}(x,t)$, $\beta(x,t)$, $q(s)$ 均为实值函数; (ii) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \alpha > 0$, 且 $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $k_{lr}(x,t)$ 有界, $i, j = 1, 2, \cdots, n$; $l, r = 1, 2 \cdots, N$. (iii) $u_0^l(x) \in L_2$, $l = 1, 2, \cdots, N$. 则有估计

$$\|u_j(t)\|^2_{L_2 \times L_\infty} \leqslant E_0, \tag{5}$$

其中 E_0 为确定常数, 它仅依赖于初值及 $k_{lr}(x,t)$ 的上界.

证 对 (1) 式 $\boldsymbol{u}$ 的 N 个分量 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 的方程, 分别乘以 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_N$ 作内积且取虚部, 由引理假定及 Gronwall 不等式即得.

引理 2 若满足引理 1 条件, 且设: (i) $a_{ijt}(x,t)$, $k_{lrt}(x,t)$ 和 $\beta_t(x,t)$ 有界 $(i, j = 1, 2, \cdots, n;\ l, r = 1, 2, \cdots, N)$; (ii) $q(s) \geqslant 0$, $s \in [0, \infty)$, 且 $k_{lr}(x,t) = k_{rl}(x,t)$, $l, r = 1, 2, \cdots, N$, $\beta(x,t) \geqslant 0$; (iii) $\int Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx \leqslant K\left(\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|^2_{L_2}\right)$, K 为常数, $Q(s) =$

本文 1980 年 11 月 24 日收到.

* 本文结果已在"双微"北京讨论会 (1980) 上报告过.

** 郭柏灵, 国际双微会议北京讨论会论文集(即将出版).

$\int_0^s q(z)dz$；(iv) $\frac{\partial^m u_0^l}{\partial x_i^m}\in L_2$, $l=1,2,\cdots,N$; $i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2\times L_\infty}^2\leqslant E_1,\tag{6}$$

其中 E_1 为确定常数.

证　对于(1)式 $\boldsymbol{u}$ 的分量 $u_l(l=1,2,\cdots N)$ 的方程，分别乘以 $\overline{u_{lt}}$，作内积取实部，且注意到

$$(-1)^m\int\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^m}{\partial x_i^m}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}\overline{u_{lt}}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}\frac{\partial^m\overline{u_l}}{\partial x_i^m}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}\frac{\partial^m\overline{u_l}}{\partial x_i^m}dx,\ l=1,2,\cdots,N.$$

$$\sum_{l=1}^{N}\mathrm{Re}(\beta q u_l,u_{lt})=\frac{1}{2}\int\beta(x,t)\frac{d}{dt}Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx,$$

故可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\sum_{l=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}\frac{\partial^m\overline{u_l}}{\partial x_i^m}dx+\frac{d}{dt}\int\beta(x,t)Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{l=1}^{N}\int k_{ll}|u_l|^2dx$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\sum_{l=1}^{N}\sum_{l\neq r}\int k_{lr}(x,t)\cdot\mathrm{Re}(u_r,\overline{u_l})dx\right]\leqslant\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\int\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ijt}|\left|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}\right|\left|\frac{\partial^m\bar{u}_l}{\partial x_i^m}\right|dx$$

$$+\int|\beta_t|Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\int|k_{llt}||u_l|^2dx+\sum_{l=1}^{N}\sum_{l\neq r}\int|k_{lrt}||u_r||u_l|dx$$

$$\leqslant M_1\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2+M_2,$$

将上式对 t 在 $[0,T]$ 上积分可得

$$\alpha\cdot\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2(T)\leqslant M_3\int_0^T\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2dt+M_4,$$

由 Gronwall 不等式,即得(6)式.

推论 1　若 $n=1$, $m\geqslant 1$ 或 $1<n\leqslant 3$, $m\geqslant 2$, 则由 Sobolev 不等式有

$$\sum_{l=1}^{N}\|u_l\|_{L_\infty}\leqslant E_2,\tag{7}$$

其中 E_2 为确定常数.

引理 3　若满足引理 2 条件,且设 (i) $q(s)\in C^1$, $s\in[0,\infty)$; (ii) $n=1$, $m\geqslant 1$; $1<n\leqslant 3$, $m\geqslant 2$; (iii) $\sum_{l=1}^{N}\|u_{lt}(0)\|_{L_2}^2\leqslant\mathrm{const}$. 则有

$$\sum_{l=1}^{N}\|u_{lt}(t)\|_{L_2\times L_\infty}^2\leqslant E_3,\tag{8}$$

其中 E_3 为确定常数.

证　(1)式对 t 作微商后，令 $u_{lt}=v_l$，再分别乘以 $\overline{v_l}$ 作内积可得

$$(iv_{lt}, v_l) + (-1)^m\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^m v_l}{\partial x_j^m}, v_l\right) + (-1)^m\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} a_{ijt} \frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}, v_l\right)$$

$$+ (\beta_t q u_l, v_l) + \left(\beta \frac{\partial}{\partial t} q u_l, v_l\right) + \left(\sum_{r=1}^{N} k_{lrt} u_r, v_l\right) + \left(\sum_{r=1}^{N} k_{lr} v_r, v_l\right) = 0, \tag{9}$$

注意到

$$(-1)^m \sum_{i,j=1}^{m} \int \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^m v_l}{\partial x_j^m} \bar{v}_l dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int a_{ij} \frac{\partial^m v_l}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m \overline{v_l}}{\partial x_j^m} dx$$

$$\geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m v_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2,$$

$$(-1)^m\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} a_{ijt} \frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m}, v_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \int a_{ijt} \frac{\partial^m v_l}{\partial x_i^m} \frac{\partial^m u_l}{\partial x_j^m} dx$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m v_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2 + C \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2,$$

$$(\beta_t q u_l, v_l) \leqslant \|\beta_t\|_{L_\infty} \|q(|\boldsymbol{u}|^2)\|_{L_\infty} \cdot \frac{1}{2}(\|u_l\|_{L_2}^2 + \|v_l\|_{L_2}^2),$$

$$\left(\beta \frac{\partial}{\partial t} q u_l, v_l\right) \leqslant |(\beta q v_l, v_l)| + \left|\left(\beta u_l q' \frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{u}|^2, v_l\right)\right| \leqslant M_1 \cdot \sum_{l=1}^{N} \|v_l\|_{L_2}^2,$$

$$\left(\sum_{r=1}^{N} k_{lrt} u_r, v_l\right) + \left(\sum_{r=1}^{N} k_{lr} v_r, v_l\right) \leqslant M_2 \cdot \sum_{l=1}^{N} (\|u_l\|_{L_2}^2 + \|v_l\|_{L_2}^2),$$

于是由 (9) 对 l 从 1 到 N 求和，且选取 ε 适当小，使 $\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{2}$，则易得

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^{N} \|v_l\|_{L_2}^2 \leqslant M_3 \cdot \sum_{l=1}^{N} \|v_l\|_{L_2}^2 + M_4,$$

由 Gronwall 不等式，即得 (1.8) 式.

推论 2 $\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2 \times L_\infty}^2 \leqslant E_4$，$E_4$ 为确定常数.

由 Galerkin 方法[1]，和类似引理 1—引理 3 的估计，可知定解问题 (1)、(2) 和 (1)、(3)、(4) 的局部解是存在的；再由引理 1—引理 3 的先验估计，可得到它们的大范围的整体解，我们有

定理 1 若满足以下条件：(i) $a_{ij}(x,t)$，$\beta(x,t)$，$k_{lr}(x,t)$，$q(s)$ 为实值函数；a_{ijt}，k_{lrt}，β_t 有界；且 $k_{lr} = k_{rl}$，$a_{ij} = a_{ji}$，$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{u} |\xi_i|^2$，$\alpha > 0$，$l, r = 1, 2, \cdots, N$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. (ii) $\beta(x,t) \geqslant 0$；$q(s) \in c^1$，$q(s) \geqslant 0$，$s \in [0, \infty)$. (iii) $\int Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx \leqslant K \cdot \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m}\right\|_{L_2}^2$，其中 $Q(s) = \int_0^s q(z)dz$. (iv) $n = 1$，$m \geqslant 1$；$1 < n \leqslant 3$，$m \geqslant 2$. (v) $u_0^l(x) \in H^{2m}(l = 1, 2, \cdots, N)$. 则存在定解问题 (1)、(2) 和定解问题 (1)、(3)、(4) 的广义解 $u_l(x,t) \in L^\infty(0, T; H^{2m})$，$u_{lt}(x,t) \in L^\infty(0, T; L^2)$，$l = 1, 2, \cdots, N$.

引理 4 (Sobolev 估计[2]) 设 $u \in L_q(R^n)$，$D^m u \in L_r(R^n)$，$1 \leqslant q$，$r < \infty$，则对

$0 \leqslant j \leqslant m$, $j/m \leqslant a < 1$ 有

$$\|D^j u\|_{L_p} \leqslant C \|D^m u\|_{L_r}^a \|u\|_{L_q}^{1-a}. \tag{10}$$

于此 $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}$, C 为正常数.

定理 2 若满足定理 1 中除 (iii) 的其他条件，且有 $q(s) \leqslant As^{\frac{2m}{n}}$, $A = \text{const} > 0$, $s > 0$,则定理 1 成立.

证 由引理 4 和定理 1 即得.

对于 $\beta(x, t) < 0$ 的情况,我们有

定理 3 若满足定理 1 中除 (iii) 和 $\beta(x, t) \geqslant 0$ 的条件,且设 $|\beta(x,t)| \leqslant M$, $\exists \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \alpha/M$, 使得 $\int Q(|\boldsymbol{u}|^2)dx \leqslant \varepsilon \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m} \right\|_{L_2}^2$ 成立,则定理 1 成立.

证 在引理 2 证明中,只需注意到

$$\left| \int \beta(x, t) Q(|\boldsymbol{u}|^2) dx \right| \leqslant \delta \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m u_l}{\partial x_i^m} \right\|_{L_2}^2, \quad 0 < \delta < \alpha,$$

即可.

定理 4 若满足定理 1 中除 (iii) 和 $\beta(x, t) \geqslant 0$ 的其他条件，且设 $|\beta(x, t)| \leqslant M$, $q(s) \leqslant \varepsilon s^{\frac{2m}{n}}$ 或 $q(s) \leqslant As^{\frac{2m}{n} - \delta}$, $A = \text{const} > 0$, $s > 0$, 其中 ε 和 δ 为充分小的正数. 则定理 1 成立.

证 由引理 4 的 Sobolev 估计，Sobolev 不等式和定理 3 即得.

对于 $\beta(x, t) \leqslant 0$ 且不满足定理 4 的条件,很可能出现“blow up”的情况.

利用通常的能量法 L_2 模估计和中值定理,不难得到

定理 5 设 $q(s) \in C^1$, $k_{lr}(x, t)$, $\beta(x, t)$ 有界,则定解问题 (1)、(2) 和定解问题 (1)、(3)、(4) 的有界解是唯一的.

参 考 文 献

[1] Bui An Ton, *J. Diff. Equations*, **28**(1977), 288—309.

[2] Friedman, A., *Partial Differential Equations*, Holt, New York, 1969.