中国科学（A辑）
第30卷　第6期　SCIENCE IN CHINA (Series A)　2000年6月

Euler 迭代的额外不动点及伴随它的 Sullivan 域*

王兴华　韩丹夫
（浙江大学数学系，杭州 310028）

摘要　发现了 Euler 法的“数值增根”现象. 经过系统的查找，给出了使 Euler 迭代的不动点不是多项式根的那些多项式及与之相关的初始近似. 对那些非排斥额外不动点，研究了伴随它的 Sullivan 域的动力学类型，并绘制了其分形图.

关键词　Euler 迭代　额外不动点　数值增根　Sullivan 域　分形图

Euler 迭代法

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f''(z_n)f(z_n)^2}{2f'(z_n)^3} \quad (n = 0,1,\cdots)$$

是 Newton 法的高一阶的推广. 如果由 Euler 迭代法得出一个收敛的数列 $\{z_n\}$，其极限 $\lim z_n$ 是否一定是多项式 $f(z)$ 的根？本文用复解析动力系统的方法，研究使这种例外情形发生的多项式 f 以及与之相关的初始近似 z_0 取值区域的动力学类型，并用图形予以显示. 关于复解析动力系统的基础知识参见文献[1～3].

1　没有一般收敛的纯迭代求根算法

倘若用 Newton 法

$$z_{n+1} = Nf(z_n) = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (n = 0,1,\cdots)$$

求多项式 $f(z) = az^d - bz$ 的根，这里 a 和 b 是非零复数，那么存在一个 Lebesgue 零测度且无处稠密的完全集 J，使对任意 $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus J$，当 $n \to \infty$ 时，$z_n = (Nf)^n(z_0)$ 都收敛于 f 的一个根，这里 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是Riemann 球面.

可惜，这个结论不能推广到一般的多项式 $f(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$. 事实上，McMullen 证明了

定理 A[4]　设 $\mathscr{F}_d$ 为所有次数不大于 $d(d>3)$ 的多项式组成的线性空间，$T: \mathscr{F}_d \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ 为任一于 $\mathbb{C}$ 上关于 f 和 z 的有理映射，即 T 可由 f 的系数和 z 经复有理运算 $\{+,-,\times,\div\}$ 组合而成，则不存在满测度的开集 $U \subset \mathscr{F}_d \times \overline{\mathbb{C}}$ 有如下的性质：如果 $(f, z) \in U$，那么当 $n \to \infty$ 时 $z_n = (Tf)^n(z)$ 就收敛于 f 的根.

1999-12-08 收稿
* 国家重点基础研究专项经费(批准号：G19990328)和浙江省自然科学基金资助项目

McMullen 的结果表明，在$\mathbb{C}$上可用于求次数不小于 4 的多项式根的一般收敛的纯迭代算法是不存在的．“纯迭代算法”是指算法可表示成以多项式为参数的$\overline{\mathbb{C}}$上的离散动力系统；或者说算法是单点定常的．

Newton 迭代就是一个纯迭代算法．由 $N(f,z)=Nf(z)=z-(f(z)/f'(z))$定义的 Newton 映射 $N:\mathscr{F}_d\times\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ 是$\mathbb{C}$上关于 f 和 z 的有理映射，所以根据 McMullen 的定理，Newton 方法不是一般收敛的．

2　对 CGS 方法的进一步解释

为了寻找这样的三次多项式集，集中的多项式 f 拥有一个非空的开集 $\Omega_f\subset\overline{\mathbb{C}}$，当初始近似 z_0 取自 Ω_f 时，对 f 的 Newton 法失败，即 $z_n=(Nf)^n(z_0)$不收敛到 f 的任意根．Curry 等人[5]根据 Fatou[6~8]的下列定理，设计了一个用计算机搜索的方法(CGS 方法)：

定理 B　有理自同态 $R:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ 的吸引周期点的吸引盘至少包含 R 的一个临界点，而且若 R 的每一个临界点都位于吸引周期点的某一盘中，则这些盘将在$\overline{\mathbb{C}}$上满测度．

CGS 方法是，取含参数 $A\in\mathbb{C}$ 且有实根 1 的三次多项式

$$f_A(z)=z^3+(A-1)z-A,$$

因为任意三次多项式可通过仿射变换转化为 f_A 或 z^3，只相差一个常数．满足 $R'(z)=0$ 的点 $z\in\mathbb{C}$ 称为 R 的临界点，由 $Nf_A(z)$的导数

$$(Nf_A(z))'=f_A(z)f''_A(z)/(f'_A(z))^2$$

可知 Nf_A 的临界点为f_A 的零点和 $z=0$，其中 $z=0$ 将起着重要的作用．对于参数 A 平面上的一点 A，如果从 z_0 出发的对 f_A 的 Newton 迭代不收敛到 f_A 的任何一个根，我们就把这种点 A 记为集 M 的点，即令

$$M=\{A\in\mathbb{C}\mid \text{对所有满足 } f_A(\zeta)=0 \text{ 的 } \zeta,\ (Nf_A)^n(0)\not\to\zeta\}.$$

在作图时，为了便于对集 M 的识别，可以使从 $z=0$ 出发的 Newton 迭代分别向 f_A 的 3 个根

$$\zeta_1=1,\ \zeta_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4A}),\ \zeta_3=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1-4A})$$

之一 ζ_j 收敛的参数A 的集$M_j=\{A\in\mathbb{C}\mid(Nf_A)^n(0)\to\zeta_j\}$为背景来衬托点集 M，因为 $M=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{3}M_j$（参见文献[9]的彩图 2-6(a)~(c)）．

现在我们来解释集 M 中A 对应的三次多项式f_A 的性质．有下列 5 种情形：

1) 对 $A\neq0$，点 0 是映射 Nf_A 的超吸引周期点，这时点 0 的轨道的直接吸引盘就是使对 f_A 的 Newton 迭代法失败的开集．

2) 点列 $c_n=(Nf_A)^n(0)$趋向于映射 Nf_A 的一个吸引周期轨道，这时点 0 属于这个周期轨道的直接吸引盘，它就是使对 f_A 的 Newton 迭代法失败的开集．

3) 点 0 是映射 Nf_A 的最终排斥周期点，这时映射 Nf_A 的 Julia 集 J 是零测度且无处稠密的完全集，并且对任意 $z_0\in\overline{\mathbb{C}}\setminus J$，当 $n\to\infty$ 时，Newton 迭代 $z_n=(Nf_A)^n(z_0)$都收敛于 f_A 的一个根．

4) 点列 $c_n=(Nf_A)^n(0)$趋向于映射 Nf_A 的一个有理中性周期轨道，这时点 0 属于这个周期轨道的直接吸引盘，它就是使对 f_A 的 Newton 迭代法失败的开集．

5) 点列 $c_n=(Nf_A)^n(0)$不趋向于任何周期轨道，这时存在映射的满足 Bryuno 条件的无理

中性周期轨道,以及含有此轨道的 Siegel 盘循环域,循环域的边界包含于点 0 的正向轨道的闭包$\overline{\{(Nf_A)^n(0)\}_{n=0}^{\infty}}$. 循环域的并即是使对 f_A 的 Newton 迭代法失败的开集.

对于多项式的 Newton 迭代来说,其 Sullivan 域中没有 Harman 环[9,10],1).

总之,如果多项式 f_A 拥有使 Newton 法失败的开集,那么 f_A 一定有一个非排斥周期轨道,伴随这个轨道的 Sullivan[11]域即是使对 Newton 法失败的开集. 但是,对 $A\in M$,我们还是要根据点列 $c_n=(Nf_A)^n(0)$的行为来判断对应的 f_A 是否拥有使 Newton 法失败的开集,以及这些开集是怎样的 Sullivan 域. 应当留意,对于上面所述的 5 种情形,特别是 4)与 5)之间,在计算上是很难区分的. CGS 方法亦被用来研究其他的求根迭代法,例如 Euler 族和 Halley 族的迭代法(参见文献[12,13]).

3 Smale 的例子

可以认为,提出 CGS 方法的文献[5]是 Newton 法对三次多项式不一般收敛的结论的一个证明. 但是,Smale[14]通过直接构造三次多项式

$$f_0(z)=\frac{1}{2}z^3-z+1$$

的方法,提供了上述结论的一个更为简捷的证明. 事实上,容易看出对 f_0 的 Newton 迭代有一个超吸引的 2 周期轨道$\{0,1\}$(参见文献[9]的彩图).

也不难引进参数 λ,构造使 f_λ 的 Newton 迭代有一个特征值为 λ 的 2 周期轨道$\{0,1\}$的三次多项式 $f_\lambda(z)$. 这样,就可以更为直接地提供具有 4 种 Sullivan 域中的任何一种作为使 Newton 法失败的开集的三次多项式 $f_\lambda(z)$(参见王兴华文2),文献[9]的第 2 章《牛顿法与分形》是其通俗版本).

4 Euler 迭代的各种额外不动点

一般说来,多项式 f 的根总是求根迭代映射 Tf 的不动点. 如果迭代映射 Tf 还有除 f 的根以外的不动点,就称这种不动点是迭代 Tf 的额外不动点.

Smale[14]曾指出,Newton 迭代 Nf 在 Gauss 平面$\mathbb{C}$ 没有额外不动点,而无穷远点∞是 Nf 的排斥额外不动点. 文献[10]中进而指出,整个 Halley 族迭代在 Riemann 球面$\overline{\mathbb{C}}$上都没有非排斥的额外不动点,即几乎都不会出现“数值增根”现象.

现在来研究 Euler 迭代

$$Ef(z)=z-\frac{f(z)}{f'(z)}-\frac{f''(z)f(z)^2}{2f'(z)^3}$$

的额外不动点. 在如下的意义下,Euler 迭代是 Newton 迭代高一阶的推广: $Ef(z)$是 f 在 z 的局部逆f_z^{-1} 在 $w=f(z)$的 Taylor 展开的二阶截断,所以它对 f 的根 ζ 具有三阶逼近,即

$$Ef(z)=\zeta+O(|z-\zeta|^3).$$

首先,我们有

1) Shishikura M. The connectivity of the Julia set and fixed points

2) 王兴华. Newton 法在 Riemann 球面上的动力学. 郑州:中国计算数学学会第五届年会大会报告. 1995

定理 1　对任意 $f\in\mathscr{F}_d$，$d\geqslant 2$，无穷远点 ∞ 是 Euler 迭代的排斥额外不动点，其特征值 $\lambda = 2d^2/((d-1)(2d-1))$.

证　当 $z\to\infty$ 时，

$$Ef(z) = \frac{(d-1)(2d-1)}{2d^2}z + O(1),$$

所以 ∞ 是 Ef 的不动点，其特征值 $\lambda = 2d^2/((d-1)(2d-1)) > 1$.

其次，关于 Euler 迭代在 Guass 平面 $\mathbb{C}$ 上的额外不动点，利用上节的方法来研究，我们有

定理 2　设 $f\in\mathscr{F}_d(d\geqslant 3)$，当且仅当

$$\begin{cases} f''(z)f(z) + 2f'(z)^2 = 0, \\ f'(z)\neq 0 \end{cases}$$

时，$z\in\mathbb{C}$ 是 f 的 Euler 迭代的额外不动点.

证　这可以从

$$Ef(z) - z = -\frac{f(z)}{2f'(z)^3}\{f''(z)f(z) + 2f'(z)^2\}$$

直接看出来.

通过直接计算还知道

$$(Ef(z))' = \frac{f(z)^2}{2f'(z)^4}\{3f''(z)^2 - f'''(z)f'(z)\}.$$

现在令 $(Ef(z))' = \lambda$，再令 $f''(z)$ 取任意非零值，$f'''(z)$ 取任意值且当 $\lambda\neq 6$ 时取非零值，其余更高阶的导数取任意值，从中解出 $f(z)$ 和 $f'(z)$，我们有

定理 3　对 $\lambda\in\mathbb{C}$，当且仅当

$$f(z) = -\frac{9f''(z)^3}{2f'''(z)^2}\left(2-\frac{\lambda}{3}\right)^2,\quad f'(z) = \frac{3f''(z)^2}{2f'''(z)}\left(2-\frac{\lambda}{3}\right),$$
$$f''(z)\neq 0,\quad f'''(z)\neq 0\ (\text{对 } \lambda\neq 6)$$

时，z 是 Euler 迭代 Ef 具有特征值 λ 的额外不动点.

这样，我们用直接构造的方法解决了 Euler 迭代非排斥额外不动点的存在性问题. 非排斥额外不动点的存在，说明 Euler 法有“数值增根”现象. 关于整个 Euler 族迭代非排斥额外不动点的存在性研究见王兴华等人的文章[1). 这些都是文献[12,13]研究过而没有解决的问题.

5　使 Euler 法失败的各种 Sullivan 域及其图形

在定理 3 中置 $d=3$，$z=0$，$f''(0)=2$，$f'''(0)=6$，得到三次多项式

$$f_\lambda(z) = z^3 + z^2 + \left(2-\frac{\lambda}{3}\right)z - \left(2-\frac{\lambda}{3}\right)^2.$$

对 $\lambda\neq 6$，点 $z=0$ 是 Ef_λ 在 Guass 平面 $\mathbb{C}$ 上唯一的额外不动点，具有特征值 λ.

现在，特征值 λ 作为参数在多项式 $f_\lambda(z)$ 和有理映射 Ef_λ 中完全处于有理运算的位置，而且，使 Euler 法失败的各种 Sullivan 域伴随一个额外不动点（而不是其他周期点），这对于显示这

1) 王兴华，韩丹夫. Euler 族和 Halley 族迭代的动力学研究

些 Sullivan 域特别有利．因为三次多项式 $f_\lambda(z)$的判别式

$$\Delta = (\lambda - 6)^2(\lambda - 9)(9\lambda - 49),$$

所以当 $\lambda \neq 6,9,49/9$ 时,$f_\lambda(z)$有 3 个单根．当 $\lambda = 0$ 时,$f_0(z)$的 3 个根为

$$\zeta_1(0) = 1,\ \zeta_2(0) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ \zeta_3(0) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

在 λ 平面分别挖去点 6,9,49/9 的充分小邻域之后,$f_\lambda(z)$的 3 个根 $\zeta_1(\lambda),\zeta_2(\lambda),\zeta_3(\lambda)$都是 λ 的解析函数(参见文献[15]),这使我们可在整个 λ 平面上对 $f_\lambda(z)$的 3 个根保持统一的编号．在数值实现上,则利用"并行连续跟踪法"1),从 $\zeta_j(0)$的数值出发,连续地求出每个 $\zeta_j(\lambda)$ $(j=1,2,3)$的值．

再来看 Ef_λ 的临界点．由

$$(Ef_\lambda(z))' = \frac{f_\lambda(z)^2}{f'_\lambda(z)^4}(45z^2 + 30z + \lambda),$$

知除了 f_λ 的 3 个根 $\zeta_1(\lambda),\zeta_2(\lambda),\zeta_3(\lambda)$是 Ef_λ 的临界点之外,还有

$$c_1(\lambda) = \frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{5}}\right),\quad c_2(\lambda) = \frac{1}{3}\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{5}}\right)$$

也是 Ef_λ 的临界点(可称为"自由临界点"),这里平方根是取当 $\lambda = 0$ 时值为 1 的那一支．

现在令 f_λ 中的参数 λ 取值 $r\exp(2\pi\alpha\mathrm{i})$,其中 $0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha < 1$．由于 r 和 α 的不同取值,使得 Ef_λ 的额外不动点 0 分别成为超吸引的($r=0$),吸引的($0<r<1$),有理中性的($r=1,\alpha$ 为有理数)以及 Siegel 点($r=1,\alpha$ 为满足 Bryuno[16]条件的无理数,参见文献[17]);从而,与之相伴的 Sullivan 域也就成为超吸引域、吸引域、抛物型域以及 Siegel 盘．这些 Fatou 域和旋转域,就是使对多项式 f_λ 的 Euler 法失败的开集．

对于 λ 的这种取值,按复数开方公式

$$\sqrt{x + \mathrm{i}y} = \pm\left(\rho + \frac{y}{2\rho}\mathrm{i}\right),\quad \rho = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

写出自由临界点的计算公式

$$c_1(\lambda) = \frac{\rho - 1}{3} + \frac{r\sin 2\pi\alpha}{30\rho}\mathrm{i},$$

$$c_2(\lambda) = -\left(\frac{\rho + 1}{3} + \frac{r\sin 2\pi\alpha}{30\rho}\mathrm{i}\right),$$

其中

$$\rho = \sqrt{\frac{5 - r\cos 2\pi\alpha + \sqrt{25 + r^2 - 10r\cos 2\pi\alpha}}{10}}.$$

本文列出 6 个例图(见图版Ⅰ,附本刊后,下同),图的窗口大小都是$[-0.2,0.2]\times[-0.2,0.2]$,图的中心是坐标原点,也就是额外不动点．这些图的背景中 3 种颜色的点在 Euler迭代下分别收敛到多项式的 3 个根．各个图的参数如下:

图版Ⅰ-1: $r=0,\ \lambda=0,\ c_1(\lambda)=0,\ c_2(\lambda)=-0.666\,666\,7$.

1) 王何宇,吴庆标,王兴华．代数曲线的连续跟踪．计算机辅助设计与计算机图形(待发表)

图版Ⅰ-2：$r=0.9$，$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\lambda=-0.6636320-0.6079413\,\mathrm{i}$，$c_1(\lambda)=0.0132193-0.0194917\,\mathrm{i}$，$c_2(\lambda)=-0.6798886+0.0194917\,\mathrm{i}$.

图版Ⅰ-3：$r=1$，$\alpha=0$，$\lambda=1$，$c_1(\lambda)=-0.0351909$，$c_2(\lambda)=-0.6314757$.

图版Ⅰ-4：$r=1$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\lambda=-1$，$c_1(\lambda)=-0.0318150$，$c_2(\lambda)=-0.6984817$.

图版Ⅰ-5：$r=1$，$\alpha=\frac{2}{3}$，$\lambda=-0.5-0.8660254\,\mathrm{i}$，$c_1(\lambda)=-0.0173448-0.0274397\,\mathrm{i}$，$c_2(\lambda)=-0.6840115+0.0274397\,\mathrm{i}$.

图版Ⅰ-6：$r=1$，$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\lambda=-0.7373689-0.6754903\,\mathrm{i}$，$c_1(\lambda)=0.0243500-0.0209835\,\mathrm{i}$，$c_2(\lambda)=-0.6910167+0.0209835\,\mathrm{i}$.

当 $|\lambda|>1$ 时，Ef_λ 在 Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上就有两个排斥不动点，从而具有了使其 Julia 集不连通的必要条件[1)]．这时是否有 Harman 环存在，取决于其他无理中性周期点与自由临界点间是否存在恰当的匹配关系，这是一个值得深入研究的问题．

参　考　文　献

1 Blanchard P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. Bull (New Ser) Amer Math Soc, 1984, 11: 85 ~ 141

2 吕以辇．复解析动力系统．北京：科学出版社，1997

3 任福尧．复解析动力系统．上海：复旦大学出版社，1997

4 McMullen C. Families of rational maps and iterative root-finding algorithms. Ann Math, 1987, 125: 467 ~ 493

5 Curry H, Garnett L, Sullivan D. On the iteration of a rational function: computer experiments with Newton's method. Commun Math Phys, 1983, 91: 267 ~ 277

6 Fatou P. Sur les equations fonctionnalles. Bull Soc Math France, 1919, 47: 161 ~ 271

7 Fatou P. Sur les equations fonctionnalles. Bull Soc Math France, 1920, 48: 33 ~ 94

8 Fatou P. Sur les equations fonctionnalles. Bull Soc Math France, 1920, 48: 208 ~ 314

9 石钟慈，袁亚湘主编．奇效的计算．长沙：湖南科学技术出版社，1998

10 王兴华，韩丹夫．两族迭代的不动点和 Julia 集．计算数学，1997，2：219 ~ 224

11 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. Ann Math, 1985, 122: 401 ~ 418

12 Vrscay E R. Julia sets and Mandelbrot-like associated with higher order Schroder rational iteration functions. Math Comput, 1986, 46: 151 ~ 169

13 Vrscay E R, Gilbert W J. Extraneous fixed points, basin boundaries and chaotic dynamics for Schroder and Konig rational iteration functions. Numer Math, 1988, 52: 1 ~ 16

14 Smale S. On the efficiency of algorithms of analysis. Bull (New Ser) Amer Math Soc, 1985, 13: 87 ~ 121

15 Wilkinson J H 著．代数特征值问题．石钟慈，邓健新译．北京：科学出版社，1987

16 Bryuno A D. Convergence of transformations of differential equations to normal forms. Dokl Akad Nauk USSR, 1965, 165: 987 ~ 989

17 Yoccoz J-C. Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de(C,O). C R Acad Sci Paris, 1988, 36: 55 ~ 58

1) 见 518 页脚注 1)