

拓扑声子空间中的引力扰动效应*

李 芳 昱

(重庆大学物理系, 重庆 630044)

罗 俊

唐 孟 希

(华中理工大学引力实验中心, 武汉 430074) (中山大学物理系, 广州 510275)

摘 要

本文计算了引力波在具有螺旋位错的晶格空间中对声子的作用效应, 并给出了相应的声子解. 这种引力波对声子的作用表现为一个以螺旋位错为背景的拓扑声子空间中的引力扰动, 这是引力波场对声子的一种新型作用形式.

关键词 引力波、螺旋位错、拓扑声子空间

1988 年, Bird 等报道了一项有趣的实验结果^[1], 即当两束电子流从螺旋位错的两个不同的面通过时, 将产生干涉图象, 其特征取决于螺旋位错的 Burgers 矢量. 事实上, 这是第一个证实电子和位错间相互作用拓扑机制存在的实验. 其后, Serebryany 对此作了理论上的分析, 并在此基础上详细讨论了声子和螺旋位错以及 disclination 间拓扑相互作用的理论机制^[2,3]. 按照 Serebryany 晶格空间坐标系的计算, 结果表明当有螺旋位错和 disclination 这类缺陷存在时, 这时的晶格空间实际上是一个同时具有挠率和曲率的空间, 这种有挠有曲晶格空间几何参量的拓扑性质又直接影响到声子模式的具体形式. 因而在文献 [2,3] 中又将这一空间称之为拓扑声子空间.

从物理空间的观点来看, 象位错、disclination 这类缺陷的出现, 实际上是晶体均匀性的局部破坏, 因而也是描述晶体弹性特征的弹性模量均匀性的局部破坏. 但从引力波和弹性介质相互作用的观点来看, 按照广义相对论和经典弹性理论, 在一个完全均匀和各向同性介质内部, 引力波与介质的耦合为零^[4,5], 即引力波只在切变模量的非均匀处或突变区域 (如界面等) 发生耦合, 这也是通常弹性体对引力波能量吸收截面极其微小的原因之一. 当有螺旋位错和 disclination 存在而无引力波作用时, 虽然晶格空间是有挠有曲的, 但物理空间仍然是平直的. Serebryany 的声子解正是反映了以这种空间为背景的声子模式^[3]. 如果螺旋位错和 disclination 不存在且介质是均匀的, 但有引力波的作用, 这时的晶格空间是无挠无曲的平直空间, 而物理时空则是有曲无挠的黎曼时空, 这时的声子模式可按 Dyson 方程处理通常声学振荡模式的方法进行讨论^[6]. 而如果在上述条件下介质是轴向非均匀的 (但无扭曲变形), 这

1992-07-29 收稿, 1993-04-24 收修稿稿.

* 国家自然科学基金部分资助项目.

时的晶格空间仍为平直空间,但由于弹性模量的轴向非均匀性将导致介质内部由引力波产生的非零激发力的存在,因而将产生对原有声子模式的扰动。我们曾利用 Serebryany 的复算符方法计算得到了几种典型轴向非均匀分布的介质在引力波作用下的声子模式¹⁾。本文在以上工作基础上,则进一步讨论具有螺旋位错但无 disclination 的晶格空间在引力波作用下的声子模式。这时螺旋位错所分布的晶格空间是有挠无曲的而物理时空则是有曲无挠的。计算表明,特别对于那些扭曲很大的螺旋位错,引力波和介质的耦合强度将会明显加大,这种效应有可能使引力波和介质的耦合强度发生量级上的变化。

1 声子方程

根据经典弹性理论,若直螺旋位错线重合于 z 轴,则其邻近的静态应变为^[2]

$$u(x) = (u^r, u^\varphi) = \left(\frac{b\varphi}{2\pi}, 0, 0 \right), \quad (1)$$

这里 b 是位错的 Burgers 矢量。这时用晶格空间坐标系所表示的空间间隔为^[3]

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (dz + L d\varphi)^2 \\ &= \left(1 + \frac{L^2 \varphi^2}{r^4} \right) dx^2 - \frac{2L^2 xy}{r^4} dx dy + \left(1 + \frac{L^2 x^2}{r^4} \right) dy^2 \\ &\quad - \frac{2Ly}{r^2} dx dz + \frac{2Lx}{r^2} dy dz + dz^2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $L = \frac{b}{2\pi}$ 。(2)式所对应的 Descartes 坐标系中的度规张量为

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \frac{L^2 y^2}{r^4}, \quad g_{22} = 1 + \frac{L^2 x^2}{r^4}, \quad g_{33} = 1, \\ g_{12} &= g_{21} = -\frac{L^2 xy}{r^4}, \quad g_{13} = g_{31} = -\frac{Ly}{r^2}, \\ g_{23} &= g_{32} = \frac{Lx}{r^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

L 显然反映了螺旋位错存在而产生的扭曲效应(挠率的存在)。若 $L = 0$, 则回复到平直空间。

为方便地反映出晶格空间的挠率性质,以及得到和求解声子方程,我们沿用 Serebryany 复坐标系中的复算符方法^[3]。该复坐标系中的复基矢定义为

$$e_{\pm} = e_r \pm i e_\varphi. \quad (4)$$

e_r, e_φ 为柱坐标系的基矢。故声子场 $u(x, t)$ 一般可表示为

$$u(x, t) = e_z u^z + e_+ u^+ + e_- u^- = e_z u^z + e_r u^r + e_\varphi u^\varphi. \quad (5)$$

由(4),(5)两式可得

$$u^r = u^+ + u^-, \quad u^\varphi = -i(u^+ - u^-), \quad (6)$$

$$u^+ = \frac{1}{2}(u^r - i u^\varphi), \quad u^- = \frac{1}{2}(u^r + i u^\varphi), \quad (7)$$

1) Li Fang yu. et al., Journal of MSU, in Russian, to be published (莫斯科大学学报).

$$\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{e}_- = 0, \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_- = \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{e}_+ = 2. \quad (8)$$

以上所对应的复微分算符为

$$\nabla = \mathbf{e}_z \partial_z + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_+ \partial_- + \mathbf{e}_- \partial_+), \quad (9)$$

其中

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi} - L \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{对标量的作用}), \quad (10)$$

$$\partial_- \mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{H}{r} \mathbf{e}_{\pm}, \quad \partial_+ \mathbf{e}_{\pm} = \pm \frac{H}{r} \mathbf{e}_{\pm} \quad (\text{对基矢的作用}). \quad (11)$$

L 和 H 分别代表螺旋位错和 disclination 的贡献. 若无位错, 则 $L = 0$ (即挠率为零); 若无 disclination, 则 $H = 1$ (即曲率为零); 对于既无位错又无 disclination 的情况, 显然应有 $L = 0, H = 1$. 容易证明在此情况下 (9) 式便退耦为普通微分算符. 对于本文只有螺旋位错而无 disclination 的情况, 应有 $H = 1$, 但 $L \neq 0$, 即位错所分布的晶格空间为有挠无曲的.

对于有挠无曲的晶格空间, 在引力波场中声子体系的作用量为

$$S = \int d^3x dt \sqrt{g} \{ \mathcal{L}_{\text{pho}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \}, \quad (12)$$

其中

$$\mathcal{L}_{\text{pho}} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}^i - \frac{\lambda}{2} (\nabla_i \dot{u}^i)^2 - \frac{\mu}{2} [(\nabla_m u^k)(\nabla^m u_k) + (\nabla_k u^j)(\Delta_j u^k)], \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mu h_i^j \nabla_i u^j \quad (14)$$

分别为声子的拉氏密度以及引力波和声子相互作用的拉氏密度, h_i^j 为引力波场, 算符 ∇_i 等正是由 (9) 式所表示的微分算符, 它反映了晶格空间扭曲效应对拉氏密度的贡献^[2]. λ 和 μ 分别为介质的径向模量和切变模量, 且有 $\lambda = \rho(V_L^2 - 2V_T^2)$, $\mu = \rho V_T^2$, ρ 为质量密度, V_T 和 V_L 分别为局域横声速和局域纵声速. 对 (12) 式所示的作用量作变分, 得声子方程为

$$\ddot{u}^j = V_T^2 [\nabla_l (\nabla^l u^j) + \nabla_l (\nabla^j u^l)] + (V_L^2 - 2V_T^2) \nabla^l (\nabla_l u^j) - f^j, \quad (15)$$

其中

$$f^j = \frac{1}{\rho} g^{kl} \nabla_l (\mu h_k^j) \quad (16)$$

为引力波产生的等效激发力.

直接求解方程 (15) 是比较困难的, 原因它是以晶格空间的复坐标系以及相应的复算符表述的, 而弱场条件下的平面引力波一般是用 Descartes 坐标系表述的. 若直接求解, 其中引力波场 h_k^j 及相应算符也需是复坐标系中的相应分量, 这对于计算和求解是很不方便的. 但是由于 (6), (7) 两式提供了晶格空间中的矢量从复坐标系到柱坐标系以及相反过程的变换, 因而只要知道激发力 f^j 在晶格空间柱坐标系中的分量, 通过 (7) 式则可将其变换到复坐标系中去. 为此, 利用 (5), (8), (9)–(11) 式以及有挠无曲条件 $L \neq 0, H = 1$, 方程 (15) 在复坐标系中的矢量形式可写成

$$\ddot{\mathbf{u}} = V_T^2 [\bar{\nabla} \nabla \mathbf{u} + \overline{\nabla \nabla} \mathbf{u}] + (V_L^2 - 2V_T^2) \nabla \bar{\nabla} \mathbf{u} - \mathbf{f}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{e}_z \left\{ V_T^2 \left[\frac{1}{2} \left(\partial_+ + \frac{1}{r} \right) \partial_- + \frac{1}{2} \left(\partial_- + \frac{1}{r} \right) \partial_+ + \partial_z \partial_z \right] u^z - f^z \right\} \\
& + \mathbf{e}_+ \left\{ V_T^2 \left[\left(\partial_+ + \frac{2}{r} \right) \left(\partial_- - \frac{1}{r} \right) + \partial_z \partial_z \right] u^+ - f^+ \right\} \\
& + \mathbf{e}_- \left\{ V_T^2 \left[\left(\partial_- + \frac{2}{r} \right) \left(\partial_+ - \frac{1}{r} \right) + \partial_z \partial_z \right] u^- - f^- \right\} \\
& - (V_L^2 - V_T^2) \nabla \nabla u,
\end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\nabla u = \left(\partial_- + \frac{1}{r} \right) u^- + \left(\partial_+ + \frac{1}{r} \right) u^+ + \partial_z u^z. \quad (18)$$

∇u 为 $\nabla_i(\nabla^i u^i)$ 的矢量形式, $\nabla \nabla u$ 为 $\nabla_i(\nabla^i u^i)$ 的矢量形式, $\nabla \nabla u$ 为 $\nabla^i(\nabla_i u^i)$ 的矢量形式, f^z, f^+, f^- 是形式上写出的激发力在复坐标系中的各分量. 将(4),(10)两式代入(9)式(考虑到 $H=1, L \approx 0$), 则可得复微分算符在 Descartes 坐标系中的等效形式为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \left(\partial_x + \frac{L \sin \varphi}{r} \partial_z \right) + \mathbf{e}_y \left(\partial_y - \frac{L \cos \varphi}{r} \partial_z \right) + \mathbf{e}_z \partial_z. \quad (19)$$

由于(14)式所示的引力波和声子相互作用的拉氏密度为三维标量, 故也可将其表示为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mu \hat{h}_i^i \nabla_i \hat{u}^i, \quad (20)$$

其中 $\hat{h}_i^i$ 和 $\hat{u}^i$ 分别为引力波场和声子场在 Descartes 坐标系中的相应分量. 用类同的方法, 对(20)式所示的拉氏密度对应的作用量作变分. 可得激发力在晶格空间的 Descartes 坐标系中的分量形式为

$$\hat{f}^i = \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j (\mu \hat{h}_i^i). \quad (21)$$

故由(7),(21)两式, 可得激发力在复坐标系中的分量为

$$\begin{aligned}
f^z &= \hat{f}^z = \frac{\mu}{\rho} g^{jk} \nabla_j \hat{h}_k^i, \\
f^+ &= \frac{1}{2} (f^r - i f^\varphi) = \frac{1}{2} [\hat{f}^z \cos \varphi + \hat{f}^y \sin \varphi - i(-\hat{f}^z \sin \varphi + \hat{f}^y \cos \varphi)], \\
f^- &= \frac{1}{2} (f^r + i f^\varphi) = \frac{1}{2} [\hat{f}^z \cos \varphi + \hat{f}^y \sin \varphi + i(-\hat{f}^z \sin \varphi + \hat{f}^y \cos \varphi)].
\end{aligned} \quad (22)$$

需要指出的是 $\nabla_i \hat{h}_k^i$ 一般并不为零, 只是在晶格空间无挠无曲的情况下, 它才退耦为普通微分形式 $\partial_i \hat{h}_k^i = 0$, 这正是引力波 TT(Transverse Traceless) 规范中的横向条件. 它表明由引力波产生的激发力中, 除了含有满足 TT 规范的零级效应外, 还包含得有由于晶格空间扭曲而带来的非零效应, 这是与无挠无曲晶格空间的一个重要区别.

2 引力波作用下的声子模式

2.1 沿平行于螺旋位错线 z 方向传播的引力波的作用效应

由引力波的 TT 规范, 其非零分量为

$$\hat{h}_1^1 = -\hat{h}_2^2, \quad \hat{h}_3^3 = \hat{h}_4^4, \quad \hat{h}_k^i = a_k^i \exp(ik^\mu x_\mu) = a_k^i \exp[i(kz - \omega t)], \quad (23)$$

其中 k 和 ω 分别为引力波矢和频率. 由(22), (23)式算得

$$\begin{aligned} f^z &= -\frac{k^2 L^2 V_T^2}{r^2} (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \\ f^+ &= \frac{1}{2} \frac{kL V_T^2}{r} \left[(\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) + (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right], \\ f^- &= -\frac{1}{2} \frac{kL V_T^2}{r} \left[(\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) - (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

由于我们感兴趣的主要是由引力波产生的纯扰动解, 为突出物理图象和简化运算, 这里只讨论引力波对同频声子模式的扰动(若原有声子模为零, 则其解本身就直接为纯扰动解). 对于不同频率情况, 按本文方法完全可作类推. 将(24)式代入方程(17), 并利用有挠无曲条件($L \approx 0$, $H = 1$). 我们对方程(17)求得如下声子解:

当 $n - \beta \approx$ 整数或 $n - \beta - 1$ 和 $n - \beta + 1$ 为偶数时

$$\begin{aligned} u^a(\mathbf{x}, t) &= [A_1 J_{n-\beta}(pr) + B_1 N_{n-\beta}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-\beta)\right] \cdot \Gamma\left[\frac{1}{2}(\beta-n)\right] kL^2 (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) (pr)^{2m}}{2^{2m+2} \cdot \Gamma\left[m + \frac{1}{2}(n-\beta) + 1\right] \cdot \Gamma\left[m - \frac{1}{2}(n-\beta) + 1\right]} \\ &\cdot \exp\left[i\left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t\right)\right]. \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^+(x, t) &= [A_2 J_{n-\beta-1}(pr) + B_2 N_{n-\beta-1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^m kL (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) \cdot (pr)^{2m+1} \\ &\cdot \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)]\} / \left\{ 2^{2m+1} p \cos\left[\frac{1}{2}(n-\beta-1)\pi\right] \right. \\ &\cdot \Gamma\left[m + \frac{1}{2}(n-\beta-1) + \frac{3}{2}\right] \cdot \Gamma\left[m - \frac{1}{2}(n-\beta-1) + \frac{3}{2}\right] \} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m kL (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) (pr)^{2m+1} \right. \\ &\cdot \exp\left[i\left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t\right)\right] \} / \left\{ 2^{2m+1} p \cos\left(\frac{1}{2}(n-\beta-1)\pi\right) \right. \\ &\cdot \Gamma\left[m + \frac{1}{2}(n-\beta-1) + \frac{3}{2}\right] \cdot \Gamma\left[m - \frac{1}{2}(n-\beta-1) + \frac{3}{2}\right] \}. \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^-(x, t) &= [A_3 J_{n-\beta+1}(pr) + B_3 N_{n-\beta+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \{(-1)^m kL (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) (pr)^{2m+1} \\ &\cdot \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)]\} / \left\{ 2^{2m+1} p \cos\left[\frac{1}{2}(n-\beta+1)\pi\right] \right. \\ &\cdot \Gamma\left[m + \frac{1}{2}(n-\beta+1) + \frac{3}{2}\right] \cdot \Gamma\left[m - \frac{1}{2}(n-\beta+1) + \frac{3}{2}\right] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \pi k L (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) (pr)^{2m+1} \right. \\
& \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right] \Bigg\} / \left\{ 2^{2m+3} p \cos \left[\frac{1}{2} (n - \beta + 1) \pi \right] \right. \\
& \cdot \Gamma \left[m + \frac{1}{2} (n - \beta + 1) + \frac{3}{2} \right] \cdot \Gamma \left[m - \frac{1}{2} (n - \beta + 1) + \frac{3}{2} \right] \Bigg\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

当 $n - \beta = \text{偶数}$ (但不为零) 时

$$\begin{aligned}
u^+(x, t) &= [A_4 J_{n-\beta}(pr) + B_4 N_{n-\beta}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\
&- kL^2 (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) \cdot F^+(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right]. \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^-(x, t) &= [A_6 J_{n-\beta+1}(pr) + B_6 N_{n-\beta+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{kL}{p} (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) \cdot F^+(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{kL}{p} (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) F^+(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^-(x, t) &= [A_6 J_{n-\beta+1}(pr) + B_6 N_{n-\beta+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\
&- \frac{1}{2} \frac{kL}{p} (\hat{h}_1^1 \cos 2\varphi + \hat{h}_2^1 \sin 2\varphi) F^-(pr) \cdot \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{kL}{p} (\hat{h}_1^1 \sin 2\varphi - \hat{h}_2^1 \cos 2\varphi) \cdot F^-(pr) \cdot \exp \left[i \left(n\varphi + Kz + \frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

以上各式中 $J_{n-\beta}$, $N_{n-\beta}$... 分别为 Bessel 函数和 Neumann 函数, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\beta = KL - K \frac{b}{2\pi}$, K 为声子波矢。另外

$$\begin{aligned}
F^+(pr) &= \frac{1}{(pr)^2} + \frac{1}{(pr)^4} [(n - \beta)^2 - 2^2] + \frac{1}{(pr)^6} [(n - \beta)^2 - 2^2][(n - \beta)^2 - 4^2] \\
&+ \dots + \frac{2^{n-\beta-1} \cdot \Gamma(n - \beta)}{(n - \beta)(pr)^{n-\beta}}, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^\pm(pr) &= \frac{1}{pr} + \frac{1}{(pr)^3} [(n - \beta \pm 1)^2 - 1] + \frac{1}{(pr)^5} [(n - \beta \pm 1)^2 - 1][(n - \beta \pm 1)^2 - 3^2] \\
&+ \dots + \frac{2^{(n-\beta-1 \pm 1)} \Gamma(n - \beta \pm 1)}{(pr)^{(n-\beta \pm 1)}}. \quad (32)
\end{aligned}$$

p 满足下述色散关系^[3]:

$$p^2 = p_L^2 = \frac{\omega^2}{V_L^2} - K^2 \approx \frac{\omega^2}{V_T^2} - K^2 = p_T^2. \quad (33)$$

2.2 沿垂直于螺旋位错线方向传播的引力波的作用效应

这时引力波的非零分量为

$$\hat{h}_x^x = -\hat{h}_y^y, \quad \hat{h}_t^t = \hat{h}_z^z, \quad \hat{h}_x^t = a_k \exp(ik^a x_a) = a_k^t \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (34)$$

将(34)式代入(21)式并利用(19)式, 立即算得

$$f^s = f^+ = f^- = 0, \quad (35)$$

即沿这一特殊方向传播的引力波对声子的激发力为零。将(35)式代入方程(17), 用同样的方

法算得相应的声子解为

$$u^z(\mathbf{x}, t) = [A_7 J_{n-\beta}(pr) + B_7 N_{n-\beta}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)], \quad (36)$$

$$u^+(\mathbf{x}, t) = [A_8 J_{n-\beta-1}(pr) + B_8 N_{n-\beta-1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)], \quad (37)$$

$$u^-(\mathbf{x}, t) = [A_9 J_{n-\beta+1}(pr) + B_9 N_{n-\beta+1}(pr)] \exp[i(n\varphi + Kz - \omega t)]. \quad (38)$$

将声子解(26)–(30)和(37), (38)式代入(6)式, 即可得柱坐标系中声子解的表达式. 以上各声子解中的 $A_1, A_2, \dots, A_9; B_1, B_2, \dots, B_9$ 为积分常数.

3 讨 论

(1) 由于在激发力 $f^i = 0$ 时, 方程(15)正好简化成 Serebryany 声子方程的分量形式, 且该方程在晶格空间复坐标系中恰好可分解成 $(n - \beta)$ 阶、 $(n - \beta - 1)$ 阶和 $(n - \beta + 1)$ 阶 Bessel 方程, 这表明本文声子解族中各 Bessel 函数项和 Neumann 函数项正是无引力波作用时的声子解, 因而其余各项则表示为由引力波作用产生的纯扰动解.

(2) 由于经典弹性理论的限制, 本文适用的空间范围必须大于原子尺度 (即 $r > r_A$, $r_A \sim 10^{-8} \text{cm}$). 这表明由(3)式所示的晶格空间度规并不存在奇点, 本文的声子解族也不存在奇异声子模式. 特别在 $r \rightarrow r_{\min}$ (即经典弹性理论成立的最小极限) 的区域以及在 $L \rightarrow L_{\max}$ (即对应于最大扭曲形变的螺旋位错) 的情况下, 激发力 $|f^i| \rightarrow |f^i|_{\max}$. 它表明在这一区域引力波和介质的耦合最强, 且耦合强度随 r 的增大而迅速衰减. 现在还不清楚在经典弹性理论失效的范围中引力波的作用效应. 但从理论上和实验上对上述最强耦合区域物理效应的进一步探索显然是一个很有意义的工作.

(3) 将声子解(25)–(30)和(36)–(38)相比较可以看出, 沿螺旋位错线方向传播和沿垂直于该方向传播的引力波对声子场扰动效应的物理行为是很不相同的. 前者对声子场的径向分量、 φ 分量和轴向分量 (在复坐标系中为 u^z, u^+ 和 u^- 分量) 均有扰动效应, 而后者对上述各分量均无扰动效应. 这种情况与无挠无曲但具有轴对称非均匀性的介质中引力波对声子的扰动效应也是不同的. 显然, 这种情况反映了在引力波作用下螺旋位错自身所具有的特有的对称性对声子模式的贡献. 按照本文程序, 还可将其结果推广到某些重要的具有典型对称特征的有界空间的情况. 另外, 采用我们在文献[7]中对引力波场 h_{ij} 在坐标旋转时的变换方法, 可很方便地讨论沿任意方向传播的引力波的作用效应, 这些问题将另文讨论.

致谢 本文部分工作是在莫斯科大学斯坦伯格天文研究所引力物理研究室期间完成的; 作者感谢 V. N. Rudenko 教授, D. V. Gal'tsov 教授对本工作的支持以及和他们多次有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] Bird, D. M., Preston, A. R., *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **61**: 2863.
- [2] Serebryany, I. M., *Theoretical and Mathematical Physics*, 1990, **83**: 428, in Russian.
- [3] Serebryany, E. M., *Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, **86**: 81.
- [4] Dixon, F. J., *Astrophysical Journal*, 1969, **156**: 529.
- [5] Esposito, F. P., *Astrophysical Journal*, 1970, **165**–170: 165.
- [6] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [7] 李芳昱, 唐鑑帝, *物理学报*, 1992, **41**: 1919.