



一种基于证据理论的结构可靠性优化设计方法

范松^{①②}, 姜潮^{①*}, 张哲^①, 刘杰^①

① 湖南大学机械与运载工程学院, 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082;

② 广州汽车集团股份有限公司汽车工程研究院, 广州 511434

* E-mail: jiangc@hnu.edu.cn

收稿日期: 2015-08-26; 接受日期: 2016-02-01

国家自然科学基金优秀青年科学基金(批准号: 51222502)、国家自然科学基金(批准号: 11172096)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 51490662)和湖南省杰出青年基金(编号: 14JJ1016)资助项目

摘要 针对包含认知不确定性的结构可靠性问题, 提出了一种基于证据理论的可靠性优化设计方法. 首先, 在优化过程中基于代理模型对迭代点处各约束进行可靠性分析, 计算其似真度; 其次, 通过证据变量均匀化方法构造了一种证据理论可靠性的近似梯度计算方法, 从而可采用基于梯度的常规优化算法进行优化求解; 最后, 数值算例和工程算例表明了本方法的有效性.

关键词 认知不确定性, 证据理论, 结构可靠性, 优化设计, 可靠性梯度

1 引言

实际工程中材料参数、形状尺寸、边界条件以及载荷等不确定性因素的耦合作用, 可能对结构或产品的性能造成很大影响, 因此在设计阶段有效度量和控制不确定性对保证产品质量和可靠性十分重要. 参数不确定性可认为是现有知识水平和完备知识水平下对事物认识的差异, 一般可分为随机不确定性和认知不确定性两类^[1,2]. 随机不确定性源于物理系统的内在变化, 需足够的信息以构建不确定性变量的分布函数, 概率理论^[3-6]在描述随机不确定性上具有显著优势. 认知不确定性源于建模和优化的过程中缺乏足够的信息, 目前认知不确定性的建模理论主要包括可能性理论^[7]、模糊集理论^[8]、凸模型理论^[9-11]和证据理论^[12,13]等, 其中证据理论是一种更为

一般的认知不确定性建模方法^[4], 具有很强的认知不确定性建模和分析能力: 当证据理论的子区间无穷小时, 等价于传统的概率理论; 当不确定信息之间无冲突时, 等价于可能性理论; 当证据变量的子区间唯一时, 其退化为凸模型理论.

国内外学者对证据理论在结构认知不确定性的建模及可靠性评估方面进行了一系列研究和探索. Oberkampf 和 Helton^[15]通过简单的代数函数总结出证据理论在可靠性分析中的优势和劣势. 姜潮等人^[16]通过引入非概率可靠性指标有效地减少了证据理论可靠性分析中需要进行极值分析的焦元数目, 提高了可靠性分析的效率. Helton 等人^[17]针对模型中存在认知不确定性输入问题, 结合证据理论发展出一种基于采样策略的可靠性灵敏度分析方法. Bae 等人^[18,19]提出了基于证据理论的多点近似法(MPA), 将

引用格式: 范松, 姜潮, 张哲, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性优化设计方法. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 706-716
Fan S, Jiang C, Zhang Z, et al. A reliability-based design optimization method for structures using evidence theory (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 706-716, doi: 10.1360/N092015-00264

样本集中于失效域附近, 由此构建了适用于证据理论可靠性分析的高效代理模型. Zhang 等人^[20]提出了一种针对证据理论的新型实验设计(DOE)方法, 并在此基础上构建了可靠性分析的代理模型.

针对优化问题中存在认知不确定性的情形, 基于证据理论的可靠性优化设计方法(EBDO)被提出, 为复杂结构的可靠性设计提供了一种非常有潜力的解决方法, 目前该领域已有一些成果出现. Mourelatos 和 Zhou^[13]提出了一种基于证据理论的优化设计方法, 能够快速搜索到最优点的邻近区域并确定起作用约束. Srivastava 等人^[21]提出了一种基于双目标遗传算法的EBDO, 可以同时搜索不同似真度要求下的优化解. Alyanak 等人^[22]提出了一种梯度投影法构造了证据理论可靠性的梯度, 可提高认知不确定性传播问题和优化问题的计算效率. Salehghafari 等人^[23]运用证据理论对材料参数具有认知不确定性的加强圆管进行优化设计. Agarwal 等人^[24]采用一种序列近似优化策略来求解 EBDO 问题.

目前 EBDO 在工程中的应用还相对较少, 难以同时保证优化过程的计算效率和计算精度是限制其应用的主要技术瓶颈之一. EBDO 问题实质为外层优化设计、内层可靠性分析的双层嵌套问题, 该优化过程需多次计算约束的可靠度, 而证据理论可靠度的计算非常耗时, 致使整个优化过程的计算效率很低. 此外, 由于证据变量基本可信数(BPA)的离散特性, 约束的似真度随证据变量呈现阶跃型变化, 其梯度为零或者不存在, 导致 EBDO 无法直接利用高效的基于梯度的优化算法进行求解, 严重制约了其在工程实际中的应用.

为此, 本文提出了一种基于证据理论的结构可靠性优化设计方法, 从外层优化过程中构造约束可靠度的近似梯度和内层约束可靠性分析两方面入手, 在保证优化过程的计算精度的同时提高计算效率. 因为使用了约束可靠性的近似梯度(approximate gradient), 本方法被简称为 AG-EBDO 方法.

2 证据理论可靠性分析

Dempster 和 Shafer 最早提出了证据理论的概念, 因此证据理论又称 Dempster-Shafer 理论^[12]. 对于证据理论可靠性问题, 其极限状态方程可表述为

$$g = g(\mathbf{X}), \mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_{n_x}, \quad (1)$$

式中, $X_i (i=1, 2, \dots, n_x)$ 为相互独立的证据变量. 令 g_0 代表结构响应的许用值, 其失效域 F 可定义为

$$F = \{g : g(\mathbf{X}) < g_0\}. \quad (2)$$

下面将介绍常规证据理论可靠性分析方法的计算流程.

2.1 构建联合 BPA

证据变量 \mathbf{X} 的分布范围称为识别框架 Θ , 类似于概率理论中的样本空间^[13]. 若集函数 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ 满足以下 3 条性质:

$$m(A) \geq 0, \forall A \in 2^\Theta; \quad (3)$$

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m(A) = 1; \quad (4)$$

$$m(\phi) = 0. \quad (5)$$

则称 m 为识别框架上的基本可信度分配函数. $\forall A \in 2^\Theta$, $m(A)$ 称为 A 的基本可信数(BPA), $m(A) > 0$ 时, A 称为识别框架 Θ 的焦元. BPA 反映了证据对 \mathbf{X} 属于集合 A 这一命题的支持度, 类似于概率模型中的概率密度函数^[13].

证据合成法则用于合成不同来源证据对命题的支持度, 其中 Dempster 合成法则应用较为广泛, 适用于合成小冲突的证据来源. 假设 m_1 和 m_2 是同一识别框架上的不同证据来源的基本可信度分配函数, 其焦元分别为 B_1, B_2, \dots, B_r 和 C_1, C_2, \dots, C_s , 则合成可信度分配函数为^[25]

$$m(A) = \begin{cases} 0, & A = \phi, \\ \frac{\sum_{B_i \cap C_j = A} m_1(B_i)m_2(C_j)}{1 - K}, & A \neq \phi, \end{cases} \quad (6)$$

其中,

$$K = \sum_{B_i \cap C_j = A} m_1(B_i)m_2(C_j). \quad (7)$$

K 描述了不同证据之间的冲突程度, K 越大表明冲突越激烈.

与概率理论中联合概率密度类似, 在证据理论中, 联合 BPA 用来处理识别框架包含多个证据变量的情形. 对于 n_x 维变量问题, 若证据变量之间相互独立, 则可得到联合 BPA:

$$m_A(A) = \begin{cases} m(x_1) \cdot m(x_2) \cdots m(x_{n_x}), & A = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_{n_x}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (8)$$

式中, x_1, x_2, \dots, x_{n_x} 分别为证据变量 X_1, X_2, \dots, X_{n_x} 的焦元, A 为 x_1, x_2, \dots, x_{n_x} 的叉积. 如图 1 所示, 通常二维焦元在几何上为矩形, 而矩形的高度反映了联合 BPA 的大小, 所有焦元的联合 BPA 之和为 1.

2.2 计算可靠性区间

根据焦元与极限状态面 $g(\mathbf{X}) = g_0$ 的相对位置关系, 焦元可分为三类: 属于失效域的焦元、属于相交域的焦元和属于安全域的焦元. 如图 2 所示, 为确定焦元与极限状态面的相对位置关系, 需在焦元上进行极值分析^[13]:

$$[g_{\min}, g_{\max}] = \left[\min_{X \in A} g(X), \max_{X \in A} g(X) \right], \quad (9)$$

式中, $\min_{X \in A} g(X)$ 和 $\max_{X \in A} g(X)$ 分别表示焦元 A 上极限状态方程的极小值和极大值, 通常可采用极点法^[26]求解. 当 $g_{\max} < g_0$ 时, 焦元属于失效域; 当 $g_{\min} < g_0$ 且 $g_{\max} \geq g_0$ 时, 焦元属于相交域; 当 $g_{\min} \geq g_0$ 时, 焦元属于安全域.

假设命题 E 表示向量 \mathbf{X} 属于失效域 F , 即结构失

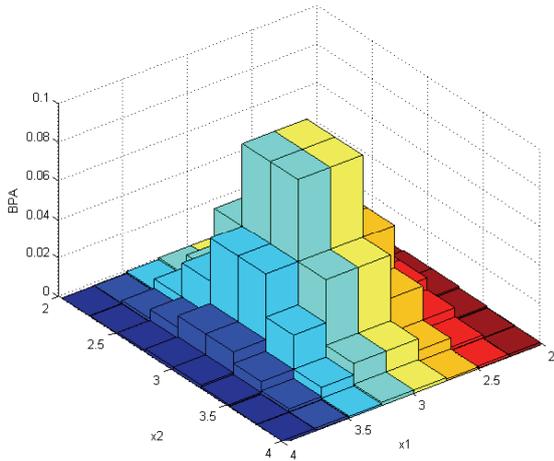


图 1 (网络版彩图)二维变量的联合 BPA

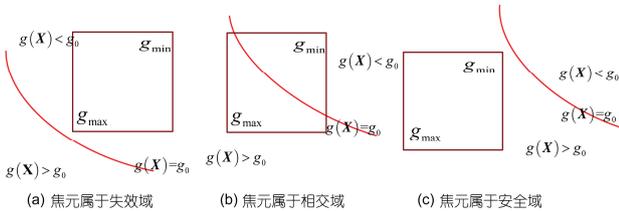


图 2 (网络版彩图)焦元与极限状态面的三种相对位置关系^[13]

效, 则证据理论用可信度 Bel 和似真度 Pl 两个测度来描述命题 E 的真实程度:

$$\text{Bel}(E) = \sum_{A \subset F} m(A), \quad (10)$$

$$\text{Pl}(E) = \sum_{A \cap F \neq \emptyset} m(A), \quad (11)$$

式中, $A \subset F$ 表示焦元 A 属于失效域内, 而 $A \cap F \neq \emptyset$ 则表示焦元 A 属于失效域或相交域. 如图 3 所示, 真实的结构失效概率 P_f 包含于可信度和似真度之间, 证据理论采用概率区间 $[\text{Bel}(E), \text{Pl}(E)]$ 描述结构在认知不确定性条件下失效的可能性. 似真度 $\text{Pl}(E)$ 与可信度 $\text{Bel}(E)$ 的差表征了 P_f 的不确定性程度.

上述证据理论可靠性方法需在各焦元上进行极值分析, 当不确定性变量数和变量焦元数较多时, 易出现大计算量问题, 国内外学者提出了多种方法在一定程度上减轻了其计算效率低的问题^[16-20].

3 基于证据理论的优化设计

基于证据理论的优化设计问题(EBDO)通常可表述为^[13]

$$\begin{aligned} & \min_{d, \mathbf{X}^N} f(d, \mathbf{X}^N, \mathbf{P}^N), \\ & \text{s.t. } \text{Pl}(g_i(d, \mathbf{X}, \mathbf{P}) < g_0) \leq f_0^i, i = 1, 2, \dots, n, \\ & \quad d_L \leq d \leq d_U, \\ & \quad \mathbf{X}_L^N \leq \mathbf{X}^N \leq \mathbf{X}_U^N, \end{aligned} \quad (12)$$

式中, d 为 n_d 维确定性设计向量, \mathbf{X} 为 n_x 维不确定设计向量, \mathbf{X}^N 为 \mathbf{X} 的名义值向量, \mathbf{P} 为 n_p 维不确定参数向量, \mathbf{P}^N 为 \mathbf{P} 的名义值向量, f_0^i 为第 i 个约束的许用失效概率, 不确定向量 $\mathbf{Z}=(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ 均采用证据变量描述, 其维数为 $n_z=n_x+n_p$; 设计向量用 $\mathbf{Y}=(d, \mathbf{X}^N)$ 表示, 其维数为 $n_y=n_d+n_x$. EBDO 问题具有以下特点: 第一, 证据变量 \mathbf{Z} 的均值为区间数^[27], 因此取其识别框架的中点为其名义值; 第二, 通常认为识别框架的边长为定值, 即证据变量 \mathbf{Z} 的不确定性程度在优化过程中保持不变; 第三, 采用似真度 Pl 评估约束的可靠性, 可

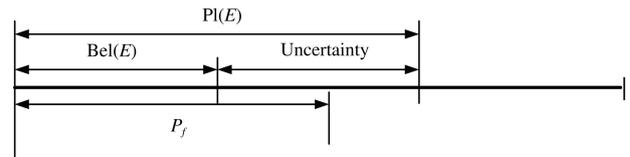


图 3 可信度和似真度

进一步保证安全性设计^[2,13].

上述 EBDO 问题的求解过程实质为一双层嵌套优化过程, 由于可靠性分析与优化过程的耦合导致 EBDO 的计算效率很低, 此外, 由于证据理论似真度的离散特性, 无法直接使用高效的基于梯度的优化算法, 进一步降低了其计算效率. 为此, 本文拟从以下两方面改善 EBDO 算法的实用性: 内层基于代理模型对约束进行可靠性分析; 外层通过均匀化方法构建似真度的近似梯度, 从而可利用高效的基于梯度的优化算法进行优化分析.

3.1 内层约束可靠性分析

EBDO 过程中需多次对内层约束进行可靠性分析, 而常规证据理论可靠性分析计算效率低, 引入代理模型是提高其计算效率的有效途径之一. 在对内层约束进行可靠性分析时, 主要关心识别框架范围内代理模型对极限状态方程的拟合精度. 实际工程问题中, 参数不确定性通常表现为绕名义值附近的扰动, 故识别框架通常较小, 故极限状态方程在该区域内通常非线性程度不大, 可以较有效地保证代理模型的精度. 为此, 本文采用一种基于代理模型的可靠性分析方法对内层约束进行可靠性评估, 可获得较高的计算精度和计算效率.

针对第 i 个约束的可靠性分析, 首先, 通过归一化方法将原空间 \mathbf{Z} 中的识别框架转换到标准空间 \mathbf{Q} 中. 对于证据变量 $Z_j (j=1, 2, \dots, n_z)$, 其识别框架通常表述为如下区间形式:

$$Z_j \in Z_j^I = [Z_j^L, Z_j^R], j=1, 2, \dots, n_z, \quad (13)$$

$$\begin{cases} Z_j^C = \frac{Z_j^L + Z_j^R}{2}, \\ Z_j^W = \frac{Z_j^R - Z_j^L}{2}, \end{cases} j=1, 2, \dots, n_z, \quad (14)$$

式中, I 表示区间, L 和 R 分别表示区间的下界和上界, C 和 W 分别表示区间的中点和半径. 对其进行标准化处理:

$$Q_j = (X_j - X_j^C) / X_j^W, j=1, 2, \dots, n_z. \quad (15)$$

可得标准空间中新的识别框架

$$\Theta' = \{Q | Q_j \in [-1, 1], j=1, 2, \dots, n_z\},$$

其几何上为中心与原点重合的多维正方体.

其次, 采用序列二次规划法(SQP)^[28]求解如下优化问题, 可得非概率可靠性指标 η ^[29], 即标准空间中无穷范数($\|\cdot\|_\infty$)意义下从原点到极限状态面的最短距离:

$$\begin{aligned} \min \eta &= \min_Q \{\|Q\|_\infty\}, \\ \text{s.t. } &\tilde{g}_i(Q) = g_0, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\tilde{g}_i(Q) = g_0$ 为标准空间中的第 i 个约束的极限状态面. 如图 4 所示, 几何上相当于一个中心在原点的多维正方体(虚线)均匀扩张, 直至与极限状态面相交于第一个点 Q_C (圆点). 该点即为式(16)的优化解, 其一般位于极限状态面与识别框架相交区域的中部, 本文取其为样本中心点 Q_C .

再次, 通过在样本中心点 $Q_C = (Q_{C1}, Q_{C2}, \dots, Q_{Cn})$ 和识别框架边界之间插值即可得到 $2n$ 个样本点, 如图 4 中方点, 其中沿 Q_j 坐标轴的两个样本点 Q_{C+1}^j 和 Q_{C-1}^j , 其坐标为

$$\begin{aligned} Q_{C+1}^j &= (Q_{C1}, Q_{C2}, \dots, Q_{Cj} + \delta \cdot (1 - Q_{Cj}), \dots, Q_{Cn}), \\ Q_{C-1}^j &= (Q_{C1}, Q_{C2}, \dots, Q_{Cj} - \delta \cdot (Q_{Cj} + 1), \dots, Q_{Cn}), \end{aligned} \quad (17)$$

式中, δ 是插值系数, 一般可取 $\delta \in (0.4, 1)$. 极限状态面和识别框架的相交区域附近的焦元均可能对可靠性分析造成较大影响, 该样本较为充分地分布在该区域^[30], 因而, 有利于提高代理模型对识别框架范围内极限状态方程的近似精度.

最后, 采用不含交叉项的二次多项式代理模型^[31]来近似第 i 个约束的极限状态方程:

$$\tilde{G}_i(Q) = a + \sum_1^{n_z} b_j Q_j + \sum_1^{n_z} c_j Q_j^2, \quad (18)$$

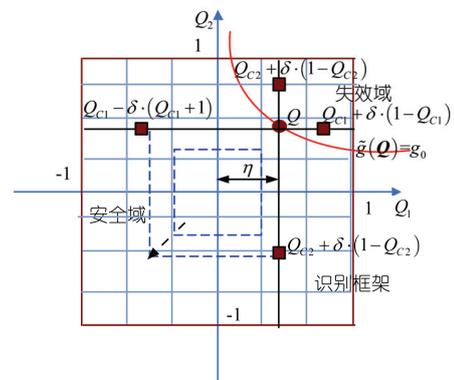


图 4 (网络版彩图)代理模型样本点的获取

式中, $a, b_j, c_j, j=1,2,\dots,n_Z$ 为待定系数, 共 $2n_Z+1$ 个. 将上述 $2n_Z+1$ 个样本点代入代理模型中, 即可求解式 (18) 中待定系数. 由于该代理模型具有较高的拟合精度, 将其代替极限状态方程代入第 2 节介绍的方法中进行证据理论可靠性分析, 可相对准确高效地计算其似真度 PI_i .

3.2 约束可靠性近似梯度的构建与分析

优化过程中通常需要计算约束可靠性的梯度, 但由于似真度 PI 的离散特性, 如图 5 所示, 似真度 PI 随设计变量发生阶跃型变化, 导致其梯度为零或者不存在, 此时, 高效的基于梯度的优化算法将会失效, 而不基于梯度的优化算法在求解该优化问题时计算效率通常较低^[13,21].

为此, 本文采用均匀化方法^[32]将证据变量 Z 转换为随机变量 \tilde{Z} . 针对证据变量 $Z_j, j \in (1,2,3,\dots,n_Z)$, 利用均匀化公式:

$$f_{Z_j}(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^{n(A)} \delta_i(Z_j) m(A_i) / (u_i - l_i), \quad (19)$$

式中, $f_{Z_j}(\cdot)$ 是证据变量 Z_j 均匀化后得到的随机变量 \tilde{Z}_j 的概率密度函数, A_i 是证据变量 Z_j 的焦点, u_i 和 l_i 分别为其上下界, $n(A)$ 为证据变量 Z_j 的焦点数. $\delta_i(Z_j)$ 被称为示性函数, 当 $Z_j \in A_i$ 时, $\delta_i(Z_j) = 1$, 否则 $\delta_i(Z_j) = 0$. 如图 6 所示, 为一包含 5 个焦点的证据变量的随机化过程.

经均匀化处理后, 第 i 个约束的可靠性评估过程仅包含随机变量 \tilde{Z} , 可计算其失效概率:

$$P_f^i = \Pr(g_i(\tilde{Z}) < g_0). \quad (20)$$

由随机可靠性理论可知 P_f^i 随设计变量 Y 连续变化,

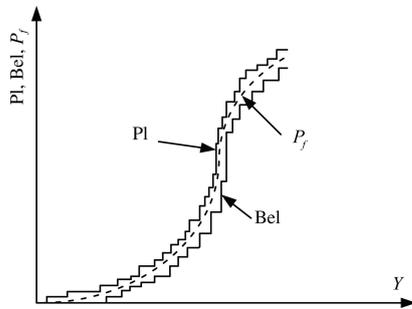


图 5 似真度、可信度和失效概率与设计变量关系

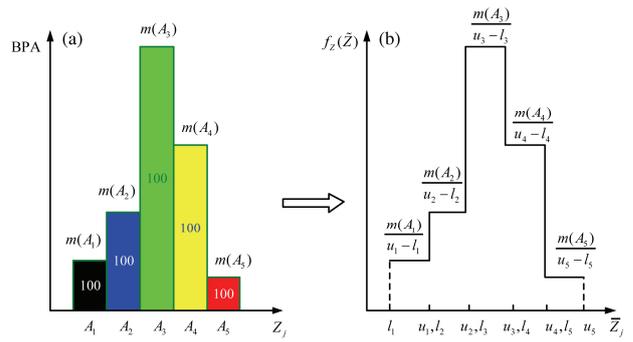


图 6 (网络版彩图) 证据变量随机化过程

(a) 证据变量; (b) 随机变量

其对设计变量 Y 的梯度是存在的, 记为 $\nabla P_f^i(Y)$. 由证据理论可知似真度 PI 和可信度 Bel 为所有可能失效概率的边界, 因此该 P_f 随设计变量的变化曲线亦位于似真度和可信度曲线之间, 三者具有相似的变化趋势, 图 5 给出了三者与设计变量的关系示意图. 梯度反映了曲线变化的趋势, 因此, P_f 曲线的梯度 $\nabla P_f^i(Y)$ 一定程度上描述了 Bel 曲线和 PI 曲线的变化趋势. 在 EBDO 优化过程中, 通常不需要约束似真度梯度的精确值, 只需构造一个表征似真度变化趋势的近似梯度值, 即可满足优化的要求^[22].

综上所述, 本文将第 i 个约束的失效概率梯度作为第 i 个约束似真度 $PI_i(Y)$ 的近似梯度为

$$\begin{aligned} \nabla PI_i(Y) &= \nabla P_f^i(Y) \\ &= \left[\frac{\partial P_f^i(Y)}{\partial Y_1}, \frac{\partial P_f^i(Y)}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial P_f^i(Y)}{\partial Y_j}, \dots, \frac{\partial P_f^i(Y)}{\partial Y_{n_y}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

同理, 通过失效概率 P_f^i 二阶梯度的计算, 可以获得约束似真度 $PI_i(Y)$ 的近似海塞矩阵 (Hessian matrix) $\nabla^2 PI_i(Y)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 PI_i(Y) &= \nabla^2 P_f^i(Y) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_1 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_1 \partial Y_2} & \dots & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_1 \partial Y_{n_y}} \\ \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_2 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_2 \partial Y_2} & \dots & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_2 \partial Y_{n_y}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_{n_y} \partial Y_1} & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_{n_y} \partial Y_2} & \dots & \frac{\partial^2 P_f^i(Y)}{\partial Y_{n_y} \partial Y_{n_y}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

经典的一次二阶矩方法(FORM)^[3,4]可用于求解式(20). 首先, 将原不确定变量空间转换到标准正态空间:

$$U_j = \phi^{-1} \{F_{Z_j}(\tilde{Z}_j)\}, j=1, 2, \dots, n_Z, \quad (23)$$

式中, F_{Z_j} 为变量 \tilde{Z}_j 的累积分布函数(CDF), ϕ^{-1} 为标准正态累积分布函数的反函数. 在标准正态空间中, 最可能失效点(MPP)可以通过求解以下优化问题得到:

$$\begin{aligned} \min_U & \|U\|, \\ \text{s.t.} & G_i(U) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $G_i(\cdot)$ 为标准正态空间中的功能函数, U 为转换后的标准正态随机向量.

其次, 采用 i -HLRF 算法^[33]求解式(23), 搜寻MPP, 假设迭代过程中第 k 步获得的迭代点为 $U^{(k)}$, 则第 $k+1$ 步迭代点 $U^{(k+1)}$ 通过下式求解:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \lambda D^{(k)}, \quad (25)$$

式中, $D^{(k)}$ 为搜索方向, 即:

$$\begin{aligned} D^{(k)} = & \frac{\nabla G_i(U^{(k)})(U^{(k)})^T - G_i(U^{(k)})}{\|\nabla G_i(U^{(k)})\|^2} \\ & \times \nabla G_i(U^{(k)}) - U^{(k)}; \end{aligned} \quad (26)$$

λ 为迭代步长, 由价值函数 μ 的最小值确定:

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \|U\| + \omega |G_i(U)|, \\ \omega > \frac{\|U\|}{\|\nabla G_i(U)\|}, \end{cases} \quad (27)$$

式中, ω 取符合条件的常数. 重复上述迭代过程, 直至 $\|U^{(k+1)} - U^{(k)}\| / \|U^{(k)}\| \leq \varepsilon$, 其中 ε 为较小的正值, 可得MPP点 U^* . 最后, 第 i 个约束的可靠性指标和失效概率分别为

$$\beta = \|U^*\|, \quad (28)$$

$$P_f^i = -\Phi(\beta). \quad (29)$$

3.3 算法基本流程

综上所述, 本文提出的AG-EBDO方法的优化过程如图6所示, EBDO迭代从如下确定性设计的最优点开始:

$$\begin{aligned} \min_{d, X^N} & f(d, X^N, P^N), \\ \text{s.t.} & g_i(d, X^N, P^N) \geq g_0, i=1, 2, \dots, n, \\ & d_L \leq d \leq d_U, \\ & X_L^N \leq X^N \leq X_U^N. \end{aligned} \quad (30)$$

向可行域内部迭代, 最终收敛于EBDO设计点, 其主要步骤如下:

Step1, 针对实际工程问题, 构建EBDO数学模型;

Step2, 求解EBDO问题对应的确定性设计问题, 式(29), 并将其最优点作为EBDO分析的初始点;

Step3, 调用SQP算法求解式(12), 其中采用3.1节的方法计算似真度, 采用3.2节的方法计算似真度的近似梯度 $\nabla \text{PI}_i(Y)$ 和近似二阶梯度 $\nabla^2 \text{PI}_i(Y)$, 图7给出了该优化过程的示意图, 最终将获得EBDO问题的最优解.

4 数值算例和工程应用

4.1 悬臂梁的设计

如图8所示, 悬臂梁^[13]长度 $L=100$ in(为了方便

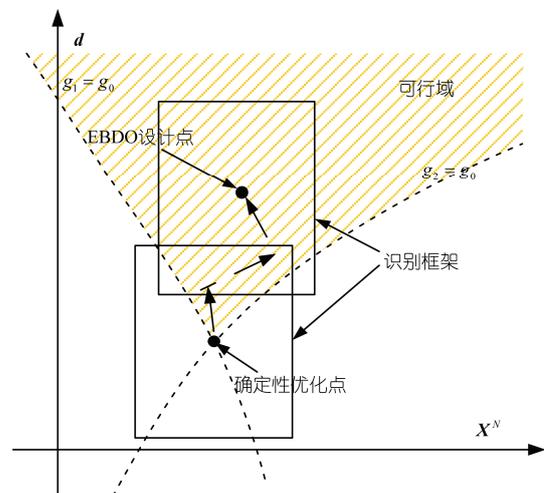


图7 (网络版彩图)AG-EBDO方法求解示意图

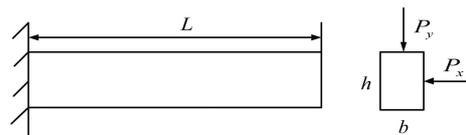


图8 悬臂梁图^[13]

的比较, 本文所用单位为英制单位, 1 in=25.4 mm, 1 b=4.4482 N, 1 psi=6.895 kPa, 下同), 横截面宽度为 b , 高度为 h . 要求悬臂梁在水平和垂直力 P_x 和 P_y 作用下满足规定的强度和刚度要求, 同时其截面积最小, 构建该问题 EBDO 模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & S = f(\mathbf{d}) = b \times h, \\ \text{s.t.} \quad & \text{Pl}(g_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) < 0) \leq f_0^i, i = 1, 2, \\ & g_1(\mathbf{d}, \mathbf{P}) = \sigma_s - \frac{6P_x L}{b^2 h} - \frac{6P_y L}{bh^2}, \\ & g_2(\mathbf{d}, \mathbf{P}) = 2.5 - \frac{4L^3}{Ebh} \sqrt{\left(\frac{P_y}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{P_x}{b^2}\right)^2}, \\ & 0 \leq b \leq 5, \\ & 0 \leq h \leq 5, \end{aligned} \quad (31)$$

其中目标函数仅包含确定性设计向量 $\mathbf{d} = [b, h]$, 约束中包含确定性设计变量 \mathbf{d} 和不确定参数 $\mathbf{P} = [P_x, P_y, \sigma_s, E]$, 第 i 个约束的许用失效概率为 f_0^i , 集中载荷 P_x 和 P_y 、屈服强度 σ_s 及杨氏模量 E 的 BPA 结构如表 1 所示.

表 1 悬臂梁不确定性参数的 BPA 结构^[13]

$P_x(\text{lb})$		$\sigma_s(\times 10^3 \text{ psi})$	
焦元	BPA	焦元	BPA
[200 300]	2.2%	[35 37]	6.1%
[300 400]	13.6%	[37 38]	9.2%
[400 450]	15%	[38 39]	15%
[450 500]	19.2%	[39 40]	19.2%
[500 550]	19.2%	[40 41]	19.2%
[550 600]	15%	[41 42]	15%
[600 700]	13.6%	[42 43]	9.2%
[700 800]	2.2%	[43 45]	6.1%
$P_y(\text{lb})$		$E(\times 10^6 \text{ psi})$	
焦元	BPA	焦元	BPA
[700 800]	2.2%	[26.5 27.5]	10%
[800 900]	13.6%	[27.5 28.5]	21%
[900 1000]	34.1%	[28.5 29]	13.5%
[1000 1100]	34.1%	[29 29.5]	13.5%
[1100 1200]	13.6%	[29.5 30.5]	21%
[1200 1300]	2.4%	[30.5 31.3]	21%

表 2 悬臂梁优化结果

	计算方法	EBDO			确定设计
		$f_0=0.2$	$f_0=0.1$	$f_0=0.0013$	
目标函数 S	EA-EBDO	8.5751	8.8832	9.958	7.6679
	DIRECT	8.6448	10.217	10.556	
	AG-EBDO	8.5785	8.861	9.9604	

为显示 AG-EBDO 方法的优化效果, 本文给出了文献[21]介绍的 EA-EBDO 方法和文献[13]介绍的 DIRECT 方法作为对比, 其中 EA-EBDO 方法基于多目标遗传算法(NSGA-II)和真实极限状态方程进行优化, 因此其结果较为准确, 可作为参考解, DIRECT 方法能够快速搜索到最优点的邻近区域, 并构建该区域的局部代理模型, 因而其计算效率较高, 但其整个优化过程中未基于真实约束计算其失效的似真度, 导致其计算结果可能存在较大误差. 表 2 列出了本文提出方法和上述两种方法以及确定性设计的优化结果, 可以发现: 首先, 不确定设计结果相对确定性设计结果偏安全, 对于工程问题而言意味着安全系数更高; 其次, DIRECT 结果相对 EA-EBDO 方法存在一定误差, 而本文提出的 AG-EBDO 优化结果与 EA-EBDO 相当.

表 3 为许用失效概率为 $f_0=0.0013$ 时, 上述 3 种 EBDO 方法的优化结果及其计算量对比, 可以发现: 首先, AG-EBDO 和 EA-EBDO 的优化解具有较优目标值, 且其主动约束亦接近许用失效概率 f_0 , 表明设计点已逼近不确定性约束的边界, 而 DIRECT 优化点处目标函数值较大, 其主动约束值离许用值亦较远, 表明该设计点仍有进一步优化的空间; 其次, 若从优化过程中似真度的分析次数来衡量各方法的计算效率, 本文方法计算效率远高于 EA-EBDO 算法, 但较 DIRECT 算法略低; 最后, 综合考虑优化目标和计算效率, 本文方法具有较高的计算效率的同时获得了较好的优化效果, 其综合优化性能在 3 种方法中最好.

4.2 薄壁压力容器的设计

如图 9 所示, 薄壁压力容器^[13]的两端为半球形, 内球半径为 R , 壁厚为 δ , 中间部分的长度为 L . 要求在内压为 p 时材料不超出其屈服极限 σ_s 且满足几何约束, 求取体积的最大值, 则 EBDO 模型如下:

表3 $f_0=0.0013$ 时优化结果比较

优化结果	EA-EBDO	DIRECT	AG-EBDO
$b(\text{in})$	2.4142	2.5298	2.4769
$h(\text{in})$	4.1246	4.1726	4.0213
$\text{Pl}(g_1)$	0.0013	3.20E-05	0.0013
$\text{Pl}(g_2)$	0	0	0
$\text{Pl}(g_1)$ 分析次数	4500	86	168
$\text{Pl}(g_2)$ 分析次数	4500	86	168
目标函数 S	9.958	10.556	9.9604

$$\begin{aligned} \max_{R^N, L^N, \delta^N} V &= V(\mathbf{X}^N) = \frac{4}{3}\pi(R^N)^3 + \pi(R^N)^2 L^N, \\ \text{s.t.} \quad \text{Pl}(g_i(\mathbf{X}, \mathbf{P}) < 0) &\leq f_0^i, i = 1, 2, \dots, 5, \\ g_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= 1.0 - \frac{p(R + 0.5\delta)S_F}{2\delta\sigma_s}, \\ g_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= 1.0 - \frac{p(2R^2 + 2R\delta + \delta^2)S_F}{2(2R\delta + \delta^2)\sigma_s}, \\ g_3(\mathbf{X}) &= 1.0 - \frac{L + 2R + 2\delta}{60}, \\ g_4(\mathbf{X}) &= 1.0 - \frac{R + \delta}{12}, \\ g_5(\mathbf{X}) &= 1.0 - \frac{5\delta}{R}, \\ 0.25 &\leq \delta^N \leq 2.0, \\ 6.0 &\leq R^N \leq 24, \\ 10 &\leq L^N \leq 48, \end{aligned} \quad (32)$$

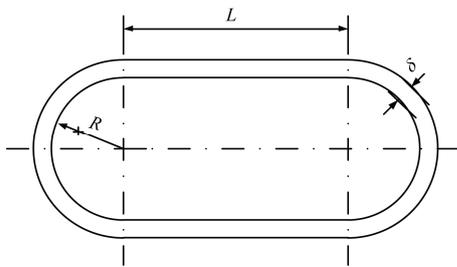


图9 薄壁内压容器结构简图^[13]

表4 不确定变量的BPA结构^[13]

R (in)	L (in)	δ (in)	P (klb)	σ_s (lbs/in ²)	BPA
$[R^N-6.0, R^N-4.5]$	$[L^N-12, L^N-9]$	$[\delta^N-0.4, \delta^N-0.3]$	$[800, 850]$	$[208000, 221000]$	0.13%
$[R^N-4.5, R^N-3.0]$	$[L^N-9, L^N-6]$	$[\delta^N-0.3, \delta^N-0.2]$	$[850, 900]$	$[221000, 234000]$	0.25%
$[R^N-3.0, R^N]$	$[L^N-6, L^N]$	$[\delta^N-0.2, \delta^N]$	$[900, 1000]$	$[234000, 260000]$	47.72%
$[R^N, R^N+3.0]$	$[L^N, L^N+6]$	$[\delta^N, \delta^N+0.2]$	$[1000, 1100]$	$[260000, 286000]$	47.72%
$[R^N+3.0, R^N+4.5]$	$[L^N+6, L^N+9]$	$[\delta^N+0.2, \delta^N+0.3]$	$[1100, 1150]$	$[286000, 299000]$	0.25%
$[R^N+4.5, R^N+6.0]$	$[L^N+9, L^N+12]$	$[\delta^N+0.3, \delta^N+0.4]$	$[1150, 1200]$	$[299000, 312000]$	0.13%

其中目标函数仅包含不确定设计变量的名义值向量 $\mathbf{X}^N = [R^N, L^N, \delta^N]$, 约束中包含不确定设计变量 $\mathbf{X} = (R, L, \delta)$ 以及不确定参数 $\mathbf{P} = [p, \sigma_s]$, 不确定变量的联合BPA如表4所示, 安全系数 $S_F=2$.

表5为 f_0 为 0.015 时优化结果, 可以发现采用本文提出的AG-EBDO方法与EA-EBDO方法计算结果非常接近, 优化结果较理想, 而DIRECT方法优化结果相对上述两方法偏保守, 相对EA-EBDO方法有一定误差. 此外, AG-EBDO方法和EA-EBDO方法设计点处的主动约束似真度接近许用值, 而DIRECT方法的设计点对于约束2来说还有进一步优化的空间, 这也进一步说明AG-EBDO方法与EA-EBDO方法的设计点优于DIRECT方法. 从计算效率的角度, AG-EBDO方法的计算量不足EA-EBDO方法计算量的1/50, 但较DIRECT方法计算效率要低.

4.3 汽车正面碰撞的轻量化设计

汽车碰撞安全性设计是汽车设计中最为重要的环节之一, 其设计的优劣与碰撞中行人、驾驶人员和乘车人员的生命安全密切相关. 本文对如图10所示的汽车结构进行分析和设计, 并综合考虑高速耐撞性和低速耐撞性的影响. 其中高速碰撞需要考虑乘员的安全, 要求最大程度上减少甚至避免乘员的伤害, 该问题中汽车以56 km/h的速度进行正面100%重叠刚性壁障碰撞, 取测量点处合成加速度 a 和发动机上、下标记点的侵入量 I_{up}, I_{down} 作为安全性衡量指标. 对于低速碰撞主要考虑维修方便, 需保证保险杠充分吸能和避免前纵梁较大变形. 如图11所示, 汽车以15 km/h的速度进行RCAR 40%偏置正面碰撞^[36], 选取前纵梁内、外板吸收的总能量值 E 作为前纵梁发生失稳变形的依据.

如图12所示, 选取保险杠厚度(X_1)、吸能盒内(X_2)、外板厚度(X_3)、以及前纵梁内(X_4)、外板厚度

表 5 $f_0=0.015$ 时优化结果比较

优化结果	EA-EBDO	DIRECT	AG-EBDO
$R(\text{in})$	7.127	7.074	7.128
$L(\text{in})$	30.019	29.626	30.010
$\delta(\text{in})$	0.364	0.413	0.367
$PI(g_1)$	0.001301	0.001298	0.001301
$PI(g_2)$	0.014732	0.001318	0.014114
$PI(g_2)$	0.012020	0.012020	0.012020
$PI(g_2)$	0.01250	0.012050	0.012050
$PI(g_2)$	0.012020	0.012020	0.012020
$PI(g_1)$ 分析次数	4500	42	142
$PI(g_2)$ 分析次数	4500	42	142
$PI(g_2)$ 分析次数	4500	42	142
$PI(g_2)$ 分析次数	4500	42	142
$PI(g_2)$ 分析次数	4500	42	142
目标函数 $V(\text{in}^3)$	6.307×10^3	6.137×10^3	6.308×10^3

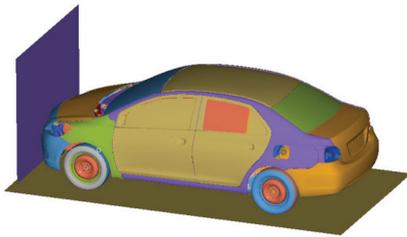


图 10 (网络版彩图)正面 100%重叠刚性壁障高速碰撞^[34]

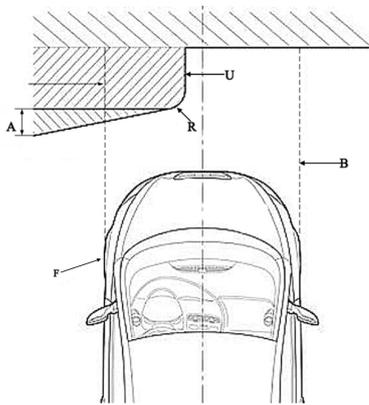


图 11 RCAR 正面碰撞布置形式^[35]

U, 40%偏置度; B, 整车宽度; R, 半径为 150 mm 圆角; A, 10°夹角; F, 试验车辆

表 6 设计变量的 BPA 结构

X_1 (mm)	X_2 (mm)	X_3 (mm)	X_4 (mm)	X_5 (mm)	BPA
$[X_1^N - 0.1, X_1^N - 0.03]$	$[X_2^N - 0.1, X_2^N - 0.03]$	$[X_3^N - 0.1, X_3^N - 0.03]$	$[X_4^N - 0.1, X_4^N - 0.03]$	$[X_5^N - 0.1, X_5^N - 0.03]$	2.28%
$[X_1^N - 0.03, X_1^N]$	$[X_2^N - 0.03, X_2^N]$	$[X_3^N - 0.03, X_3^N]$	$[X_4^N - 0.03, X_4^N]$	$[X_5^N - 0.03, X_5^N]$	44.72%
$[X_1^N, X_1^N + 0.03]$	$[X_2^N, X_2^N + 0.03]$	$[X_3^N, X_3^N + 0.03]$	$[X_4^N, X_4^N + 0.03]$	$[X_5^N, X_5^N + 0.03]$	44.72%
$[X_1^N + 0.03, X_1^N + 0.1]$	$[X_2^N + 0.03, X_2^N + 0.1]$	$[X_3^N + 0.03, X_3^N + 0.1]$	$[X_4^N + 0.03, X_4^N + 0.1]$	$[X_5^N + 0.03, X_5^N + 0.1]$	2.28%

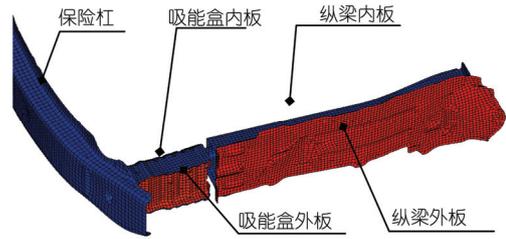


图 12 (网络版彩图)优化模型中的 5 个不确定变量^[34]

(X_5)5 个变量为设计变量^[34], 其 BPA 结构如表 6 所示. 以 5 个部件的总质量 M 最小为设计目标; 约束条件为高速碰撞中测量点处合成加速度 a , 发动机上、下两标记点侵入量 I_{up} , I_{down} , 低速碰撞中前纵梁内、外板吸收总能量 E . 其 EBDO 问题可表述为

$$\begin{aligned}
 & \min M(\mathbf{X}^N), \\
 & \text{s.t. } PI\{a(\mathbf{X}) \geq 40 g\} \leq f_0^1, \\
 & \quad PI\{E(\mathbf{X}) \geq 300 \text{ J}\} \leq f_0^2, \\
 & \quad PI\{I_{up}(\mathbf{X}) \geq 350 \text{ mm}\} \leq f_0^3, \\
 & \quad PI\{I_{down}(\mathbf{X}) \geq 200 \text{ mm}\} \leq f_0^4, \\
 & \quad 2.0 \text{ mm} \leq X_1 \leq 3.0 \text{ mm}, \\
 & \quad 1.0 \text{ mm} \leq X_2, X_3 \leq 2.5 \text{ mm}, \\
 & \quad 1.5 \text{ mm} \leq X_4, X_5 \leq 3.0 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{33}$$

其中许用失效概率均给定 0.015, \mathbf{X}^N 为厚度设计变量名义值. 采用本文提出的 AG-EBDO 方法进行优化设计, 各约束经 165 次可靠性评估后收敛到最优解, 优化后结构的总质量为 9.17 kg, 此时最优设计变量为 $\mathbf{X} = (2.03, 1.00, 2.44, 2.23, 1.50 \text{ mm})$. 在最优设计变量下, 加速度 a , 前纵梁内、外板吸收总能量 E , 发动机上、下两标记点侵入量 I_{up} , I_{down} 的失效似真度分别为 0, 0.012, 0.001, 0, 满足给定的可靠度约束要求.

5 总结

由于证据变量 BPA 的离散特性, EBDO 的计算效

率低, 严重制约了其在工程实际问题中的应用. 本文提出了一种 AG-EBDO 方法, 通过引入基于代理模型的可靠性分析方法, 较好地解决了内层证据可靠性分析的效率问题; 提出了一种证据理论可靠性近似梯度计算方法, 使得基于梯度的高效优化算法可以在 EBDO 问题中有效应用. 数值算例和工程应用表

明本方法较好地平衡了 EBOD 求解过程中的计算效率和计算精度, 具有较好的综合优化性能, 有望应用于一些较为复杂的实际工程结构或产品的设计. 此外, 本方法还可拓展至概率-证据混合可靠性优化设计等问题中, 进一步拓展证据理论在实际工程结构设计中的应用能力.

参考文献

- 1 Gogu C, Qiu Y, Segonds S, et al. Optimization based algorithms for uncertainty propagation through functions with multidimensional output within evidence theory. *J Mech Design*, 2012, 134: 100914
- 2 He L P, Qu F Z. Possibility and evidence theory-based design optimization: An overview. *Kybernetes*, 2008, 37: 1322–1330
- 3 Rackwitz R, Flessler B. Structural reliability under combined random load sequences. *Comput Struct*, 1978, 9: 489–494
- 4 Hasofer A M, Lind N C. Exact and invariant second-moment code format. *J Eng Mech Division*, 1974, 100: 111–121
- 5 Breitung K W. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *J Eng Mech*, 1984, 110: 357–366
- 6 Breitung K W. Asymptotic approximations for probability integrals. Springer, 1994
- 7 Zadeh L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Set Syst*, 1999, 100: 9–34
- 8 Zadeh L. Fuzzy sets. *Inform Control*, 1965, 8: 338–353
- 9 Ben-Haim Y, Elishakoff I. *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1990
- 10 Qiu Z, Yang D, Elishakoff I. Probabilistic interval reliability of structural systems. *Int J Solids Struct*, 2008, 45: 2850–2860
- 11 Kang Z, Luo Y. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models. *Comput Method Appl Mech Eng*, 2009, 198: 3228–3238
- 12 Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press, 1976
- 13 Mourelatos Z, Zhou J. A design optimization method using evidence theory. *J Mech Design*, 2006, 128: 901–908
- 14 Du X. Uncertainty analysis with probability and evidence theories. In: *ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2006. 1025–1038
- 15 Oberkampf W L, Helton J C. Investigation of evidence theory for engineering application. *Non-deterministic Approaches Forum*, AIAA, Denver, Colorado, 2002
- 16 姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法. *力学学报*, 2012, 45: 103–115
- 17 Helton J C, Johnson J D, Oberkampf W L, et al. Sensitivity analysis in conjunction with evidence theory representations of epistemic uncertainty. *Reliab Eng Syst Safe*, 2006, 91: 1414–1434
- 18 Bae H R, Grandhi R V, Canfield R A. An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory. *Reliab Eng Syst Safe*, 2004, 86: 215–225
- 19 Bae H R, Grandhi R V, Canfield R A. Epistemic uncertainty quantification techniques including evidence theory for large-scale structures. *Comput Struct*, 2004, 82: 1101–1112
- 20 Zhang Z, Jiang C, Han X, et al. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory. *Adv Eng Softw*, 2014, 69: 37–45
- 21 Srivastava R K, Deb K. An EA-based approach to design optimization using evidence theory. In: *Proceedings of the 13th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. ACM, 2011. 1139–1146
- 22 Alyanak E, Grandhi R, Bae H R. Gradient projection for reliability-based design optimization using evidence theory. *Eng Optim*, 2008, 40: 923–935
- 23 Salehghaffari S, Rais-Rohani M, Marin E B, et al. Optimization of structures under material parameter uncertainty using evidence theory. *Eng Optim*, 2013, 45: 1027–1041
- 24 Agarwal H, Renaud J E, Preston E L, et al. Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. *Reliab Eng Syst Safe*, 2004, 85: 281–294
- 25 Sentz K, Ferson S. *Combination of evidence in Dempster-Shafer theory*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 2002
- 26 Dong W, Shah H C. Vertex method for computing functions of fuzzy variables. *Fuzzy Sets Syst*, 1987, 24: 65–78

- 27 Bai Y C, Jiang C, Han X, et al. Evidence-theory-based structural static and dynamic response analysis under epistemic uncertainties. *Finite Elem Anal Des*, 2013, 68: 52–62
- 28 Gill P E, Murray W, Wright M H. *Practical Optimization*. London: Academic Press, 1981
- 29 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型. *计算力学学报*, 2001, 18: 56–60
- 30 白影春. 考虑认知不确定性的结构可靠性分析方法研究. 博士学位论文. 长沙: 湖南大学, 2013
- 31 Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Struct Saf*, 1990, 7: 57–66
- 32 Jiang C, Zhang Z, Han X, et al. A novel evidence-theory-based reliability analysis method for structures with epistemic uncertainty. *Comput Struct*, 2013, 129: 1–12
- 33 Zhang Y, Der Kiureghian A. Two improved algorithms for reliability analysis. In: *Reliability and Optimization of Structural Systems*. Springer US, 1995. 297–304
- 34 姜潮, 邓善良. 考虑车辆高速和低速耐撞性的多目标优化设计. *计算力学学报*, 2014, 31: 474–479
- 35 Rcar test protocol angled barrier. Issue 2.1 RCAR, September, 2006

A reliability-based design optimization method for structures using evidence theory

FAN Song^{1,2}, JIANG Chao¹, ZHANG Zhe¹ & LIU Jie¹

¹ State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China;

²Automotive Engineering Institute, Guangzhou Automobile Group Co. Ltd., Guangzhou 511434, China

For optimization design problems with epistemic uncertainty, a novel reliability-based design optimization method for structure using evidence theory is proposed. Firstly, we demonstrate a new approximate gradient for the reliability measures without gathering any excess information, and then the high-efficiency gradient-based optimization algorithm can be used to solve the problem; secondly, the surrogates of constraints are always updated along with the variation of design point, which can efficiently and accurately calculate the reliability measure of the constrains; finally, three engineer design examples show that the proposed method balances the computational efficiency and accuracy of the optimization procedure.

epistemic uncertainty, evidence theory, structural reliability, optimization design, reliability gradient

doi: 10.1360/N092015-00264