

AWGN 信道中载波频偏影响下的 PCC-OFDM 系统性能分析

周 鹏* 赵春明 史志华 巩晓群

(东南大学移动通信国家重点实验室, 南京 210096)

摘要 载波频率偏差(CFO)会破坏正交频分复用(OFDM)系统中子载波间的正交性,从而产生子载波间干扰(ICI). 基于多项式抑制编码(PCC)的 OFDM系统(PCC-OFDM)可以增强其对 CFO 的鲁棒性,从两方面分析 AWGN 信道中 CFO 对PCC-OFDM 系统的性能影响:一是反应信号功率损失的平均信号功率与 ICI 功率之比(CIR)或者平均的 ICI 功率;二是 CFO 影响下的系统 SER 和 BER 性能. 首先给出了平均 CIR 和 ICI 功率闭式解的表达式. 结果表明, CIR 和 ICI 功率只取决于归一化频偏而与系统子载波数无关. 其次,研究了 CFO影响下 PCC-OFDM 系统在采用 BPSK, QPSK, 8-PSK 和 16-QAM 调制符号时的 SER 性能及其采用 Gray 映射时的 BER 性能. 利用 Beaulieu 序列的性质, SER 和 BER 性能都可以根据 ICI 的特征函数精确地表达成无穷级数的和.

关键词PCC-OFDM载波频偏CIRICI功率SERGray映射BERBeaulieu 序列特征函数

1 引言

正交频分复用(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM)技术现已广泛应用于无线通信领域 \square . 由于多载波特性,OFDM对由接收端和发射端的晶振频率不匹配或无线信道中的Doppler频率偏移而产生的载波频率偏差(carrier frequency offset, CFO)十分敏感. CFO 会引起所有子信道上的幅度衰减、相位旋转和子载波间干扰(inter-carrier interference, ICI),因而对OFDM系统性能会产生"盆底"效应. 如今已经出现许多算法或技术来抑制OFDM系统对CFO的敏感性,其中,由 Armstrong 和 Zhao等提出的基于多项式抑制编码(polynomial cancellation coding,PCC)的ICI自抵消OFDM系统(PCC-OFDM)是简单且有效的方案之一 \square PCC-OFDM主要思想是在发送端把信息符号通过不同的加权因子映射到相邻的 L 个子载波上;然后在接

收稿日期: 2006-09-04; 接受日期: 2007-06-17

国家自然科学基金(批准号: 60496310)和国家高技术研究发展计划基金(批准号: 2006AA01Z263)资助项目

*联系人, E-mail: zphq@seu.edu.cn

收端对L个子载波上的接收信号进行线性合并处理,这样就可以大大地增强系统对CFO的鲁棒性.尽管OFDM系统采用PCC时会降低频带利用率和增加复杂度,却能有效地减少子载波中的ICI分量,降低CFO对系统性能的影响,从而可以大大增强OFDM系统对CFO的鲁棒性.

评估CFO对OFDM系统或PCC-OFDM系统的性能影响通常有两个指标. 首先是反映期望功率损失的平均载波干扰功率比(carrier-to-interference power ratio, CIR)或子载波中的平均干扰功率,即ICI功率,其中CIR定义为期望信号功率与ICI功率之比 [5-7]. Li等根据时变信道的相关函数给出了OFDM系统中ICI功率的理论表达式 [7]. 根据Li等的分析结果, Ng等研究了 1/2 码率的PCC-OFDM系统中ICI功率的上下界,然而未能给出其精确而简洁的闭式表达式 [8]. 其次,更有意义的评价指标应该是系统存在CFO时的平均错误概率性能. Keller等利用ICI功率的Gauss近似研究了AWGN(additive white Gaussian noise)信道中OFDM系统的误比特率(bit error rate, BER)[9]; Zhao等利用ICI分布的矩给出了更为精确的BER性能表达式 [10]; 值得一提的是,Sathananthan和Tellambura利用著名的Beaulieu序列和ICI的特征函数(characteristic function, CHF)推导出了AWGN信道中CFO影响下OFDM系统SER性能的理论表达式 [11]. 研究结果表明,利用ICI的Gauss近似或ICI的矩仅能给出CFO影响下OFDM系统中平均错误概率的近似表达式,而利用Beaulieu序列和ICI的特征函数可以精确地推导出BPSK(binary phase shift keying), QPSK(quadrature phase shift keying)以及 16-QAM(16-ary quadrature amplitude modulation)调制符号SER性能的理论表达式 [11].

本文研究了 AWGN 信道中存在 CFO 时 PCC-OFDM 系统的性能. 首先通过假设 OFDM 或 PCC-OFDM 系统的子载波数趋于无穷,推导出 CIR 和 ICI 功率的理论表达式. 理论分析结果表明,由上述假设而造成与实际系统之间的偏差可以忽略不计. 其次研究了 PCC-OFDM 系统中采用 BPSK,QPSK,8-PSK 和 16-QAM 4 种常用调制符号时的 SER 性能及其采用 Gray 映射时的 BER 性能. 通过利用 Beaulieu 序列和 ICI 的特征函数,BPSK,QPSK 和 16-QAM 的 SER 和 BER 性能可以表示为一个无穷序列的和. 而对符号判决区间不是方形的 8-PSK 调制符号的平均错误概率性能进行精确计算时,其同相和正交分量是相关的. 然而,通过引进信号空间的概念,8-PSK 符号的 SER 和 BER 性能亦可近似表示成类似形式. 仿真结果显示,对 AWGN 信道中存在 CFO 时 PCC-OFDM 系统性能的分析和评估,文中给出的所有表达式是有效的.

本文结构如下: 第2部分介绍了 AWGN 信道中存在 CFO 时 OFDM 和 PCC-OFDM 系统模型; 第3部分研究了 1/2 码率的 PCC-OFDM 系统中 CIR 和 ICI 功率的闭式解; 第4部分利用 Beauliue 序列和 ICI 的特征函数推导了系统的 SER 和 BER 性能; 第5部分对通用码率 PCC-OFDM 系统的性能进行了简要分析; 第6部分给出了 PCC-OFDM 系统性能的计算机仿真及理论表达式的数值结果; 第7部分为结论.

2 PCC-OFDM 系统模型

假设OFDM系统中子载波数为N,且CFO在一个OFDM符号间隔内保持不变,则第k个子载波上接收信号可以表示为 ^[5]

$$Y_k = X_k I_0 + \sum_{m=0, m \neq k}^{N-1} X_m I_{m-k} + w_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$
(1)

其中, X_k 和 w_k 分别表示第 k 个子载波上的发送符号和复Gauss采样,其同相和正交分量的均

值都为 0, 方差分别为 $E_s/2$ 和 $\sigma_w^2/2$ 的独立同分布的随机变量. I_0 表示由于CFO存在而导致的期望信号幅度衰减和相位旋转; 等式右边第 2 项即是由CFO引起的ICI分量, I_{m-k} 为第 m 个子载波到 k 个子载波的干扰系数. 表示为 [5]

$$I_n = \frac{\sin(\pi(n+\varepsilon))}{N\sin(\pi(n+\varepsilon)/N)} e^{j\pi(n+\varepsilon)(N-1)/N},$$
(2)

其中、 ε 为归一化的频率偏差、定义为 CFO 与相邻子载波间隔的比值.

与传统的OFDM系统不同,PCC-OFDM系统是在发送端将传输符号通过不同的加权因子映射到L个相邻子载波上,其中,加权因子为 $(1-D)^{L-1}$ 展开式的系数,D表示频率域上一个子载波的时延,1/L表示码率;在接收端,通过对L个承载相同信息符号子载波上的接收信号进行线性合并及最大似然硬判决从而得到发送符号。对于码率为1/2的PCC-OFDM系统,N/2个发送符号映射到偶数子载波上,奇数子载波上调制符号是对应偶数子载波上发送符号的负数,即 $X_1 = -X_0, \cdots, X_{N-1} = -X_{N-2}$;接收机对N个子载波上的接收信号进行线性合并处理,即奇数子载波上接收到的信号乘以加权因子"-1"并与其对应偶数子载波上的接收信号相加,再经最大似然硬判决后得到N/2个发送符号序列[4]。线性合并后的检测信号可用下式表示:

$$Y_k = X_k S_0 + \sum_{m=0, m \neq k}^{N/2-1} X_m S_{m-k} + \tilde{w}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1,$$
(3)

其中, S_0 表示期望信号的幅度衰减和相位旋转; S_{m-k} 和 $X_m S_{m-k}$ 分别表示第m 个子载波上的干扰系数和干扰分量。 S_{m-k} 表示如下 [4]:

$$S_n = 2I_{2n} - I_{2n-1} - I_{2n+1}, \quad n = 0, \dots, N/2 - 1.$$
 (4)

此外, 噪声 \tilde{w}_k 的方差由于线性合并而扩大 2 倍, 即 $\tilde{w}_k \sim CN(0, 2\sigma_w^2)$.

相对于传统的OFDM系统,尽管PCC-OFDM系统的带宽效率减少了L倍,却能有效地抑制ICI的干扰,增强系统对CFO的鲁棒性,从而大大地提高系统性能.PCC-OFDM亦可以用来降低系统对由信道时变而产生的ICI的敏感度 [8.12]. 当码率为 1 时(L=1), PCC-OFDM系统等效于传统的OFDM系统.

3 CIR和ICI功率分析

对于传统的OFDM系统或PCC-OFDM系统,CFO对期望信号功率造成的损失可以用CIR和ICI功率来评估.为简化,可以归一化发送信号平均功率 E_s ,并忽略AWGN对两者的影响.当归一化频偏 ε 已知时,CIR和ICI功率的精确表达式是 ε 和 N 的函数.对于OFDM系统,CFO不会改变(1)式中接收信号 Y_k 的功率(证明见附录A).当子载波数 $N \ge 8$ 时,CIR的最大变化范围为 0.068dB^[4],这表明期望信号功率与ICI功率基本上不随 N 变化而变化.因此,当系统中仅存在CFO时,CIR和ICI功率可以近似表达成一个仅与 ε 有关而与 N 无关的函数.对于PCC-OFDM系统,CIR和ICI功率亦可得到相似的结论.与OFDM系统不同的是,(3)式中经线性合并后接收信号 Y_k 的功率并不是一个常数,而是一个与 ε 有关的变量.文中考虑到OFDM和PCC-OFDM系统都已经过载波频率的粗同步,剩余的频率偏差 ε 满足 $|\varepsilon| \le 0.5$.

3.1 OFDM 系统中 CIR 和 ICI 功率计算

OFDM系统中,由(1)式可以直接得到CIR和ICI功率的精确表达式^[4],表示如下:

$$CIR = \left|I_0\right|^2 / \sum_{n=1}^{N-1} \left|I_n\right|^2 = \left|\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{N\sin(\pi\varepsilon/N)}\right|^2 / \sum_{n=1}^{N-1} \left|\frac{\sin(\pi(n+\varepsilon))}{N\sin(\pi(n+\varepsilon)/N)}\right|^2, \tag{5}$$

$$\sigma_{\rm I}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} |I_n|^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{\sin(\pi(n+\varepsilon))}{N \sin(\pi(n+\varepsilon)/N)} \right|^2.$$
 (6)

既然 CIR 和 ICI 功率几乎独立于子载波数 N,因此可以通过假设系统中子载波数为无穷大,即 $N \to \infty$ 获得 CIR 和 ICI 功率的理论表达式. 利用附录 A 中的结果, CIR 理论表达式为

$$CIR = \lim_{N \to \infty} \left| \frac{\sin(\pi \varepsilon)}{N \sin(\pi \varepsilon / N)} \right|^2 / \left(1 - \left| \frac{\sin(\pi \varepsilon)}{N \sin(\pi \varepsilon / N)} \right|^2 \right) = \frac{\sin^2(\pi \varepsilon)}{(\pi \varepsilon)^2 - \sin^2(\pi \varepsilon)}. \tag{7}$$

同样, 易得到 ICI 功率的理论表达式

$$\sigma_{\rm I}^2 = 1 - \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi\varepsilon}\right)^2. \tag{8}$$

(8)式反映AWGN信道中OFDM系统由CFO引起ICI功率的理论表达式, Li等通过利用时变信道的相关函数也得到相同的解 [1].

3.2 PCC-OFDM 系统中 CIR 和 ICI 功率计算

对于 1/2 码率的PCC-OFDM系统, 首先证明检测信号的功率 σ_T^2 是一个变量. 由于(3)式中的传输符号 X_k $(k=0,1,\cdots,N/2-1)$ 相互独立, σ_T^2 为 [4]

$$\sigma_{\mathrm{T}}^{2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left| S_{n} \right|^{2} = \underbrace{\left| 2I_{0} - I_{-1} - I_{1} \right|^{2}}_{\sigma_{\mathrm{C}}^{2}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N/2-1} \left| -I_{2n-1} + 2I_{2n} - I_{2n+1} \right|^{2}}_{\sigma_{1}^{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(4 \left| I_{2n} \right|^{2} + 2 \left| I_{2n+1} \right|^{2} \right) + f(\varepsilon), \tag{9}$$

其中由(2)式、 $f(\varepsilon)$ 表示为

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \frac{-2\sin^2(\pi\varepsilon)(1 + 2\cos(\pi/N))}{N^2\sin(\pi(2n+\varepsilon+1)/N)\sin(\pi(2n+\varepsilon-1)/N)}.$$
 (10)

如附录B中证明,当子载波数 N 为 2 的整数次幂,归一化频偏满足 $|\varepsilon| \le 1$ 时, $f(\varepsilon) = 0$. 因此,利用附录 A 中(A5)和(A6)式, σ_T^2 表示如下:

$$\sigma_{\rm T}^2 = 3 + \cos(\pi \varepsilon). \tag{11}$$

由(11)式可知,检测信号的平均功率是一个取决于归一化频偏的变量. 当 $N \ge 8$ 时,由(8) 式可知,OFDM 系统中期望信号功率 $\sigma_{\rm C}^2 = (\sin(\pi\varepsilon)/\pi\varepsilon)^2$ 是一个与子载波数无关的量. 对于 1/2 码率的 PCC-OFDM 系统,由(9)式可以得到其期望信号功率 $\sigma_{\rm C}^2$ 也是一个几乎不随 N 变化而变化的量,因此,CIR 和 ICI 功率的理论表达式可以表示为精确表达式(对应为(9)式中 $\sigma_{\rm C}^2/\sigma_{\rm C}^2$ 和

 $\sigma_{\rm L}^2$)在 N 趋向于无穷时的极限, 结果如下所示:

CIR =
$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sigma_{\rm C}^2}{\sigma_{\rm I}^2} = \frac{4\sin^2(\pi\varepsilon)}{(\pi\varepsilon - \pi\varepsilon^3)^2 (3 + \cos(\pi\varepsilon)) - 4\sin^2(\pi\varepsilon)},$$
 (12)

$$\sigma_{\rm I}^2 = (3 + \cos(\pi \varepsilon)) - \frac{4\sin^2(\pi \varepsilon)}{(\pi \varepsilon - \pi \varepsilon^3)^2}.$$
 (13)

分析结果显示,对于 N = 16和 N = 2048, CIR 和 ICI 功率在 0.0001 ≤ ε ≤ 0.5 时最大变化范 围都是 0.0155dB. 因而, 对于不同子载波数 N 的 PCC-OFDM 系统, 从(9)式以及分析结果可知, 两者的变化势必都很小, 其误差可以忽略不计, 因此, (12)和(13)式可以作为有限个子载波系统 中 CIR 和 ICI 功率的理论表达式.

PCC-OFDM 系统中 SER 和 BER 计算

本节将利用 Beaulieu 序列和 ICI 的特征函数来推导 AWGN 信道中存在 CFO 时, 1/2 码率 PCC-OFDM 系统中平均错误概率的表达式. 文中仅分析系统中采用 BPSK, OPSK, 8-PSK 和 16-QAM 调制符号时的 SER 性能及其采用 Gray 映射时的 BER 性能. 不失一般性, 仅考虑系统 中第1个子载波上的发送符号和接收信号、即k=0.

首先分析接收信号的特征函数并给出 Beaulieu 序列.

如前所述,由于 X_k 和 w_k 的独立性,接收信号 Y_0 的实部 $\Re\{Y_0\}$ 和虚部 $\Im\{Y_0\}$ 可以独立进 行分析. 由(3)式可得, $\Re\{Y_0\}$ 和 $\Im\{Y_0\}$ 的特征函数分别表示如下:

$$\varphi^{I}(\omega) = e^{j\omega\Re\{X_{0}S_{0}\} - \omega^{2}\sigma_{w}^{2}/2} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{ICI}^{I}(m,\omega),$$
(14)

$$\varphi^{I}(\omega) = e^{j\omega\Re\{X_{0}S_{0}\}-\omega^{2}\sigma_{w}^{2}/2} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{ICI}^{I}(m,\omega),$$

$$\varphi^{Q}(\omega) = e^{j\omega\Im\{X_{0}S_{0}\}-\omega^{2}\sigma_{w}^{2}/2} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{ICI}^{Q}(m,\omega),$$
(14)

其中, $\varphi_{\text{ICI}}^{\text{I}}(m,\omega) = \mathbb{E}\left[e^{j\omega\Re\{X_mS_m\}}\right]$, $\varphi_{\text{ICI}}^{\text{Q}}(m,\omega) = \mathbb{E}\left[e^{j\omega\Im\{X_mS_m\}}\right]$ 分别代表第 m 个 ICI 分量的实部 和虚部的特征函数, $E[\cdot]$ 表示数学期望. 对于 QPSK, 8-PSK 和 16-QAM 调制符号, $\Re\{X_m\}$ 和 $\mathfrak{F}\{X_m\}$ 都独立且等概率地取自于同一集合,因此易得到 $\varphi_{\mathrm{ICI}}^{\mathrm{I}}(m,\omega)$ 与 $\varphi_{\mathrm{ICI}}^{\mathrm{Q}}(m,\omega)$ 等价,表示为 $\varphi_{\rm ICI}(m,\omega)$.

根据Gil-Pelaez定理,随机变量 X 的累积分布函数可用其特征函数 $\varphi(\omega)$ 来表示 [13], 即

$$\Pr(X < x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Im\left\{e^{-jn\omega_0 x} \varphi(n\omega_0)\right\}}{n} + e(x, \omega_0), \tag{16}$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$; Φ 是集合 $\{1,3,\cdots,M,\cdots\}$; $e(x,\omega_0)$ 是误差项. 其中, T是一个反映频域采样 率的参数, 当选择一个较大的T时, 误差项 $e(x, \omega_0)$ 可以忽略不计 $\frac{[14-17]}{2}$. (16)式即是著名的 Beaulieu序列或称之为Beaulieu级数 [14].

BPSK调制符号的SER或BER性能可以直接由Beaulieu序列得到. 而对于符号判决区间为 方形的QPSK和 16-QAM调制符号, 其SER和BER可由 $\varphi^{I}(\omega)$ 和 $\varphi^{Q}(\omega)$ 联合表示为一个无穷序 列的和. 到目前为止、对于符号判决区间不是方形的 8-PSK调制符号、通过利用信号空间的概 念,其SER和BER性能只能近似地表达成一个无穷序列的和 [18,19].为简化分析,在对系统中采用QPSK,8-PSK以及 16-QAM调制符号进行平均错误概率性能分析时,仅考虑复平面第一象限内的发送符号,用集合 Ω 表示.

4.1 BPSK 调制

对于 BPSK 调制符号, 令 X_0 = 1, 当接收信号的实部 $\Re\{Y_0\}$ 小于 0 时, 判决错误. 因此, 利用(16)式, BPSK 符号的 SER 亦是 BER、可表示为

$$P_{s,\text{BPSK}} = P_{b,\text{BPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \Re\{S_0\})^{N/2-1}}{ne^{n^2\omega_0^2 \sigma_w^2/2}} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{\text{ICI}}(m, n\omega_0).$$
 (17)

因 $X_m \in \{\pm 1\}$ 且为等概率的,故 $\varphi_{\text{ICI}}(m,\omega) = \cos(\omega \Re\{S_m\})$.

4.2 QPSK 调制

对于QPSK调制符号, $E_s=2$, $X_0=1+j$, $\varphi_{\rm ICI}(m,\omega)=\cos\left(\omega\Re\{S_m\}\right)\cos\left(\omega\Im\{S_m\}\right)$. SER 和BER 可以分别表示如下:

$$P_{s,QPSK} = 1 - P_{\Re\{Y_0\} > 0} \times P_{\Im\{Y_0\} > 0}, \tag{18}$$

$$P_{b,\text{QPSK}} = 1 - \frac{P_{\Re\{Y_0\} > 0} + P_{\Im\{Y_0\} > 0}}{2}.$$
(19)

利用 Beaulieu 序列, QPSK 调制符号的 SER 和 BER 性能可以分别表示为

$$P_{s,QPSK} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \Phi} \frac{\tan\left(n\omega_{0}\Re\{S_{0}\}\right)}{ne^{n^{2}\omega_{0}^{2}\sigma_{w}^{2}/2}} \prod_{m=0}^{N/2-1} \varphi_{ICI}(m, n\omega_{0})$$

$$-\frac{4}{\pi^{2}} \left(\sum_{n_{1} \in \Phi} \frac{\sin\left(n_{1}\omega_{0}\left(\Re\{S_{0}\} - \Im\{S_{0}\}\right)\right)}{n_{1}e^{n_{1}^{2}\omega_{0}^{2}\sigma_{w}^{2}/2}} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{ICI}(m, n_{1}\omega_{0})\right)$$

$$\times \left(\sum_{n_{2} \in \Phi} \frac{\sin\left(n_{2}\omega_{0}\left(\Re\{S_{0}\} + \Im\{S_{0}\}\right)\right)}{n_{2}e^{n_{2}^{2}\omega_{0}^{2}\sigma_{w}^{2}/2}} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{ICI}(m, n_{2}\omega_{0})\right), \tag{20}$$

$$P_{b,\text{QPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \Phi} \frac{\tan(n\omega_0 \Re\{S_0\})}{n e^{n^2 \omega_0^2 \sigma_w^2 / 2}} \prod_{m=0}^{N/2-1} \varphi_{\text{ICI}}(m, n\omega_0).$$
 (21)

4.3 8-PSK 调制

图 1 为 8-PSK 调制符号在采用 Gray 映射时的信号空间图. 从图中易知

$$E_s = 1\,,\quad \Omega = \left\{s_0\,, s_1 \mid \mathrm{e}^{\mathrm{j} n \pi/8}\,, n = 1, 3\right\}\,,\quad X_m \in \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j} n \pi/8}\,, n = 1, 3, \cdots, 15\right\}\,.$$

对于符号判决区间不是方形的 8-PSK调制符号,在研究SER和BER性能时,其同相分量和正交分量不能各自独立地进行分析.为此,我们基于信号空间的对称性和独立性,提出了利用信号空间分解方法近似地克服同相分量和正交分量之间的相关性 [18].同样地,对于PCC-OFDM系统中 8-PSK调制符号的SER亦可表示为

$$P_{s,8\text{-PSK}} \approx P_{\Im\{Y_0\} < 0|s_0} + P_{\Re\{Y_0\} < 0|s_1}.$$
 (22)

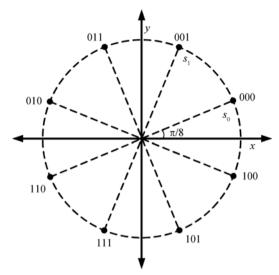


图 1 8-PSK 调制符号的信号空间图(Gray 映射)

AWGN信道中,对于采用Gray码映射的 8-PSK符号,利用信号空间的概念可得到BER性能的近似表达式^[19],即

$$P_{b,8\text{-PSK}} \approx \frac{2}{3} \left(P_{\Im\{Y_0\} > 0 \mid s_0} + P_{\Re\{Y_0\} > 0 \mid s_0} \right) = \frac{2}{3} \left(P_{\Im\{Y_0\} > 0 \mid s_1} + P_{\Re\{Y_0\} > 0 \mid s_1} \right). \tag{23}$$

然而,对于系统中存在 CFO 时,由于每一个接收信号都存在着固定的相位旋转 $e^{j\pi\varepsilon(N-1)/N}$ 从而破坏了接收信号基于集合 Ω 中的信号空间对称性,因此, PCC-OFDM 系统中 8-PSK 符号的 BER 性能表达式应修正为

$$P_{b,8\text{-PSK}} \approx \frac{1}{3} \sum_{X_0 \in \Omega} \left(P_{\Re\{Y_0\} > 0} + P_{\Im\{Y_0\} > 0} \right).$$
 (24)

同样,利用 Beaulieu 序列, 8-PSK 符号的 SER 和 BER 性能分别可以表示为

$$P_{s,8\text{-PSK}} \approx 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \Phi} \frac{\sin(n\omega_0 \sin(\pi/8)\Re(S_0))}{\sec(n\omega_0 \cos(\pi/8)\Im(S_0))ne^{n^2\omega_0^2\sigma_w^2/2}} \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{\text{ICI}}(m, n\omega_0), \tag{25}$$

$$P_{b,8\text{-PSK}} \approx \frac{2}{3} - \frac{4}{3\pi} \sum_{n \in \mathcal{O}} \left[\frac{\sin(n\omega_0 \cos(\pi/8)\Re\{S_0\})}{\sec(n\omega_0 \sin(\pi/8)\Im\{S_0\})ne^{n^2\omega_0^2\sigma_w^2/2}} + \frac{\sin(n\omega_0 \sin(\pi/8)\Re(S_0))}{\sec(n\omega_0 \cos(\pi/8)\Im\{S_0\})ne^{n^2\omega_0^2\sigma_w^2/2}} \right] \prod_{m=1}^{N/2-1} \varphi_{\text{ICI}}(m, n\omega_0),$$
 (26)

其中第m个 ICI 分量的特征函数 $\varphi_{\text{ICI}}(m,\omega)$ 为

$$\varphi_{\text{ICI}}(m,\omega) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n \in \{1,3\}} \cos \left(\omega \cos \left(\frac{n\pi}{8} \right) \Re \left\{ S_m \right\} \right) \right) \left(\sum_{n \in \{1,3\}} \cos \left(\omega \cos \left(\frac{n\pi}{8} \right) \Im \left\{ S_m \right\} \right) \right). \tag{27}$$

值得注意的是, (25)和(26)式仅为PCC-OFDM系统中存在CFO时 8-PSK符号的SER和BER 性能的近似解, 其精确度取决于归一化的载波频偏 ε 和信道中的SNR (signal-to-noise ratio). 当

SNR一定时,两者的精确度会随归一化频偏 ε 增加而减小;而当归一化频偏 ε 固定时,其精确度会随SNR的增加而增加 [18,19].

4.4 16-QAM 调制

对于 16-QAM 调制符号, $E_s=10$, $\Omega=\{1+j,1+3j,3+j,3+3j\}$. 分析方法类似于 QPSK,其 SER 可以用下式表达:

$$P_{s,16\text{-QAM}} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{X_0 \in \mathcal{O}} P_{c,X_0}, \tag{28}$$

其中, P_{c,X_0} 是对应于发送符号 X_0 的正确判决概率. 注意: 对于 16-QAM 调制符号,由于 PCC-OFDM 系统中接收端采用了线性合并处理,其符号判决区间应相应地扩大. 例如,对于发送符号 $X_0=1+j$,正确判决区间应该是接收信号 Y_0 的实部和虚部同时满足 $0<\mathfrak{R}\{Y_0\}\leq 4$ 和 $0<\mathfrak{I}\{Y_0\}\leq 4$. 另外一种处理方法是将线性合并后的接收信号 Y_0 除以系数"2",则此时符号的判决区间与传统的16-QAM符号一样. 在此情形下,系统的干扰系数 S_m' 和每维的噪声方差应分别为 $S_m/2$ 和 $\sigma_w^2/4$. 文中仅分析后一种处理模式.

对于接收信号实部 $\Re\{Y_0\}$ 和虚部 $\Im\{Y_0\}$ 的特征函数亦可通过(14)和(15)式得到, 其中, 第m个干扰分量的特征函数表示如下:

$$\varphi_{\text{ICI}}(m,\omega) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n \in \{1,3\}} \cos\left(n\omega\Re\left\{S'_{m}\right\}\right) \right) \left(\sum_{n \in \{1,3\}} \cos\left(n\omega\Im\left\{S'_{m}\right\}\right) \right). \tag{29}$$

利用接收信号的特征函数和 Beaulieu 序列, 类似于 QPSK 调制符号的分析可以很容易得到 16-QAM 调制符号的 SER 性能表达式.

至于采用Gray映射时 16-QAM符号的BER性能,文中采用和文献 [20]类似的分析方法.图 2 为Gray映射时 16-QAM符号的信号空间图.每个调制符号含有 4 bits信息,如图所示分别为 i_0 , i_1 , i_2 和 i_3 . i_1 和 i_3 比特的判决边界分别为x轴和y轴,则 i_1 和 i_3 比特的联合错误判决概率可以表示为

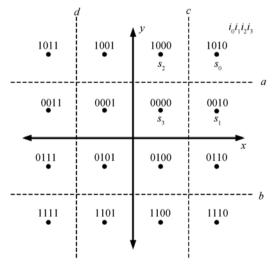


图 2 16-QAM 调制符号的信号空间图(Gray 映射)

$$P_{b,(i_1,i_3)} = \frac{1}{8} \sum_{X_0 \in \Omega} \left(P_{\Re\{Y_0\} < 0} + P_{\Im\{Y_0\} < 0} \right). \tag{30}$$

如图 2 所示,信号空间图中由虚线 a 和虚线 b 划分成的 3 个区间是比特 i_0 的判决区间,而比特 i_2 的判决区间则是由虚线 c 和虚线 d 分割成的 3 个区间. 针对不同的发射比特,通过对接收信号 Y_0 进行单独分析可以得到比特 i_0 和 i_2 的联合错误判决概率. 对于比特 i_0 = 1,当 Y_0 落入虚线 a 和虚线 b 之间的区域时,则判决错误;对于比特 i_2 = 0,当 Y_0 落入虚线 c 右边或者虚线 d 左边的区域,则将导致错误的判决. 如前所述,由于接收信号中的固定相位旋转而引起信号空间的非对称性,分析 i_0 和 i_2 比特的联合错误判决概率必须同时考虑以上两种情形. 因此, i_0 和 i_2 的联合错误判决概率可以表示为

$$P_{b,(i_{0},i_{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(P_{\Re\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{0}} + P_{\Im\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{0}} + P_{\Re\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{1}} - P_{\Im\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{1}} - P_{\Im\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{2}} - P_{\Re\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{3}} - P_{\Im\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{3}} - P_{\Im\{Y_{0}\} \in \Theta \mid s_{3}} \right), \tag{31}$$

其中, Θ为开区间(-2,2).

综上所述, 采用 Gray 映射时 16-QAM 符号的 BER 性能可以用下式表示:

$$P_{b,16\text{-QAM}} = \frac{P_{b,(i_0,i_2)} + P_{b,(i_1,i_3)}}{2}.$$
(32)

将(30)~(32)式代入(16)式, 其 BER 性能最终可以表示为

$$P_{b,16\text{-QAM}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathcal{O}} \left[\frac{\sin(2n\omega_{0}) \left(\cos\left(3n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) - \cos\left(n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) \right)}{ne^{n^{2}\omega_{0}^{2}\sigma_{w}^{2}/8} \left(\cos\left(3n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) + \cos\left(n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) \right)} - \frac{\sin\left(3n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) + \sin\left(n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right)}{2ne^{n^{2}\omega_{0}^{2}\sigma_{w}^{2}/8} \left(\cos\left(3n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) + \cos\left(n\omega_{0}\Re\left\{S_{0}^{'}\right\}\right) \right)} \right] \prod_{m=0}^{N/2-1} \varphi_{\text{ICI}}(m, n\omega_{0}).$$
(33)

5 通用码率的 PCC-OFDM 系统性能分析

对于码率为1/L ($L \in \{2^n, n = 0, \dots, \log_2 N\}$)的PCC-OFDM系统,接收端通过对L个相邻子载波上的接收信号进行线性合并后,其检测信号的平均功率为[4]

$$\sigma_{\rm T}^2 = \sum_{l=0,L,\dots}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{2(L-1)} (-1)^i \frac{(2(L-1))!}{i!(2(L-1)-i)!} I_{l+i-(L-1)} \right|^2.$$
 (34)

利用附录 A 中类似的分析, σ_T^2 亦可精确地表示为 ε 的函数. 同样地, CIR 和 ICI 功率的闭式解也可以通过对子载波数 N 趋于无穷时求极限获得,结果类似于(12)和(13)式.

对于BPSK, QPSK, 8-PSK以及 16-QAM调制符号平均错误概率的理论表达式, 其分析过程类似于OFDM系统 [11.18]或前文所述 1/2 码率的PCC-OFDM系统. 对于通用码率的PCC- OFDM系统, 干扰系数 S_i 为下式所示 [4]:

$$S_{l} = \sum_{i=0}^{2(L-1)} (-1)^{i} \frac{(2(L-1))!}{i!(2(L-1)-i)!} I_{l+i-(L-1)}, \quad l = 0, L, \dots, N/L-1.$$
(35)

对于其他码率的 PCC-OFDM 系统,由于系统中子载波数通常是 2 的整数次幂,因而 N 不能被 L 整除.因此,通过利用前文所述的方法以及合理的假设仅能得到 CIR 和 ICI 功率以及平均错误概率性能的近似表达式,并不能得到如 OFDM 系统或 1/2 码率 PCC-OFDM 系统中精确的闭式解.

6 数值与仿真结果

本节将给出计算机仿真与数值结果来证明 CIR 和 ICI 功率以及各种调制符号的 SER 和 BER 性能理论表达式的正确性. 仿真中, 仅考虑 1/2 码率的 PCC-OFDM 系统, 作为性能比较, 亦将给出标准的 OFDM 系统(L=1)的仿真结果. 为简化, 归一化载波频率偏差 ε 满足 $0 \le \varepsilon \le 0.5$

6.1 CIR 和 ICI 功率仿真

设PCC-OFDM系统中子载波数 N=1024,调制符号为QPSK. 仿真中,随机产生 10^6 个OFDM符号来仿真存在CFO时PCC-OFDM系统CIR和ICI功率,为简化,仿真系统中不考虑循环前缀(cyclic prefix, CP)和AWGN,仿真结果如图 3 和 4 所示. 对于OFDM系统,CIR和ICI功率的精确表达式如(5)和(6)式所示,其理论表达式分别为(7)和(8)式所示;对于 1/2 码率的PCC-OFDM系统,其精确表达式和理论表达式分别为(9)式中的 $\sigma_{\rm C}^2/\sigma_{\rm I}^2$, $\sigma_{\rm I}^2$ 和(12)与(13)式所示. 如图所示,首先,对于OFDM系统(L=1)和PCC-OFDM系统(L=2),其CIR和ICI功率理论表达式的数值解与精确表达式的数值解完全吻合,说明通过假设子载波数为无穷时得到的理论表达式与实际有限子载波系统中的精确表达式之间的误差可以忽略;其次,CIR和ICI功率的仿真结果与其理论表达式或精确表达式的数值亦相当吻合,这进一步证明理论表达式的鲁棒性和有效性. 最后,从图 4 中可以看出,本文给出的ICI功率的理论表达式明显优于文献 [8]中给出的上下界。

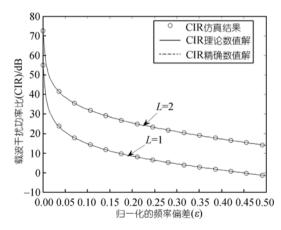


图 3 PCC-OFDM 系统中 CIR 与 ε 性能比较图 (L=1, 2)

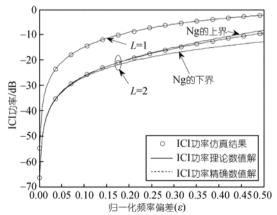


图 4 PCC-OFDM 系统中 ICI 功率与 ε 性能比较图 (L=1, 2)

6.2 SER 和 BER 仿真

图 5~9 给出了子载波数 N=1024 的PCC-OFDM系统在AWGN信道中存在CFO时的SER性能和BER性能,系统分别采用Gray映射的BPSK,QPSK,8-PSK和 16-QAM调制符号. 对于利用Beaulieu序列推导出的平均错误概率性能理论表达式中无穷序列的和的参数选取,其截断参数 M 和采样参数 T 分别可以根据截断误差的上界 $(\sqrt{2\pi}T/M\pi^2)Q(2\pi M/T)$ 来确定,其中 Q(x) 为 Q 函数 $\frac{1161}{2}$. 仿真中,令 M=10001,T=30.0.

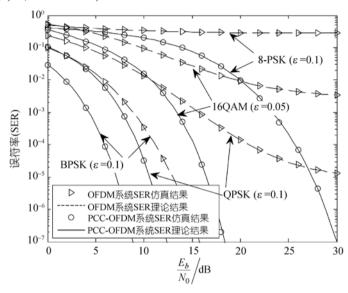


图 5 PCC-OFDM 系统中 SER 与 E_b/N_0 的性能比较图(L=1, 2)

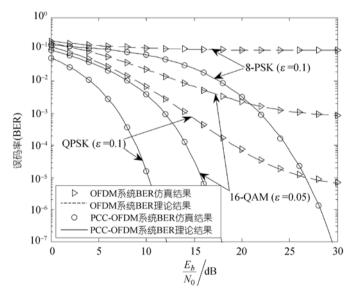


图 6 PCC-OFDM 系统中 BER 与 E_b/N_0 的性能比较图(L=1, 2)

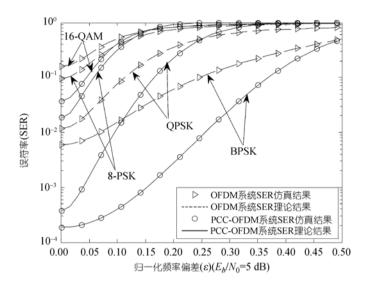


图 7 PCC-OFDM 系统中 SER 与 ε 的性能比较图(L=1, 2)

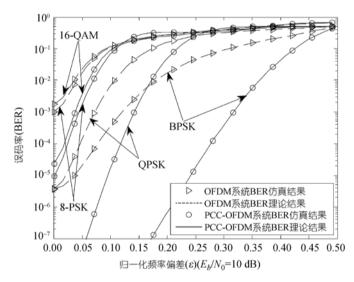


图 8 PCC-OFDM 系统中 BER 与 ε 性能比较图(L=1, 2)

图 5 和 6 给出了对于不同归一化频偏 ε , SER 和 BER 性能与比特信噪比 E_b/N_0 之间的性能比较图. 从图中可以看出,对于 OFDM 系统和 1/2 码率的 PCC-OFDM 系统,理论表达式的数值结果与仿真的 SER 性能和 BER 性能都十分精确的吻合. 其次从图 5 和 6 可以看出,当 E_b/N_0 >0 dB, ε = 0.1时,8-PSK 理论分析结果与仿真结果亦十分吻合,说明其精确度在此情形下几乎不受影响,上述结果证明了文中给出的 8-PSK 调制符号的 SER 性能和 BER 性能理论表达式具备相当好的适用性.

图 7 和 8 给出了比特信噪比 $E_b/N_0=5$ dB 和 $E_b/N_0=10$ dB 时, SER 性能和 BER 性能与归一 化频偏 ε 之间的性能比较图. 从图中可以看出, 对于 BPSK, QPSK 和 16-QAM 调制符号, 其

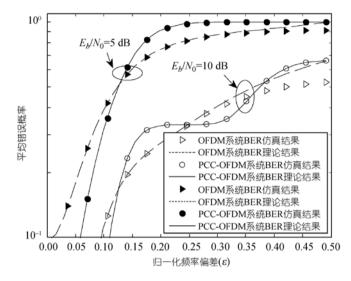


图 9 PCC-OFDM 系统中 8-PSK 符号 SER 与 ε 的性能比较图(L=1, 2)

理论分析与仿真结果十分吻合. 既然 8-PSK 调制符号的 SER 和 BER 性能理论表达式在 $E_b/N_0 > 0$ dB 时的精确度会随归一化频偏 ε 增加而减小,为此,图 9 详细地给出了其与归一化频偏 ε 的性能比较图. 从图 9 中可以看出,对于 OFDM 系统,当 $\varepsilon > 0.3$ 和 $\varepsilon > 0.25$ 时,8-PSK 调制符号的 SER 和 BER 性能的仿真结果与理论分析结果出现了不匹配的现象,这验证了文中给出的 8-PSK 调制符号平均错误概率性能的理论表达式只是一个近似解,其精确度与归一化频偏有关. 不过,在此情形下对 SER 性能和 BER 性能的评估已几乎没有意义. 从图 9 也可以看到,对于 1/2 码率的 PCC-OFDM 系统,8-PSK 调制符号的 SER 和 BER 性能的仿真结果与理论分析结果却相当吻合. 事实上,对于特定的归一化频偏值 ε ,PCC-OFDM 系统对 CFO 的敏感度相对于 OFDM 系统已大大降低,因此其理论表达式也相应降低了对 CFO 的敏感度. 从图中亦可以看到,当 $\varepsilon > 0.12$ 左右时,PCC-OFDM 系统的 SER 和 BER 性能却劣于传统 OFDM 的系统性能. 造成此现象的原因是当 ε 较大时,在接收端采用线性合并会导致判决符号的误差传播,这会进一步降低系统性能. 总之,从图中可以看出,利用 Beaulieu 序列和 ICI 的特征函数可以精确评估 PCC-OFDM 系统中的平均错误概率性能.

最后, 尽管本文只研究了 BPSK, QPSK, 8-PSK 和 16-QAM 调制符号的平均错误概率性能, 其分析方法可以很容易地拓展到其他或更高维星座图的调制符号, 如 *M*-PAM (*M*-ary pulse amplitude modulation), *M*-PSK 以及 *M*-QAM.

7 结论

本文研究了 AWGN 信道中存在载波频偏时 PCC-OFDM 系统的性能,PCC-OFDM 由 Armstrong 和 Zhao 提出来用于抑制系统对 CFO 的敏感性. 对于系统码率为 1/L , $L \in \{2^n, n=0, ..., \log_2 N\}$, 反映期望信号功率损失的 CIR 和 ICI 功率理论表达式可以通过假设子载波数为无穷时的对精确表达式求极限获得. 分析与仿真结果显示,因此而产生的与实际系统的误差可以忽略. 利用 Beaulieu 序列和 ICI 的特征函数可以精确分析系统的平均错误概率性能 SER 和 BER. 文中仅考虑系统采用 Gray 映射时的 BPSK, QPSK, 8-PSK 和 16-QAM 调制符号,依此类

推很容易得到其他或高阶调制符号的性能分析结果. 对于其他码率的系统性能, 通过合理的假设可以得到 CIR 和 ICI 功率及平均错误概率性能近似表达式.

参 考 文 献

- 1 van Nee R, Prasad R. OFDM for Wireless Multimedia Communication. Boston, MA: Artech House, 2000
- 2 Armstrong J. Analysis of new and existing methods of reducing intercarrier interference due to carrier frequency offset in OFDM. IEEE Trans Commun, 1999, 47(3): 365—369 [DOI]
- 3 Seaton K A, Armstrong J. Polynomial cancellation coding and finite differences. IEEE Trans Inf Theory, 2000, 46(1): 311—313 [DOI]
- 4 Zhao Y, Haggman S G. Intercarrier interference self-cancellation scheme for OFDM mobile communication systems. IEEE Trans Commun, 2001, 49(7): 1185—1191 [DOI]
- 5 Moose P H. A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction. IEEE Trans Commun, 1994, 42(10): 2908—2914 [DOI]
- 6 Pollet T, van Bladel M, Moeneclaey M. BER sensitivity of OFDM systems to carrier frequency offset and Wiener phase noise. IEEE Trans Commun, 1995, 43(2/3/4): 191—193 [DOI]
- 7 Li Y, Cimini Jr L J. Bounds on the interchannel interference of OFDM in time-varying impairments. IEEE Trans Commun, 2001. 49(3): 401—404 [DOI]
- 8 Ng W T, Dubey V K. Analysis of PCC-OFDM systems for general time-varying channel. IEEE Commun Lett, 2005, 9(5): 394—396 [DOI]
- 9 Keller T, Hanzo L. Adaptive multicarrier modulation: A convenient framework for time-frequency processing in wireless communications. Proc IEEE, 2000, 88(5): 611—640 [DOI]
- 10 Zhao Y, Haggman S G. BER analysis of OFDM communication systems with intercarrier interference. In: Proc IEEE Int Conf Commun Technol (ICCT'98), Beijing, 1998, 2(S38-02): 1—5
- 11 Sathananthan K, Tellambura C. Probability of error calculation of OFDM systems with frequency offset. IEEE Trans Commun, 2001, 49(11): 1884—1888 [DOI]
- 12 Zhang H, Li Y. Optimum frequency-domain partial response encoding in OFDM system. IEEE Trans Commun, 2003, 51(7): 1064—1068 [DOI]
- 13 Gil-Pelaez J. Note on the inversion theorem. Biometrika, 1951, 38: 481—482
- Beaulieu N C. An infinite series for the computation of the complementary probability distribution function of a sum of independent random variables and its application to the sum of Rayleigh random variables. IEEE Trans Commun, 1990, 38(9): 1463—1474 [DOI]
- 15 Tellambura C, Annamalai A. Further results on the Beaulieu series. IEEE Trans Commun, 2000, 48(11): 1774—1777
- Beaulieu N C. The evaluation of error probabilities for intersymbol and cochannel interference. IEEE Trans Commun, 1991, 39(12): 1740—1749 [DOI]
- 17 Beaulieu N C, Abu-Dayya A A. Bandwidth efficient QPSK in cochannel interference and fading. IEEE Trans Commun, 1995, 43(9): 2464—2474 [DOI]
- 18 Zhou P, Zhao C, Yang Y, et al. Error probability of MPSK OFDM impaired by carrier frequency offset in AWGN channels. IEEE Commun Lett, 2006, 10(12): 801—803 [DOI]
- 19 Lu J, Letaief K B, Chuang J C-I, et al. M-PSK and M-QAM BER computation using signal-space concepts. IEEE Trans Commun, 1999, 47(2): 181—184 [DOI]
- 20 Cho K, Yoon D. On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations. IEEE Trans Commun, 2002, 50(7): 1074—1080 [DOI]

附录 A OFDM 系统中 $\sigma_T^2 = 1$ 的证明

对于子载波数为 N 的 OFDM 系统中存在 CFO 时,由(1)和(2)式可知,其接收信号的平均功率 $\sigma_{\rm T}^2$ 可以表示为

$$\sigma_{\rm T}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| I_n \right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin^2(\pi(n+\varepsilon))}{N^2 \sin^2(\pi(n+\varepsilon)/N)},\tag{A1}$$

其中, ε 为归一化的频率偏差. $\sigma_{\rm T}^2$ 是 N 个序列($\varphi_N^n, n=0,\cdots,N-1$)之和, 第 n 个序列为

$$\varphi_N^n = \frac{\sin^2(\pi(n+\varepsilon))}{N^2 \sin^2(\pi(n+\varepsilon)/N)}.$$
 (A2)

当系统子载波数为 2N 时, 平均功率中的第 n 项和 N+n 的和表示为

$$\varphi_{2N}^{n} + \varphi_{2N}^{N+n} = \frac{\sin^{2}(\pi(n+\varepsilon))}{4N^{2}\sin^{2}(\pi(n+\varepsilon)/(2N))} + \frac{\sin^{2}(\pi(N+n+\varepsilon))}{4N^{2}\sin^{2}(\pi(N+n+\varepsilon)/(2N))}$$
$$= \frac{\sin^{2}(\pi\varepsilon)}{N^{2}\sin^{2}(\pi(n+\varepsilon)/N)}.$$
(A3)

由(A2)和(A3)式可知, $\varphi_{2N}^n + \varphi_{2N}^{N+n} = \varphi_N^n$,即接收信号的功率 σ_T^2 与子载波数无关,因此, σ_T^2 可以由下式得到:

$$\sigma_{\rm T}^2 = \sum_{n=0}^1 \frac{\sin^2(\pi(n+\varepsilon))}{4\sin^2(\pi(n+\varepsilon)/2)} = 1, \ N > 2.$$
 (A4)

同样, 易得下面 2 式:

$$\sum_{n=0,2,\dots}^{N-1} \frac{\sin^2(\pi(n+\varepsilon))}{N^2 \sin^2(\pi(n+\varepsilon)/N)} = \frac{1+\cos(\pi\varepsilon)}{2},$$
(A5)

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} \frac{\sin^2(\pi(n+\varepsilon))}{N^2 \sin^2(\pi(n+\varepsilon)/N)} = \frac{1-\cos(\pi\varepsilon)}{2}.$$
 (A6)

附录 B 公式(10)中 $f(\varepsilon)=0$ 的证明

为简化证明 $f(\varepsilon)=0$, 仅考虑下式:

$$\Psi = \sum_{n=0,2,\dots}^{N-1} \frac{1}{\sin(\pi(n-1+\varepsilon)/N)\sin(\pi(n+1+\varepsilon)/N)}
= \sum_{n=0,2,\dots}^{N} \rho_{n-1}\rho_{n+1},$$
(B1)

其中, $\rho_n = 1/\sin(\pi(n+\varepsilon)/N)$. 对于 OFDM 系统或 PCC-OFDM 系统,子载波数 N 通常为 2 的整数次幂,因此,上式可以表示为

$$\Psi = \rho_{-1}\rho_{1} + \rho_{1}\rho_{3} + \dots + \rho_{N-5}\rho_{N-3} + \rho_{N-3}\rho_{N-1}
= 2\cos(2\pi/N)(\rho_{-1}\rho_{3} + \dots + \rho_{N-5}\rho_{N-1})
= 2^{\frac{N}{4}} \prod_{k=1}^{N/4} \cos(2k\pi/N)(\rho_{-1}\rho_{N-1})
= 0.$$
(B2)