

# 带动力学夸克的格点量子色动力学中手征 对称性自发破缺研究\*

罗向前\*\*

(中山大学物理科学与工程技术学院物理系, 广州 510275)

**摘要** 量子色动力学最有挑战性的课题之一, 是手征对称性自发破缺的研究. 当 Fermi 子质量等于零时, 如果手征凝聚不为零, 就意味着系统存在手征对称性自发破缺. 在格点规范理论传统的数值计算方法中, 必须在多个裸夸克质量下做模拟研究, 然后用一些拟合函数把数据外推到手征极限. 用几率分布函数法, 无需做任何外推, 计算出零质量下带动力学夸克格点量子色动力学的手征凝聚. Staggered Fermi 子的结果表明, 此方法是一研究格点量子色动力学手征对称性自发破缺有效可行的方法.

**关键词** 格点量子色动力学 手征对称性自发破缺 动力学夸克

手征对称性是带 Fermi 子的量子场论的一个重要性质. 在低温和低密度下, 在夸克无裸质量的量子色动力学(QCD)中, 系统的手征对称性是自发破缺的. 在足够高的温度或密度下, 系统存在从禁闭相到夸克胶子等离子体相或色超导相的跃变, 是手征对称性得到恢复. 有很多唯象模型对手征对称性破缺和手征相变的研究, 而格点规范理论<sup>[1]</sup>从 QCD 第一原理出发, 有希望给出最可靠的结果. 以上课题已经有很多格点研究<sup>[2-9][1]</sup>, 但仍存在很多没有解决的问题.

我们这里要解决的主要问题是, 如何从带动力学夸克的格点数值模拟中, 抽取手征对称性自发破缺的定量信息. 当夸克裸夸克的质量  $m$  为零时, 作用量在 Fermi 场的整体手征变换  $\psi \rightarrow \exp(i\alpha \cdot \tau \gamma_5) \psi$  下是不变的, 而 Fermi 场二次形算符  $\bar{\psi} \psi$  则不然. 这里  $\tau$  是手征对称群的生成元. 非零的真空期待值  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle|_{m=0}$  意味着

收稿日期: 2005-08-12; 接受日期: 2006-04-01

\*国家自然科学基金重点项目(批准号: 10235040)、教育部科学技术研究重点项目(批准号: 105135)、中国科学院知识创新项目(批准号: KJCX2-SW-N10)、广东省自然科学基金(批准号: 05101821)和香港中山大学高等学术中心基金会(批准号: 06P1)资助项目

\*\*E-mail: [stslxq@mail.sysu.edu.cn](mailto:stslxq@mail.sysu.edu.cn)

1) Luo X Q, Gregory E B, Guo S H, et al. QCD at finite density. hep-ph/0011120

手征对称性的自发破缺, 并伴随着通过动力学的方式产生 Fermi 子质量. 每个味道的手征凝聚为

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \text{Tr}\Delta^{-1} \rangle / (N_c V), \tag{1}$$

其中  $N_c=3$  是颜色数,  $V$  是晶格上的格点数目, 而  $\Delta$  Fermi 子矩阵. 求迹在颜色、自旋和格点位置空间进行. 期待值  $\langle \dots \rangle$  通过与配分函数相关的积分测度来计算

$$Z = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dU] \exp(-S_g - S_f), \tag{2}$$

其中  $U$  代表规范场链变量,  $S_g$  代表胶子作用量, 而  $S_f = \sum_{x,y} \bar{\psi}(x)\Delta_{x,y}\psi(y)$  代表 Fermi 子作用量.  $\Delta = m + i\Lambda$  是 Fermi 子矩阵.

计算手征凝聚的传统方法是矩阵的求逆技术, 而这个方法在手征极限下 ( $m = 0$ ) 并不收敛. 另一个传统方法是用下式来计算

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{1}{N_c V} \left\langle \sum_{j=1}^{N_c V/2} \frac{2m}{\lambda_j^2(U) + m^2} \right\rangle, \tag{3}$$

其中  $\lambda_j$  是  $\Lambda$  的第  $j$  个正的本征值. 这个方法的缺点是需要计算 Dirac 算符的所有本征值. 当格点体积很大时, 计算工作量大增使得此方法不可行. 另外, 要在多个不同的 Fermi 子质量下产生带动力学夸克的组态是非常昂贵的. 由于在有限的格点体积下, (3) 式导致  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle|_{m=0} = 0$ , 要得到手征极限下的手征凝聚  $\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , 需要做  $m$  的外推. 把  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  外推到无质量的极限, 要用到某些假设的拟合函数(例如线性函数加上二次或对数修正). 这样的过程无法预计其可靠性, 有时还有很大的任意性, 特别是当系统发生相变的时候.

在文献[10], 我们提出一个与之不同的方法, 即用手征凝聚几率分布函数法(PDF), 来研究带 Fermi 子的格点规范理论中的手征对称性自发破缺. PDF 方法已经在 Schwinger 模型中得到检验 [10], 并被应用于研究 P 和 CT 对称性自发破缺 [11]、theta 真空 [12]、有限密度  $SU(2)$  格点规范理论相变 [13] 和淬灭近似下带 staggered 夸克的  $SU(3)$  的格点规范理论 [14].

## 1 计算手征凝聚的 PDF 方法

首先, 我们把每个真空态用  $\alpha$  来表征, 而在此真空态的手征凝聚为  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\alpha$ . 在 Gibbs 态的手征凝聚几率分布函数(PDF)定义为 [11,14]

$$P(c) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \delta(c - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\alpha}), \tag{4}$$

其中  $w_{\alpha}$  为真空态  $\alpha$  的权重. 函数  $P(c)$  给出随机选取真空态而得到手征凝聚的值为  $c$  的几率. 如果基态在整体手征变换下不变, 则  $P(c) = \delta(c)$ . 如果基态破坏了

手征对称性, 则  $P(c)$  会是一个复杂的函数, 其形状依赖于整体手征对称群. 因此, 从一个  $m = 0$  的手征对称的作用量出发产生的组态计算出的  $P(c)$ , 我们可以定性地判断手征对称性是否自发破缺.

在带 Fermi 子的量子场论中, 手征对称性破缺取决于 Fermi 场在整体手征变换下的性质. 根据(4)式, 我们可以定义<sup>[14]</sup>某个规范场组态  $U$  下的 PDF:

$$P_U(c) = \frac{\int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f) \delta(c - \sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x)/N_c V)}{\int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f)}, \quad (5)$$

在  $\sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x)$  中, 求和遍及颜色、自旋指标和格点位置.

在带 Fermi 子的规范理论中, 文献[14]用 PDF 方法证明, 如果作用量具有整体  $U(1)$  手征变换不变性, 我们可用

$$C(j) = \langle c_0(U) \rangle = \frac{z(j)}{N_c V} \left\langle \frac{1}{\lambda_j(U)} \right\rangle, \quad (6)$$

计算手征极限下的手征凝聚. 这里  $c_0(U)$  代表  $m=0$  时组态  $U$  下的手征凝聚. 让  $J_0$  代表零阶第一类 Bessel 函数, 而  $z(j)$  则代表  $J_0$  的第  $j$  个根.  $\langle \dots \rangle$  代表对  $m=0$  的带动力学 Fermi 子的规范场组态求统计平均. 在手征破缺相, 我们期待有一平台  $C(j) = \text{const.}$  出现, 从中可抽取手征极限下的手征凝聚.

(6)式清楚表明 Fermi 子矩阵的本征值和手征对称性破缺的关系: 如果手征对称性自发破缺,  $c_0(U) \neq 0$ ,  $\lambda_j$  应正比于  $z(j)/V$ . 在无穷大体积下  $V \rightarrow \infty$ , 与手征对称性破缺相关的本征值将随着  $1/V$  而趋向于 0, 这与 Banks-Casher 的结论一致.

(6)式的优点是, 为了从平台上抽取  $C(j)$ , 只需计算  $m = 0$  的带动力学 Fermi 子的规范场组态的 Fermi 子矩阵的头几个本征值. 当然, 像其他所有方法那样, 最后还要做有限体积效应分析  $\lim_{V \rightarrow \infty} C(j)$ .

## 2 带动力学夸克 QCD 的结果

在文献[14], 我们已经展示了这个方法在格点 QCD 的淬火近似下是可行的. 现在我们将首次给出带动力学 staggered (Kogut-Susskind) 夸克的格点 QCD 的结果, 其作用量为  $S = S_g + S_f$ :

$$\begin{aligned} S_g &= -\frac{\beta}{N_c} \sum_p \text{Re Tr}(U_p), \\ S_f &= \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) \Delta_{x,y} \psi(y), \\ U_p &= U_\mu(x) U_\nu(x+\mu) U_\mu^+(x+\nu) U_\nu^+(x), \end{aligned}$$

$$\Delta_{x,y} = m\delta_{x,y} + \sum_{\mu=1}^4 \eta_{\mu}(x) \left[ U_{\mu}(x) \delta_{x,y-\mu} - U_{\mu}^+(x-\mu) \delta_{x,y+\mu} \right], \quad (7)$$

$$\eta_{\mu}(x) = (-1)^{x_1+x_2+\dots+x_{\mu-1}},$$

其中  $\beta = 2N_c/g^2$ ,  $g$  是裸耦合常数. 在手征极限  $m = 0$  下, Fermi 子作用量  $S_f$  具有连续  $U(1)$  手征对称性, 因此(6)式成立.

要计算带动力学夸克的QCD(即完整QCD)中的热力学观测量, 我们用文献[15]所介绍的算法, 它是把微正则Fermi子平均法[16]应用到带Fermi子的4维 $SU(3)$ 格点规范理论[15]. 此方法已经被应用到各种不同的格点模型[17-21], 其基本思想是用恒等式

$$\exp(-S_g) = \int dE \exp(6V\beta E) \delta\left(\frac{1}{N_c} \sum_p \text{Re Tr}(U_p) - 6VE\right) \quad (8)$$

来把(2)式的完整QCD的配分函数 $Z$ 和某算符 $O$ 真空期待值, 表达为对方块能量 $E$ 的单重积分[15],

$$Z = \int dE \exp(6V\beta E) n(E) \left\langle \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f) \right\rangle_E, \quad (9)$$

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int dE \exp(6V\beta E) n(E) \left\langle \int [d\bar{\psi}][d\psi] O \exp(-S_f) \right\rangle_E,$$

其中

$$n(E) = \int [dU] \delta\left(\frac{1}{N_c} \sum_p \text{Re Tr}(U_p) - 6VE\right). \quad (10)$$

为某个给定  $E$  的态密度, 而  $\langle \dots \rangle_E$  是几率分布为

$$\delta\left(\sum_p \text{Re Tr}(U_p)/N_c - 6VE\right) / n(E)$$

的组态下的统计平均值. 例如,

$$\begin{aligned} & \left\langle \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f) \right\rangle_E \\ &= \frac{1}{n(E)} \int [dU] \delta\left(\frac{1}{N_c} \sum_p \text{Re Tr}(U_p) - 6VE\right) \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f), \end{aligned} \quad (11)$$

从上式我们可以得出等效 Fermi 子作用量与  $E, m$  和  $N_f$  的函数关系

$$\begin{aligned} S_f^{\text{eff}}(E, m, N_f) &= -\ln \left\langle \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp(-S_f) \right\rangle_E \\ &= -\ln \left\langle (\det \Delta(m, U))^{N_f/4} \right\rangle_E = -\ln \left\langle \left( \prod_{j=1}^{N_f/2} (\lambda_j^2 + m^2) \right)^{N_f/4} \right\rangle_E, \end{aligned} \quad (12)$$

这里的  $N_f/4$  因子是为了消除Kogut-Susskind Fermi子的加倍. 一旦在一系列 $E$ 下计

算  $\lambda_j(U)$ 、 $\langle \dots \rangle_E$  和  $n(E)$ , 我们就可得出任意味道数  $N_f$ , 夸克质量  $m$  (甚至在手征极限) 和一定  $\beta$  范围下的热力学观测量, 而无需再做额外的数值模拟. 近几年, 已经有不少人把此方法 [15] 应用到有限密度格点 [2,22,23] 1)~3).

图 1 显示出  $N_f = 1$  和  $\beta = 5.1069$  时, 在 14 个非零的  $m$  下, 用(3)式得出的  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  的结果. 在传统方法中, 在这样多个夸克质量在计算是非常昂贵的. 我们用一线性函数把  $m \neq 0$  时  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  的数据外推到手征极限. 在这个  $\beta$  下, 用线性函数拟合  $m \in [0.004, 0.1]$  区域的数据很好, 因此可以把此外推的结果作比较.

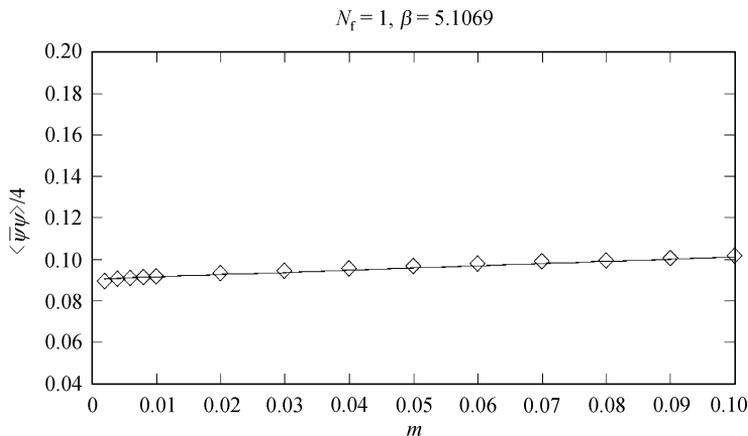


图 1 当  $N_f = 1, \beta = 5.1069$  时, 从(3)式得出的  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle / 4$  与  $m$  的函数关系

在  $V = 10^4$  的格点上, 在  $E \in [0, 1)$  范围, 我们分析了 16 个  $E$  的数据, 每个  $E$  有 100 ~ 400 个独立的组态 [16]. 这称为一次模拟.

图 2 显示用在同样的  $N_f$  和  $\beta$  下, 用(6)式得出的  $C(j)$  的结果, 而这些结果只需对  $m = 0$  做一数值模拟 [16] 的分析得出. 图上可见在  $j \in [5, 40]$  范围有一平台, 所得的结果与把(3)式得出的数据外推到手征极限得到的结果是一致的.

图 3 ~ 8 分别显示 ( $N_f = 2, \beta = 5.0238$ ), ( $N_f = 3, \beta = 4.9411$ ) 和 ( $N_f = 4, \beta = 4.8590$ ) 的结果. 在手征极限  $m = 0$  下, 不同味道的结果都在同样的  $E = 1.2921/N_c$ , 但在不同的  $\beta$  下的得出, 而  $\beta$  的不同是由于动力学夸克的效应. 我们的结果表明, PDF 方法给出的手征凝聚与传统方法外推的结果相符.

1) Schmidt C. Lattice simulations with chemical potential. hep-lat/0408047

2) Philipsen O. The QCD phase diagram at zero and small baryon density. hep-lat/0510077

3) Schmidt C, Fodor Z, Katz S. The QCD phase diagram at finite density. hep-lat/0510087

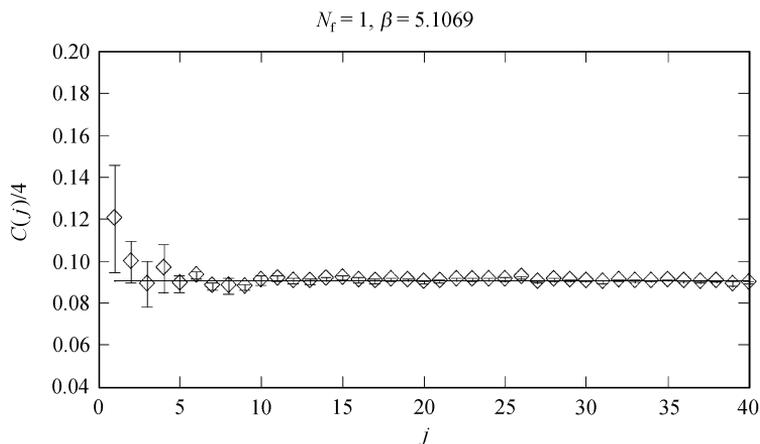


图 2 当  $N_f = 1, \beta = 5.1069$  时, 从(6)式得出的  $C(j)/4$  和  $j$  的函数关系

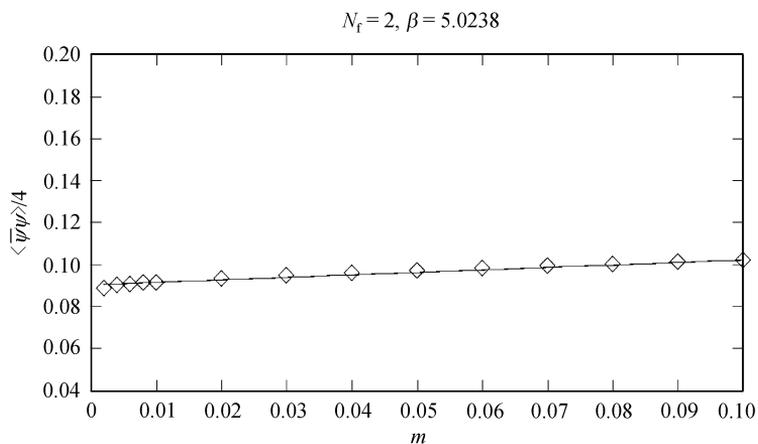


图 3 当  $N_f = 2, \beta = 5.0238$  时, 从(3)式得出的  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle / 4$  与  $m$  的函数关系

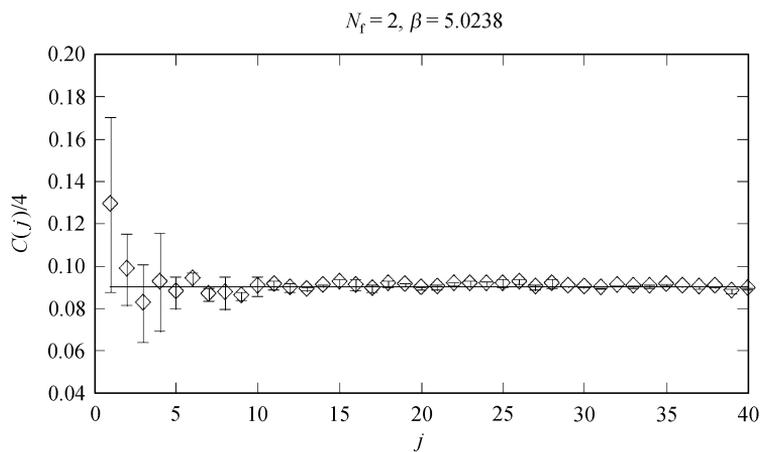


图 4 当  $N_f = 2, \beta = 5.0238$  时, 从(6)式得出的  $C(j)/4$  和  $j$  的函数关系

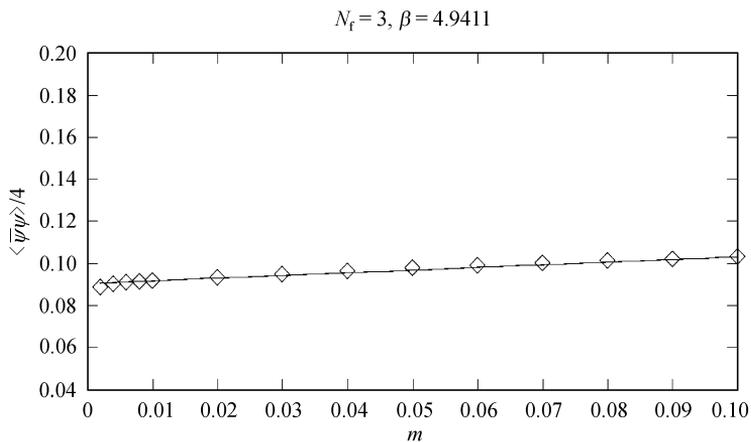


图 5 当  $N_f = 3, \beta = 4.9411$  时, 从(3)式得出的  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle / 4$  与  $m$  的函数关系

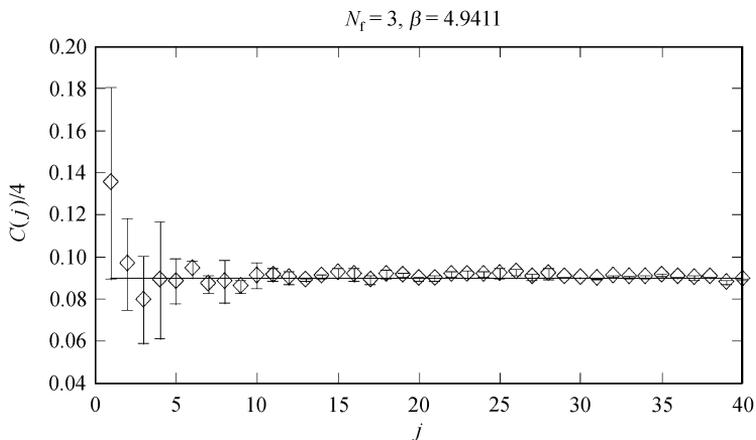


图 6 当  $N_f = 3, \beta = 4.9411$  时, 从(6)式得出的  $C(j)/4$  和  $j$  的函数关系

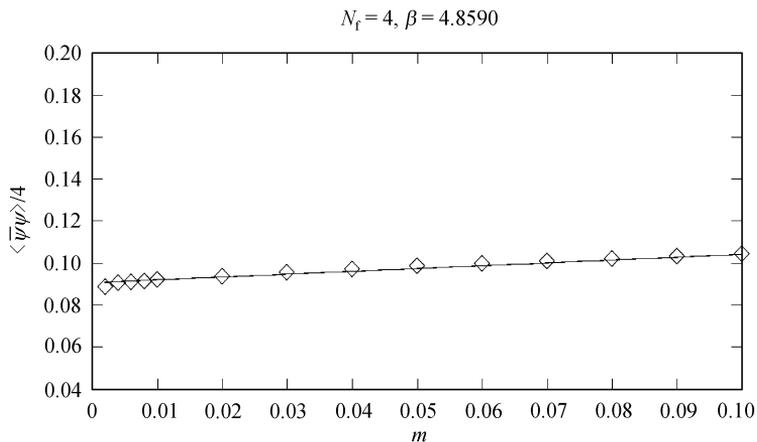


图 7 当  $N_f = 4, \beta = 4.8590$  时, 从(3)式得出的  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle / 4$  与  $m$  的函数关系

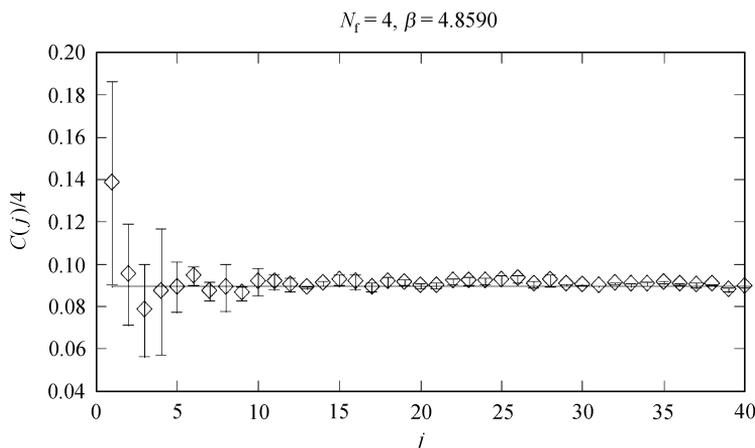


图 8 当  $N_f = 4$ ,  $\beta = 4.8590$  时, 从(6)式得出的  $C(j)/4$  和  $j$  的函数关系

### 3 讨论

本文把 PDF 方法推广应用到计算手征极限下带动力学 staggered 夸克的格点 QCD 中的手征凝聚. 结果是令人鼓舞的. 这是获取 QCD 手征对称性自发破缺定量信息的、与众不同的有效方法. 此方法有几个优点: 计算手征凝聚时只需  $m = 0$  的 Dirac 算符的头几个本征值; 只需对  $m = 0$  的组态做一数值模拟; 无需对  $m$  或  $\lambda$  做外推.

在某些情形下: 例如, 当系统处于临界状态时, 由(3)式得出的数据将随着  $m$  而迅速变化, 用拟合函数外推可能会得出错误的结果, 而由(6)式有希望给出可靠的结果. 这种情况值得深入研究.

致谢 感谢 V. Azcoiti 和 V. Laliena 有益的讨论.

### 参 考 文 献

- 1 Wilson K G. Confinement of quarks. Phys Rev D, 1974, 10: 2445—2459
- 2 Muroya S, Nakamura A, Nonaka C, et al. Lattice QCD at finite density: an introductory review. Prog Theor Phys, 2003, 110: 615—668[DOI]
- 3 Katz S D. Lattice QCD at finite  $T$  and  $\mu$ . Nucl Phys B, 2004, 129: 60—73
- 4 Lombardo M P. Lattice QCD at finite density: a primer. Prog Theor Phys Suppl, 2004, 153: 26—39
- 5 Luo X Q. Tricritical point of lattice QCD with Wilson quarks at finite temperature and density. Phys Rev D, 2004, 70: 091504[DOI]
- 6 Gregory E B, Guo S H, Kroger H, et al. Hamiltonian lattice QCD at finite chemical potential. Phys Rev D, 2000, 62: 054508[DOI]
- 7 Fang Y, Luo X Q. Hamiltonian lattice quantum chromodynamics at finite density with Wilson fermions. Phys Rev D, 2004, 69: 114501[DOI]
- 8 Luo X Q, Chen H S. QCD at finite temperature and density with staggered and Wilson quarks. Nucl Phys B,

- 2005, 140: 511—513
- 9 Chen H S, Luo X Q. Phase diagram of QCD at finite temperature and chemical potential from lattice simulations with dynamical wilson quarks. *Phys Rev D*, 2005, 72: 034504[DOI]
  - 10 Azcoiti V, Laliena V, Luo X Q. Spontaneous symmetry breaking in fermion-gauge systems: a nonstandard approach. *Phys Lett B*, 1995, 354: 111—116[DOI]
  - 11 Azcoiti V, Galante A. Parity and CT realization in QCD. *Phys Rev Lett*, 1999, 83: 1518—1520[DOI]
  - 12 Azcoiti V, DiCarlo G, Galante A, et al. New proposal for numerical simulations of theta-vacuum like systems. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 141601[DOI]
  - 13 Aloisio R, Azcoiti V, DiCarlo G, et al. Probability distribution function of the diquark condensate in two colours QCD. *Nucl Phys B*, 2001, 606: 322—336[DOI]
  - 14 Luo X Q. Chiral condensate of lattice QCD with massless quarks from the probability distribution function method. *Phys Rev D*, 2004, 69: 076012[DOI]
  - 15 Luo X Q. Thermodynamical quantities of lattice full QCD from an efficient method. *Mod Phys Lett A*, 2001, 16: 1615—1627[DOI]
  - 16 Azcoiti V, DiCarlo G, Grillo A F. A new proposal for including dynamical fermions in lattice gauge theories: the compact QED case. *Phys Rev Lett*, 1990, 65: 2239—2242[DOI]
  - 17 Azcoiti V, Luo X Q. Phase structure of compact lattice QED in three-dimensions with massless fermions. *Mod Phys Lett A*, 1993, 8: 3635—3642 [DOI]
  - 18 Azcoiti V, Luo X Q, Piedrafita C E, et al. Fermionic effective action and the phase structure of noncompact quantum electrodynamics in (2+1)-dimensions. *Phys Lett B*, 1993, 313: 180—186[DOI]
  - 19 Azcoiti V, Luo X Q. Phase structure of three-dimensional quantum chromodynamics with dynamical fermions. *Phys Lett B*, 1993, 313: 191—196[DOI]
  - 20 Azcoiti V, Laliena V, Luo X Q, et al. The microcanonical fermionic average method for monte carlo simulations of lattice gauge theories with dynamical fermions. *Phys Rev D*, 1993, 48: 402—416[DOI]
  - 21 Luo X Q. Efficient algorithm for computer simulations of the fermion scalar systems. *Phys Rev D*, 1995, 52: 6493—6499[DOI]
  - 22 Takaishi T. Density of states method at finite isospin density. *Mod Phys Lett A*, 2004, 19: 909—920[DOI]
  - 23 Takaishi T. Hadronic property at finite density. *Prog Theor Phys Suppl*, 2004, 153: 277—286