

编织几何结构的群论分析

冯伟^① 马文锁^{①②*}

(^① 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; ^② 焦作大学机电系, 焦作 454002. * 联系人, E-mail: mawensuo@jzu.cn)

摘要 将材料编织体中连续的纱线离散并用特殊的点符号表达, 用点群和空间群分析现有编织材料几何结构. 一方面可以合理有效地对现有编织材料几何结构进行描述和分类, 另一方面也可将该理论用于导出编织材料几何结构新的和更为有效的编织方法, 为优化材料性能提供理论依据.

关键词 编织几何结构 点符号 平面群 空间群 对称群分析

在纺织材料的研究领域, 几何结构的研究是其性能研究的重要基础. 不同的应用领域有不同的研究目的. 现有的纺织几何结构的性能差异为科技人员所共知. 二维纺织几何结构品种繁多, 研究历史悠久^[1-3]. 由于目前的三维纺织几何结构多数由经验归纳所得, 因而材料品种少, 研究范围受到限制^[4,5]. 几何结构及综合性能的研究在复合材料出现后显得尤为重要. 正确合理的几何结构模型有利于材料的力学分析. 纵观纺织几何结构的研究历史, 三维整体编织的研究局限于四步法^[4-8]、二步法^[9,10]编织等少数几种类型. 尽管确信还有结构更多、性能更好的编织几何结构^[7], 但缺乏系统的理论支持. 新的编织方法的研究多数仍是在偶然性的基础上展开的.

在长期的复合材料的研究过程中, 作者发现编织几何结构与晶体几何结构有极为相似的对称性. 本文用几何结构对称群将编织体中连续的纱线离散, 并用特殊的点符号表达, 将点群和空间群用于分析现有编织几何结构. 进而把所有可能的编织材料几何结构进行分类, 用于导出编织材料几何结构新的和更为有效的编织方法, 为优化材料性能打下基础.

二维周期性编织几何结构图案可以用平面群加以描述, 三维编织几何结构也可以找到其相应的空间群. 为描述方便, 这里将对应于编织几何结构的对称群定义为编织对称群. 对应于平面二维编织几何结构的对称群称作编织平面群, 对应空间三维编织几何结构的称为编织空间群.

1 对应于二维编织几何结构的平面群

1.1 点符号

编织体中连续的纱线经过离散成为不同空间位置的纱线段, 在编织体中每种纱线段用特殊的点表

达, 这种特殊的点定义为点符号.

处于编织平面的纱线段用点符号 $\bigcirc$ 表示. 将处于编织平面上方的平行纱线段用 $\bigcirc^+$ 表示, 而处于编织面下方的纱线段用 $\bigcirc^-$ 表示. 穿越编织平面的纱线段用 $\bigodot$ 表示, 指向编织平面的法线的正向一侧. 简化表示时, 点符号放置在纱线的轴线投影上.

点符号组合时必须满足纱线连续的原则, 其集合所反映的图案经过平面群的对称操作, 最终组合图案为一合理平面编织几何结构. 建立点符号的组合原则是群分析过程的重要组成部分. 作为生成编织几何结构的最基本单元——基本对称单元的构建, 可以通过编制程序, 最终实现可视化目标.

1.2 基本对称单元

将平面编织几何结构的图案中通过平移、滑移和螺旋旋转等对称操作而覆盖整体编织平面的图案作为一个单元, 称为基本对称单元. 在平面二维编织几何结构中, 由于编织工艺的限制, 纱线在编织平面内的投影为直线, 使得构成的编织图案具有规则几何的特征, 只可能有几种图案(如图1所示), 而不会有其他不规则拓扑几何图案单元. 基本对称单元可以是代表一根纱线段的一个点符号, 也可以是由离散纱线段点符号集合代表的平面图案.

1.3 编织平面点阵

将周期性二维编织图案中基本对称单元用一个点表达, 所有周期性图案就可以用规则的平面点的阵列简化, 称为二维编织几何结构平面点阵. 与晶体对称群的平面点阵相同, 二维编织几何结构也对应5个平面点阵, 即斜交点阵(2)、简单矩形点阵(2mm)、c心矩形点阵(2mm)、正方点阵(4mm)和六角点阵(6mm), 见图1所示. 括号内表示对应的点阵点群.

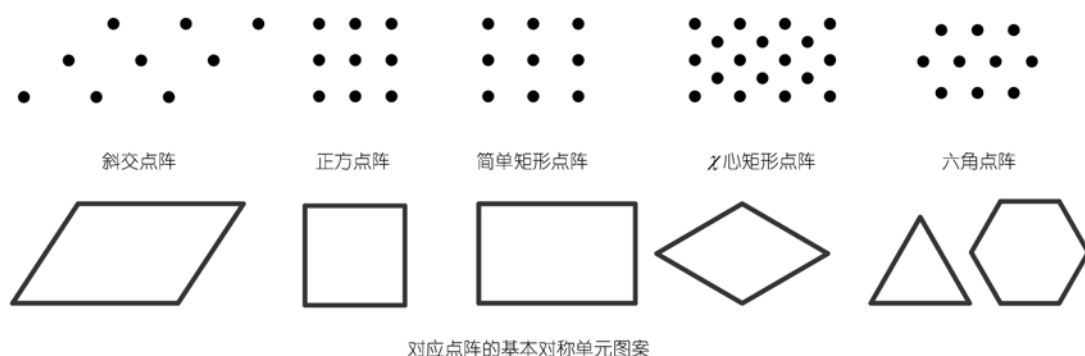


图 1 对应二维编织几何结构的平面点阵及对应基本对称单元图案

1.4 编织平面群

平面的对称单元图案围绕一点的对称操作的集合构成平面点群。适用于平面编织几何结构的点群称作编织平面点群。用 Hermann-Mauguin 符号表示为 1, 2, 3, 4, 6, m , $2mm$, $3m$, $4mm$ 和 $6mm$, 共有 10 个。依次把每一个点群和与之相协调的每一个平面编织点阵组合, 就可得到所有的编织平面群。

在推导编织平面群的过程中, 点对称操作、平移对称操作及其组合操作是构成编织平面群的群元素。用平面群描述的编织几何结构概括了所有的平面编织结构形式。也就是说, 所有的二维编织几何结构都可以用编织平面群加以描述。

基本对称单元放入编织平面点阵, 使得其在对称操作过程中, 不仅满足点群的对称性, 同时满足编织平面群的对称性。

以构成平面群 $P4$ 的对称操作为例介绍关于平面点操作与平面点阵平移操作的组合过程。

图 2 所示的为一个基矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的正方形单胞, 过阵点 A 有 4 次轴, 对应图 3(a) 和 3(b) 的几何中心。与它相联系的操作是 1, $A_{\pi/2}$, A_{π} , $A_{3\pi/2}$ (分别表示以 A 点为原点的不动、转动 90° , 180° 和 -90°)。任意操作都可以分解为点操作(纯旋转或非纯旋转操作) W 和平移操作 w 两部分, 用 Seitz 符号表示为 (W, w) 或推广矩阵 W (这里略)。不同的组合操作可以推导如下:

$A_{\pi/2}$ 与平移 $\mathbf{a}$ 组合用 $(A_{\pi/2}, \mathbf{a})$ 表达: 由图可知在点阵中 $(A_{\pi/2}, \mathbf{a})$ 与 $C_{\pi/2}$ 是等价的, 即 $(A_{\pi/2}, \mathbf{a}) = C_{\pi/2}$ 。同理可得: $(A_{\pi}, \mathbf{a}) = B_{\pi}$, $(A_{\pi}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = C_{\pi}$, $(A_{-\pi/2}, \mathbf{b}) = C_{-\pi/2}$, $(A_{-\pi/2}, \mathbf{b}) = D_{\pi}$ 。上述式子中绕 C 轴的 3 个旋转操作 $C_{\pi/2}$, C_{π} 和 $C_{3\pi/2}$ 的存在表明过 C 点有 4 次轴, 而 B 和 D 点则是 2 次轴。四次轴与正方点

阵的组合结果得到了新的对称元素, 见图 2(b), 产生了新的对称元素, 且两支 4 次轴不等价。其所有对称操作和恒等操作 E 的集合构成编织平面群 $P4$, 本文称作编织平面群, 用同一种符号表示。

按上述对称操作的组合过程, 可以由编织平面群 $P4$ 推导出对应的编织几何结构。图 3 表示由平面群 $P4$ 推导二维平面编织几何结构的过程:

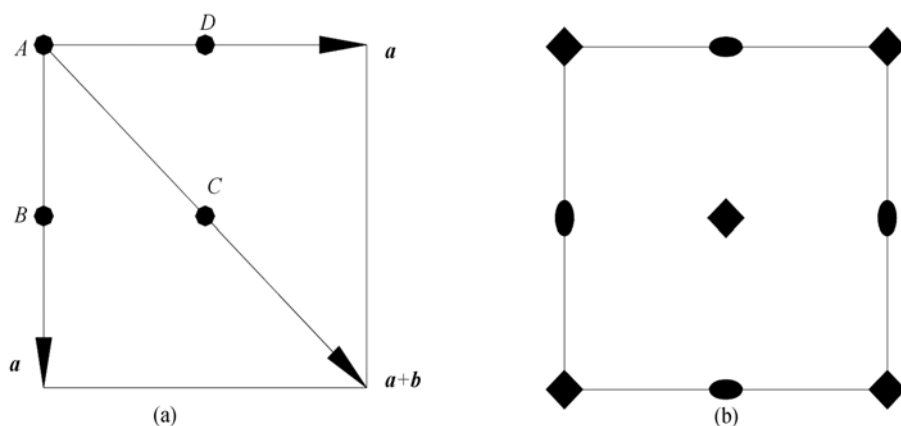
(i) 将单根倾斜纱线段作为无对称单元, 并用点符号 $\odot$ 表示, 箭头指向纸面外(图 3(b))。通过点群 4 (C_4) 的所有对称操作 ($1, 4^1, 4^2 = 2, 4^3 = 4^{-1}$), 得到的等效平面图案(如图 3(a))作为基本对称单元(也称作初基单胞)。

(ii) 将单胞用点符号组合简化表达(图 3(b))。该图案的中心作为正方点阵的一个阵点(图 3(b)中心的黑点)。

(iii) 将对称单元放入正方点阵, 作图 2 所示的组合操作。平面正方点阵(图 3(c), 阵点为图中黑点)满足点阵点群 4 (C_4) 的所有对称性操作, 即正方点阵满足所有平面对称操作 $1, 4^1, 4^2 = 2, 4^3 = 4^{-1}$, 平面点群 4 的对称操作与平移对称操作组合。即以正方形单胞的边长为平移矢量 ($\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$), 单胞在编织平面内以矢量 $\mathbf{t}_i = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b}$ (n_1, n_2 为整数) 平移即可布满整个编织平面。从而得到菱形编织织物几何结构(图 3(d))。

依次把每一个平面点群和与它相协调的平面点阵组合起来, 即让该点阵的阵点代表的编织图案单元具有该点群的对称性, 或具有把点群的镜线换成滑移线之后的对称性, 就可得到所有平面群。排除不可行编织图案对应的点群, 得到可以表达所有二维编织几何结构的编织平面群。

在含有 3, 4 和 6 次旋转轴的编织平面群中,

图2 4次轴与正方点阵平移对称操作的组合^[11]

(a) 对称操作组合推导, (b) 点阵的对称元素

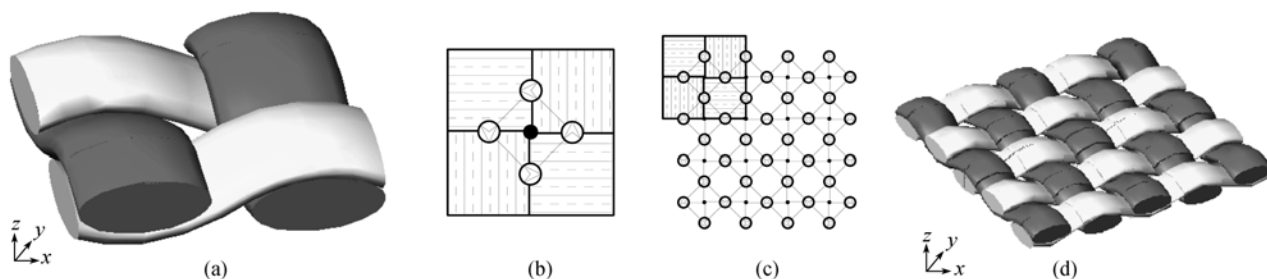


图3 平面群推导二维编织几何结构

(a) 对应点群4正方形单胞, (b) 纱线段点符号组合, (c) 平面点群与平面点阵组合, (d) 平面编织织物

$P4mm$, $P4gm$, $P3m1$, $P31m$ 和 $P6mm$ 中存在单纯镜面反射对称元素, 有图4所示不可实现的畸形图案, 因而不对应实际的二维编织几何结构. 有效的平面群共有12种.



图4 平面群推导二维编织几何结构过程中存在畸形图案

2 对应于三维编织几何结构的编织空间群

为了直观地把三维编织几何结构与空间点群相对应, 将在三维空间处于同一根纱线或相互平行的纱线段用同一种点符号表达(在编制程序时表示为三维空间坐标的矢量). 在图形表达时, 不同方向的纱线段可用不同颜色的纱线段区分, 本文用三维空间图形描述. 以惯用单胞的角点或几何中心作为点阵的阵点, 就可与三维 Braivais 点阵建立对应关系, 找

出对应空间点群与平移群的组合结果, 得到描述空间编织几何结构的编织空间群.

用编织空间群可以概括可能的空间编织几何结构. 针对三维编织复合材料几何结构, 绝大多数可以认为是周期性的, 而对不对称编织特殊情况可以用对称性低的空间群将其编织几何结构涵盖. 另外这里并不强调空间群与编织几何结构一一对应, 而是一多对应关系. 即一种空间群可以对应几种类似的空间几何结构, 关键在于如何选择无对称单元和基本对称单元. 这种单元可以是小到单根纱线段, 大到较大数量的纱线段的组合, 只是必需严格满足点符号组合原则及空间群满足的对称性要求.

不考虑纱线段在空间中方向不同的影响, 描述三维编织几何结构理论上也应该对应230种空间群. 但在用空间群推导三维编织几何结构的过程中, 由于纱线交织几何结构的一些特殊性, 使得对应编织几何结构的编织空间群不会达到230种.

这种特殊性体现在用空间群构造三维编织体时, 参与编织的纱线轴线必须为一条直线(实际编织体中

纱线可能是周期性波浪状,但推导过程不受此影响),决定了纱线段不能够任意放置,对称操作的结果不能构成类似图 4 所示的畸形图案.由编织空间群形成的三维空间任意两根纱线轴线不应相交一点,但可重合或平行.

第二,用空间群推导三维编织几何结构不能违背最终纱线连续的原则.

在晶体学中,共有 32 种空间点群^[12].32 种空间点群按是否含有纯镜面反射群元素分为两类.不含有该群元素的为一类,含有 m 的为一类.前一种类型的空间点群有: $C_1(1)$, $C_2(2)$, $C_3(3)$, $C_4(4)$, $C_6(6)$, $S_2(\bar{1})$, $S_4(\bar{4})$, $S_6(\bar{3})$, $D_2(222)$, $D_3(32)$, $D_4(422)$, $D_6(622)$, $T(23)$ 和 $O(432)$ 共 14 种,其余 18 种为第二种.

空间点群的对称操作与平移对称操作($t = m(n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c})/N$, n_1, n_2 和 n_3 为整数; N 为螺旋轴轴次; m 为沿螺旋轴平移次数; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为以单胞边长的基矢量)组合形成空间群(不含纯镜面反射群元素的空间点群一定对应应有编织空间群.单向增强纱线集合体和层合板中纱线的轴线也是直线,这里视为三维编织的特殊方式).后一种则不一定.

需要指出,在与 18 种含有镜面反射对称操作空间点群同态的空间群中,由于存在复合操作(即螺旋旋转、滑移反射),对应空间群具有可对应编织几何结构的可能性,其中规律有待进一步加以研究.

以三维四步法编织体为例,由空间点阵、点群到对应空间群推导三维编织几何结构.四步法编织的单胞在理想情况下可取为立方体,这时不考虑编织载荷及实际工艺过程的特殊要求.从单纯考察其几何结构的角度出发,不会对编织材料的性能分析造成影响.

在立方点阵中,无论是取初基单胞或者惯用单胞都为立方体,而立方体与正八面体有相同的对称操作.对称元素(点、线和面)包括对称轴(线)2,3 和 4 次 3 种.即对应棱边中点连线的 6 支 2 次轴,对应相对表面的中心连线的 4 支 3 次轴;对应相对顶点的对角线的 3 支 4 次轴,如图 5 所示.不考虑几何结构中对称操作的特殊性时,对应八面体群 432(O),群的阶为 24.群元素有 $1c_1(E)$, $3c_2(c_{2x}, c_{2y}, c_{2z})$, $6c_2(c_{2xy}, c_{2\bar{xy}}, c_{2xz}, c_{2\bar{xz}}, c_{2yz}, c_{2\bar{yz}})$, $8c_3(c_{3xyz}, c_{3\bar{xyz}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}}, c_{3\bar{xy}\bar{z}})$, $6c_4(c_{4x}, c_{4\bar{x}}, c_{4y}, c_{4\bar{y}}, c_{4z}, c_{4\bar{z}})$. $c_{n\bar{xy}}$ 表示处于

xy 平面第二象限过坐标原点角平分线为 n 次轴的一个对称操作,上标“-1”表示顺时针方向旋转.

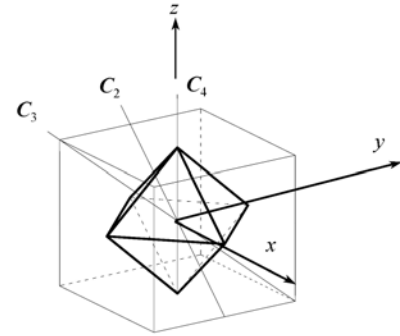


图 5 点群 432 对称元素空间布置
 C_2, C_3 和 C_4 分别为 2, 3 和 4 轴的一个位置

过立方体某一棱边中点,放置平行于体对角线且长度为体对角线长的一段纱线(与 xy 坐标面夹角 $35^\circ 15' 52''$).以该段纱线为被操作客体,分别以群 432(O)的群元素作对称操作,形成空间等效图案(图 6(a)),它由 12 根不同空间位置的纱线段组成;图 6(b)为等效空间图案在 6 支 2 次旋转轴向的投影;图 6(c)为图案在 4 支 3 次旋转轴向投影,图 6(d)为图案在 3 支 4 次旋转轴向投影,它们分别为相同的图案,具有完全相同的对称性.

建立三维坐标系 x, y 和 z , z 向为 4 次对称轴方向.建立轴线与原始立方体重合,边长为 2 倍的新立方体,正好包络所有纱线段.其边长分别平行于坐标轴,边长设为 H .在与平移群组合过程中,沿 3 支 4 次轴方向存在 4₃ 次螺旋轴.对应平移群可以表示为

$$\Gamma = \{t | t = \frac{3}{4}(n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}), n_1, n_2 \text{ 和 } n_3 \text{ 为整数}, ||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}|| = ||\mathbf{c}|| = H\},$$

空间群为 $P4_332$, 用 Schoenflies 符号表示为 O^6 .对应的三维编织几何结构图 6(e)所示.

按照上述相同的过程,可由满足要求的编织空间群推导对应的三维编织几何结构.

3 结论

用点群和空间群描述编织材料,可以导出可能的编织几何结构,并对其进行合理有效地分类,使得其类型不再局限于工艺上区分.编织空间群为编织体几何结构的推导提供了理论依据,为开发更多更为合理的编织物提供了系统有效的数学方法,可以大大丰富三维编织材料的品种,优化编织材料性能.

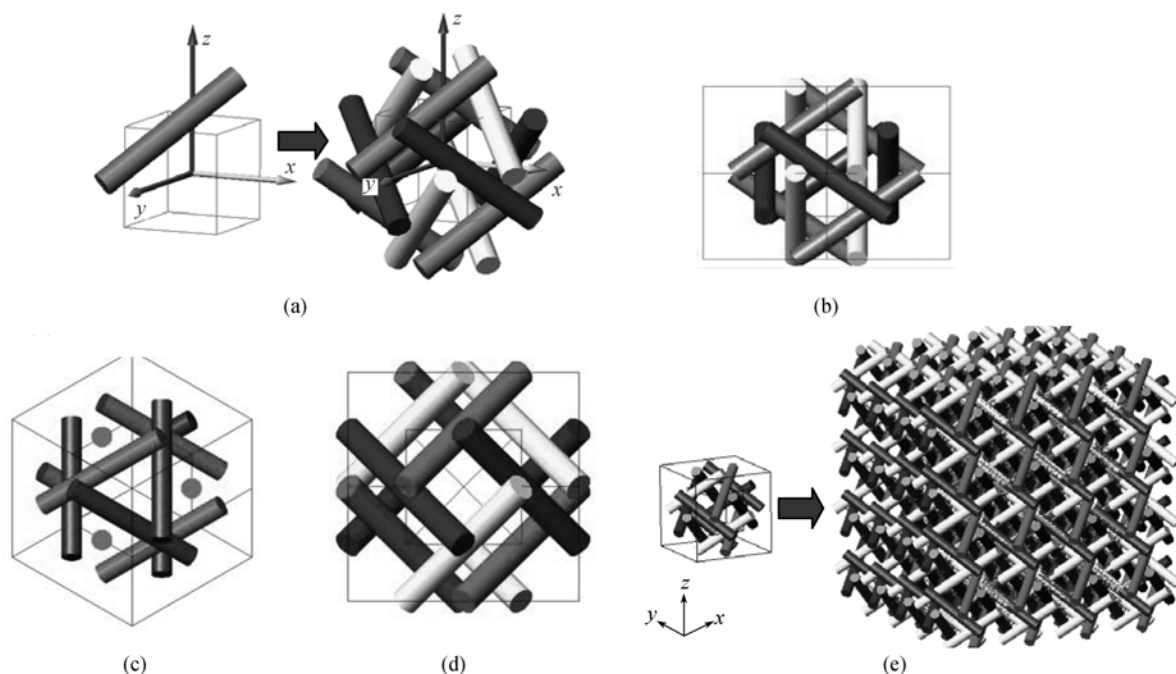


图6 用空间群 $P4_332$ 推导三维四步法编织几何结构

(a) 倾斜纱线段为不对称单元及空间点群 432 的对应空间等效图案, (b) 图案在 6 支 2 次旋转轴向的投影, (c) 图案在 4 支 3 次旋转轴向投影, (d) 图案在 3 支 4 次旋转轴向投影, (e) 对应空间群 $P4_332$ 的空间编织几何结构

要研制成更多具有优异物理和力学综合性能的新编织复合材料, 人们尚需付出更多的辛勤劳动。

参 考 文 献

- 1 Srirangan K, Whitcomb J, Chapman C. Modal technique for three-dimensional global/local stress analysis of plain weave composites. *Composites Structures*, 1997, 39: 145~156[DOI]
- 2 Zeman J, Sejnoha M. Homogenization of balanced plain weave composites with imperfect microstructure: Part I. Theoretical formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41: 6549~6571[DOI]
- 3 Ever J B, Thomas M D, Jonathan T, et al. Micromechanics of fabric reinforced composites with periodic microstructure. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 2489~2504[DOI]
- 4 Yang J M, Ma C L, Chou T W. Fiber inclination model of three dimensional textile structural composites. *J Compos Mater*, 1986, 20: 472~483
- 5 Li W, Hammad M, El-Shiekn A. Structural analysis of 3-D braided preforms for composites, part one: The four-step preforms. *J Text Inst*, 1990, 81: 491~514
- 6 Wu D L. Three-cell model and 5D braided structural composites. *Composites Science and Technology*, 1996, 56: 225~233[DOI]
- 7 Mouritz A P, Bannister M K, Falzon P J, et al. Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites. *Composites: Part A*, 1999, 30: 1445~1461[DOI]
- 8 Chen L, Tao X M, Choy C L. On the microstructure of three-dimensional braided preforms. *Composites Science and Technology*, 1999, 59: 391~404[DOI]
- 9 Byun J H, Whitney T J, Du G W, et al. Analytical characterization of two-step braided composites. *Journal of Composite Materials*, 1991, 25: 1599~1618
- 10 李嘉禄, 孙颖. 二步法型三维编织复合材料的细构. *复合材料学报*, 2002, 19(4): 69~75
- 11 王仁卉, 郭可信. 晶体学中的对称群. 北京: 科学出版社, 1990. 36~38
- 12 Loeb E M. Group Theory and its Applications. London: Academic Press Inc Ltd, 1968. 285~312

(2005-03-18 收稿, 2005-06-17 收修改稿)