

数理邏輯及其應用

万哲先 唐稚松 陸鍾万 楊慈孝

数理邏輯是現代科學與技術的發展中最重要的新興領域之一。它是一門“邊緣”科學。它的研究對象深深地伸入好幾門科學的對象中去，接觸到這些科學的核心問題，對於各門科學的重要問題予以統一的綜合的處理而形成自己獨立的研究方向。

数理邏輯的發展一般可以說是從萊布尼茲開始；萊布尼茲第一個提出這樣的觀念，認為邏輯學應當象幾何和算術一樣，可以借助於符號和算式以使得我們的思維能夠有所遵循地前進，並且邏輯學應當象數學那樣可以通過運算來進行思維。萊布尼茲的這些想法說出了今天已經很清楚的数理邏輯的兩個特點：使用公式的語言和追尋思維的計算特點。但從萊布尼茲起到十九世紀約二百年間，数理邏輯始終沒有能夠發展起來。十九世紀末，二十世紀初，數學為生產實際任務所帶動而有了飛躍的發展，提出了許多帶有根本性的問題。数理邏輯同時也有了較大的發展，形成了證明論這一新的方向。

證明論可以說是數學的邏輯，它的任務實際上是要掌握數學的證明規律、數學的邏輯規律，提供數學研究以新的工具和方法，推進數學的發展。

二十世紀四十年代，生產有了更大的發展，進入了自動化時代。由於計算技術、電子學技術的發展，由於生產，特別是生產自動化的任務，以及國防任務等提出了許多数理邏輯的問題要求解決，這樣，数理邏輯就又開闢了工程邏輯和控制論的新方向。這個方向是研究怎樣用物質的裝置（象機器、電氣裝置等）來完成原來要有人的思維活動（即邏輯活動）參加的過程，以實現生產、運輸等過程的自動化。這需要研究自動化系統的邏輯結構及其活動的邏輯特點。計算機的邏輯設計和程序設計的研究、邏輯機的研究，都屬於這個方向。這是数理邏輯發展中的最富於生命力的方向。

此外，還有數學基礎、歷史、哲學的方向。這一方向的研究是要為保證在馬克思列寧主義思想指導下，發展数理邏輯提供科學的根據。

工程邏輯和控制論的研究方向不但直接為國家生產建設和國防建設服務，而且有着巨大的理論意義。這個方向顯然應當是数理邏輯發展的重點。證明論方向，特別是能行性理論的研究對於数理邏輯本身的發展，對於推進數學的發展，對於邏輯機的研究都有着很大的意義。它也是一個極為重要的方向。下面我們就來具體地說明一下這個方向。

能行性理論

能行性理論屬於證明論的範圍。“能行”，是形容一種過程的。所謂能行的過程，是指每一個這樣的過程都可以按照一定的辦法經有窮的步驟來完成。也就是說，假如我們能夠為某一種過程建立一系列的規則，使得每一個這個過程的每一步都可以按照這一系列的規則來完成，而且其中每一步將根據哪條規則以及將如何完成都是明白確定的，則我們稱這種過程是能行的。這過程所據以進行的那幾條規則稱為一個算法。應用歐幾里德算法求兩自然數的最大公約數，正是實現能行過程的一個有名的例子。

近幾十年來許多數學家以不同方式給“能行”概念作了几種不同的數學定義。其中主要的有：(1) 遞歸函數理論，(2) 圖靈機理論，(3) 正規算法理論。此外，還有(4) λ 演算，(5) 有窮組合過程理論。這些理論的一個共同的特點是，將運算壓到最基本的程度，幾乎只承認以常量代入變量以及以等式的右邊替換其左邊在另一式子中的出現。其中大多數理論都是討論一排符號之間的組合關係（(1)除外）。這樣就使運算過程的每一步都是初等的明確的而且是能機械地進行的。因而它們反映了“能行”概念的數學本質。而且已經證明，所有這些理論都是等價的。這些理論的應用範圍正在日益擴大。例如遞歸函數理論中的概念和方法已滲透到幾乎所有的數學基礎的分支^{*}，它們在工程技術中的應用也正在蓬勃發展之中。

^{*} 莫斯托夫斯基，關於數學基礎的研究現況，1955。

Rozprawy Matematyczne.

証明論是研究数学証明的性質和准則的科学。当我们深入可构造的与不可构造的証明时，递归函数、递归可枚举、正规算法这样一些能行性理論就很自然地成为不可缺少的工具。随着机器数学、証明机等等新方向的发展，可以肯定，能行性理論将在証明論方面起着越来越显著的作用。还值得注意，用能行性理論去研究数学証明也的“試探法”，对于今后开展用计算机作証明的工作也将是一个很有前途的方向。

判定問題是近几年来数理邏輯在解决数学問題中最富成果的分支之一。简单地說，它致力于找寻一組数学問題的算法解(可判定問題)；或者証明一組問題不可能有算法解(不可判定問題)。在这方面的的工作中，能行性理論能得到应用是显而易見的。在这个方面我們感到，除了还可以在許多数学分支中进行判定問題的研究外，更有兴趣的工作是如何把一个可判定的問題編出数字电子计算机上解題的程序。目前世界上这方面的工作也正在很有成效地开展之中。

我們认为，能行性理論在今后的发展中富有生命力的部分还是它在自动控制和电子计算机上的应用。控制过程的算法描述以及时序綫路的最为本質的特点也就在于它們都是实际的能行过程。从而，能行性理論在这些方面得到应用也就是十分自然的事了。

由于历史发展上所带来的缺憾，目前的能行性理論在处理实际問題时也有不方便的一面。因为在理論上要求的能行是所謂潛在的能行，也就是只要求邏輯上是有穷步驟以內可以实现就够了。但在考虑实际的能行过程时，就不免有許多实际的限制，如時間的限制，进行运算的方式的限制，存儲量的限制等等。这样，就很自然地要求我們在发展能行性理論的时候，能对这些理論进行适当的改造，使之符合实际的要求。这一种要求，正是今后发展能行性理論一个重要的方向。

从应用的角度来看，几种能行性理論虽然在邏輯上都是等价的，但在应用时各有其不同的优缺点。例如递归函数的理論，它突出“代入”和“替換”两种运算，这是最本質地反映了“計算”的概念。同时这理論可以应用許多传统数学中的工具，变化灵活，而且可以将一很长的运算过程用一很精炼的式子表达出来。但是它却只能处理自然数函数，一般非数值符号的公式的运算則必須在編碼以后才能进行。但一經編碼，数值往往很大，运算也很繁，不再符合实际的要求。而且这样的表达式也往往不能很显然地把一步一步能行运算的过程标示出来。正规算法論却可以避免这些缺点，同时它的概念也十分明白簡單，表示“能行”的

特点最为明显。但是，在应用它解題时却又有时显得有些累贅，有时不是那么直接和灵活。由此，我們自然会想到，是否可以建立另一套与它們等价的理論，在性能上兼有二者之所长？这一个理論建立成功，就正标明着能行性理論向着更好地反映实际方面跨进了一大步，这正是我們目前很需要努力从事的。

控制过程的算法描述及程序理論

大家知道，在极不相同的科学領域中，所研究的对象的活动都經歷着控制过程。机器运轉的自动調节、工艺过程的自动控制、計算的自动化、神經系统的作用，乃至人类社会的集体的控制，虽各有其互不相同的具体内容，然而却有着本質的、共同的特点。它們的特点之一就是加工信息。

要研究控制过程，首先就要找出該过程的算法描述。

如果說以往还可以仅凭經驗构造簡單的控制(加工信息)的装置(如瓦特調节器)的話，那么随着生产和科学活动的日益复杂，对加工信息的过程的精确描述就成为实现自动控制所必不可少的前提了。

到底什么样的过程可以由給定的机器加以算法描述？这个問題翻譯成数理邏輯的語言就是：到底什么样的問題有算法解？

实践表明，解决同一个問題可以有不同的算法描述，那么如何估价这些算法在实用上及理論上的优劣？这就是算法的估值、算法的等价問題及算法的化簡問題。这方面的研究是属于能行性理論中关于算法的理論的。这些研究可以說还只是开始，今后大有发展的前途。

程序控制快速通用计算机的出現，由于它能进行复杂的信息加工，大为促进了数理邏輯在这方面的的工作。已有的通用计算机不仅可以自动計算各种复杂的問題，甚至可以用以模拟生物有机体的某些过程。为描述加工信息的过程，已經有了一种專門的数学工具，即算法的邏輯图式。从描述控制过程的算法邏輯图式到編成通用计算机所能使用的程序是一个十分耗費劳动量却可以机械地执行的过程。可以看出，算法的研究也是关于通用计算机程序理論的研究。这方面的成果与程序自动化的工作是紧密相关的。

邏輯 网 絡

自动化的各个方面，例如自动电话、铁路的信号操纵、集中和閉塞、遙控装置以及計算过程自动化(电子计算机)等，主要是以各种继电器綫路(继电器

接点线路及无接点系统，如电子管线路、半导体线路)为基础的。因此分析继电器线路的功能，并根据所要求的功能设计出实现这种功能的继电器线路，特别是最简单的继电器线路，是很重要的问题。当继电器线路只用以完成不太复杂的任务时，这些线路自身也比较简单，线路中的继电器数量也不太多，解决这些问题并没有什么特别困难，在这方面已经积累了不少的經驗。但是随着自动化的发展，自动化装备所要完成的工作越加复杂了，其中使用的继电器线路也随之复杂化了，常常包含数百个或数千个继电器，设计和分析这种复杂的继电器线路也随之困难了。这就迫切要找到或建立一种数学工具以求能减轻继电器线路设计及其功能的分析。1938年苏联学者夏斯达哥夫，美国学者桑农和日本学者中岛独立地发表了他们运用在数理逻辑的发展中所孕育的布尔代数到继电器接点线路的分析和综合的研究。他们指出，可以把继电器接点线路用布尔代数中的代数表达式表出，并使该表达式能单值对应于它所描述的线路的结构。这样就有可能用化简和分析代数表达式的方法来代替对继电器接点线路的化简和分析，并有可能根据已给的线路工作条件通过建立相应的代数表达式的方法去设计继电器线路。这样他们就把继电器线路的分析的工作数学化了，从而大大减轻了分析和综合继电器线路工作的劳动。但是如何设计实现给定功能的最简继电器线路，这一问题并没有彻底解决，仍有待作进一步的探讨。

本来，布尔代数只用于继电器接点线路，后来由于电子计算机的出现，它也应用于电子管线路。电子计算机的出现还提出了如何用适当的数学工具去描述、分析和综合带延迟元件的电子管线路的问题。对于这类线路，仅仅布尔代数是不足以描述的，因为这类线路的接点和线的状态随着时间而变动。但为了简单起见，通常约定，接点状态只取二值，0或1，表示低电位或高电位，无脉冲或有脉冲。更约定时间是离散的，时间 t 仅依序取0, 1, 2, ……诸值，即接点和线的状态，随 t 依序取值0, 1, 2, ……而改变。这样做虽不是精确的，但却是近似地反映了我们所感兴趣的电子计算机线路的接点和线的状态。

由于电子计算机的出现，人们还有了可能运用电子计算机于生产控制过程，从而又产生了一门崭新的学问，这就是控制论。随之人们又在数理逻辑的理论基础上对自动机进行了探讨。

但是应该指出，无论带延迟元件的逻辑网络的研究或自动机的研究，都还是比较初步的。满足计算机或

自动机的逻辑设计要求的带延迟元件的线路理论以及自动机的一般理论，仍有待进一步探讨。

最后，我们愿意提到，这个新兴的科学分支已经受到了不少国家学者的注意，特别是苏联和美国学者的注意。苏联数学评论中还专辟一栏介绍这一分支的文献，从事这方面研究的学者也不在少数。我们也应该急起直追，配合我国电子计算机及自动化事业的进展开展这方面的研究工作。

参 考 文 献*

- [1] 涅斯米扬诺夫, 苏联科学四十年, 1957, 12, 9人民日报。
- [2] 涅斯米扬诺夫, 苏联科学工作的主要方向, 科学通报, 1957年第9期。
- [3] 胡世华, 数理逻辑的基本特征与科学意义, 哲学研究, 1957年第1期。
- [4] Skolem Th: Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise skifter utgit av Videnskapsselskapet i Kriterion, I, 6 (1923), 1—38.
- [5] Gödel K.: Über formal unentscheidbare Sätze de P. M. und verwandter Systeme I. Monatsh. für Math. u. Phys., 38 (1931), 173—198.
- [6] Gödel K.: On undecidable propositions of formal mathematical systems, Princeton (1934).
- [7] Kleene S. C.: General recursive function of natural numbers, Math. Ann., 112 (1936), 727—742.
- [8] Kleene S. C.: A note on recursive functions, Bull. of the Amer. Math. Soc., 42 (1936), 544—546.
- [9] Turing A. M.: On Computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem, Proc. Lond. Math. Soc. ser 2, Vol. 42 (1936—37), 230—265. A correction, 同上, Vol. 43 (1937), 544—546.
- [10] Марков. А. А.: Теория алгоритмов труды мате. инст., В. А. Стеклова, 1951, т. 38, 176—189.
- [11] Марков А. А.: Теория алгоритмов, 同上, т. 42.
- [12] Church A.: An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. (1936), 58, 345—363.
- [13] Post E. L.: Finite combinatory process—formulation I. Journal of sym. log. 1 (1936), 103—105.
- [14] Kleene S. C.: λ -definability and Recursiveness Duke Math. J. (1936), Vol. 2, 340—353.
- [15] Turing A. M.: Computability and λ -definability, J. Symb. Logic (1937), Vol. 2, 153—163.
- [16] Дегловс В. К.: Нормальные алгоритмы и рекурсивные функции, ДАН СССР (1953), т. 90, № 3, стр 249—252.
- [17] Дегловс В. К.: Эквивалентность нормальных алгоритмов и рекурсивных функций. Труды

* 这里所引的参考文献远不是完备的。不过，我们觉得，它包括了每一有关方向的最重要的文献，希望它对于初学的同志能有所助益。

- математ. инст. В. А. Стеклова (1958), т. LII, 75—139.
- [18] 王浩: Toward Mechanical Mathematics (to appear).
- [19] Gelernter H. L. and R. Rochester: Intelligence Behavior in Problem—Solving Machines IBM Journal of Research and Development, Vol. 2, No. 4(1958).
- [20] Новиков П. С.: Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, Труды матем. инст. В. А. Стеклова(1955), т. XLIV.
- [21] Szmielew W.: Elementary Properties of Abelian groups, Fundamenta mathematicae, Vol. 61 (1955) 203—271.
- [22] 李雅普诺夫 А. А. 和 塞斯特巴耳 Р. А.: 控制过程的算法描述, 数学通报 (1959), 第三期.
- [23] Newell A.: The Chess Machine: An Example of Dealing with a Complex Task by Adaptation, Proceeding of the 1955 Western Joint Computer Conference.
- [24] Янов Ю. И.: О логических схемах алгоритмов, Проблемы кибернетики, 1 (1958), 75—127.
- [25] Ершов А. П.: Об операторных алгоритмах ДАН СССР. 1958, том. 122, № 6, стр. 967—970.
- [26] Шрейдер Ю. А.: Программирование и рекурсивные функции. Вопросы теории матем. машин, 1 (1958), 110—126.
- [27] 斯梅格列夫斯基 Ю. Д.: 程序设计基础.
- [28] 卡尔马院士在我国讲学的讲义(尚未出版).
- [29] Шестаков В. И.: Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класс А. Диссертация на степень кандидата математических наук (1938).
- [30] Shannon C.: A Symbolic Analysis of Relay & Switching Circuits, Trans. A.I.E.E. (1938), 713—722.
- [31] Nakashima, A.: 发表在 Nippon Electrical Communication Engineering (1938) 上的一系列文献.
- [32] Гаврилов М. А.: Теория релейно-контактных схем, Издательство АН СССР, М.-Л. (1950).
- [33] Гаврилов М. А.: Современное состояние теории релейных схем, В сборник телемеханизация в народном хозяйстве, Издательство АН СССР, 99—133.
- [34] Burks A. W. and Wright J. B.: Theory of Logical Nets, Proc. I.R.E. (1953), 1357—1365.
- [35] Burks A. W. and Wang H.: The Logic of Automata, Journal for Association of Computing Machinery (1957), 193—218, 279—297.

应该大力发展运筹学

孙克定 朱永津 李修睦

(中国科学院数学研究所)

(华中师范学院数学系)

运筹学是什么?在目前还不可能给出它的定义。它是许多新学科和许多新问题的研究的一个统称,它还很幼稚,它正在成长壮大中。因此对运筹学的最好的说明,是扼要地给出它所包含的一些主要内容。

运筹学所包含的内容,大体说起来,有以下几个方面:

1. 规划论:

在实际问题里,假使一切情况是给定的,而要在这种情况下,设法做出恰当安排,使所产生的效果最优(定量的);一般地讲,从事这种研究的便是规划论。

用数学的语言来说,设 $x_1, \dots, x_n$ 是从问题中挑选出来的变量(这些变量也可能是随机的),现在要求 $x_1, \dots, x_n$ 满足一些约束条件 $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$,而使目标函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 得到极大或极小。

若 φ_i 和 f 都是线性的,这便是大家所熟知的线性规划,若 f 是非线性的,便是所谓非线性规划。

目前正在发展中的还有所谓动态规划,它也是规划的一种。它着眼于问题的过程,而在过程中,时间起重要作用。在应用这门学科去解决实际问题时,往往把静态的过程表现为动态的过程,使时间概念起到作用。

假如有数量是 x 的物资,将其分成二部份, y 与 $x-y$, 从 y 可获得收益 $g(y)$, 从 $x-y$ 获得收益 $h(x-y)$, 但每经过这样一种活动过程之后,物资总有耗损,故在下一过程开始时,物资总的数量将为 $ax + b(x-y)$ ($0 < a, b < 1$), 把它分成两部分,求得收益,继续做到第 N 回,问应如何安排,使总的收益达到极大。这个问题,可以按照静态的方法去求解,但每分一次,求一次收益,便是一个过程,按动态的方法去做,是比较合式的。

2. 排队论:

简单地讲,设有若干个服务台,很多顾客到服务