

具有随机生存域的随机场

陈典发

(南开大学数学系, 天津 300071)

摘 要

本文研究具有随机开参数集的随机场构造, 获得了具有已知有穷维分布的随机场存在和唯一性条件.

关键词: 随机场, 随机开(凸)集, 协容度-测度

一、引 言

设 T 为任一集合, $(S, \mathcal{B})$ 为适当的可测空间, $\mathbb{M} = \{m_{t_1, \dots, t_n}(B): t_i \in T, i = 1, \dots, n, n \geq 1\}$ 为一族一致有限维测度族, 其中 $m_{t_1, \dots, t_n}(B)$ 为 $\mathcal{B}^n$ 上的 σ 有穷测度, 那么存在唯一(分布意义下)随机过程 $\{X_t\}_{t \in T}$, 以 $\mathbb{M}$ 为其有穷维分布族:

$$P((X_{t_1} \cdots X_{t_n}) \in B) = m_{t_1, \dots, t_n}(B).$$

现允许参数集是随机的, 即考虑形如 $\{X_t(\omega): t \in T(\omega)\}$ 的随机过程, 这里 $T(\omega)$ 是 T 的子集, 它依赖于样本点 ω . 类似地定义其有限维分布:

$$m_{t_1, \dots, t_n}(B) = P\{\omega: t_i \in T(\omega), i = 1, \dots, n, (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B\}.$$

一个很基本的问题是, 对已知的一族有穷维测度 $\mathbb{M} = \{m_{t_1, \dots, t_n}(B): t_i \in T, i = 1, \dots, n; n \geq 1\}$ 和 T 上的一个随机集 $T(\omega)$, 在什么条件下, 存在一个以 $T(\omega)$ 为参数集、 $\mathbb{M}$ 为有穷维分布的随机过程? 何时此过程唯一? 通常情况下, $\mathbb{M}$ 的一致性要求不再是充分的. 实际上此时过程的分布与 $T(\omega)$ 有密切关系. 在 $T = R^1$, $T(\omega)$ 为开区间时, 对于 Markov 过程, Kuznetsov^[1] (也可参看文献 [2—4]) 以转移函数及流入律给出了 $\mathbb{M}$ 应满足的条件, 即对已知 Markov 转移函数 $p(t, x, \Gamma)$ 及相应的一过份 (excessive) 测度, 存在唯一一生灭时间过程 (以随机开区间为参数集的过程), 它以 $P(t, x, \Gamma)$ 为转移函数, 此过份测度为一维分布. 对一般 (不必 Markov) 随机开区间上的过程, Dynkin^[5] 和 K. Y. Hu^[6] 获得了存在性条件, 最近, Dynkin 和 Fitzsimmons^[7] 又将此结果推广到 $T = R^d (d \geq 1)$, $T(\omega)$ 为 R^d 中凸开集情形, 他们的讨论本质上是基于文献 [6] 中关于双测度描述的结果, 即从 $\mathbb{M}$ 构造出文献 [6] 中的双测度族, 这种途径的优点是适应面宽, 因文献 [6] 中 $T(\omega)$ 可以非常一般. 不足之处正如上述文中那样, 在构造双测度族时, 唯一性问题变得模糊了. 本文假定 T 为局部紧可分的 Hausdorff 拓扑空间, $T(\omega)$ 为 T 上的随机开集, 从一族已知的有穷维测度构造 $T(\omega)$ 为参

数集(或生存域)的标准过程(场). 为了使一些有兴趣的集合成为事件, 考虑样本空间上更为精细的 σ 代数, 因而对通常的有限维分布概念予以适当拓广, 它在凸(或开区间)情形重合于原来的. 这里我们没有采取文献[6]的途径, 而是考虑样本空间上一个较文献[6]中小的半环, 这样获得了存在唯一性条件, 特别对 $T = R^d$, 当考虑分布支撑集是凸开域轨道集的过程时, 重新得到了文献[7]中条件, 证明了这些条件不仅保证了存在性而且保证了唯一性, 从而加强了那里的结论.

为了叙述方便, 本文引进了一个附加点 Δ , 但这没有本质上的影响. 由于篇幅的限制我们仅对有限维分布均为有限测度加以讨论, 推广到一般 σ 有限情形(此时第三节的条件 c_2)应改同文献[7])方法基本上是标准的.

二、随机生存在开集上的随机场

本节里, T 是一个具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示 T 的开和紧集类, $\mathcal{F}(T)$ 为 T 的非空有限集类. 以下不加说明时 G, K, F (或带上、下标)将分别表示此三类中集合. $\forall t \in T, (S_t, \mathcal{B}_t)$ 为标准可测空间, $\Delta \in S_t$.

对 $A \subset T$, 置

$$\begin{aligned} S_A &= \prod_{t \in A} S_t, & \mathcal{B}_A &= \prod_{t \in A} \mathcal{B}_t, \\ S'_A &= \prod_{t \in A} (S_t \cup \{\Delta\}), & \Delta_A &= \Delta^A = \prod_{t \in A} \Delta, \\ X &= \{(G, x): G \in \mathcal{G}, x \in S'_T, x_G \in S_G, x_{T \setminus G} \in \{\Delta_{T \setminus G}\}\}, \end{aligned}$$

其中 x_A 为 x 在 S'_A 上的自然投影.

设 $F \in \mathcal{F}(T)$, 定义映射 $\phi_F: X \rightarrow \mathcal{G} \times S'_F$, 使 $\phi_F((G, x)) = (G, x_F)$.

以 $\mathcal{A}$ 表示由形如 $\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_K \times \Gamma)$ 的集在 X 上产生的 σ 代数, 其中 $F \in \mathcal{F}(T)$, $\Gamma \in \mathcal{B}_F$, $K \in \mathcal{K}$, 而 $\mathcal{G}_K = \{G \in \mathcal{G}: G \supset K\}$.

定义 1. $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ 有穷测度 P 称为生存域是随机开集的随机场.

以下简称为随机生存场.

为书写方便, 对一集类 $\mathcal{B}$ 上的集函数 μ , 它在 B 处的值记为 $\mu(B)$, 而用 $\mu(\partial B)$ 表示它视为 $\mathcal{B}$ 上的函数, 当其为测度时仍用 $\mu(db)$.

定义 2. 设 $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}(T)$ 为 T 的一子集类, 对有限并运算封闭. 设对每一 $F \in \mathcal{F}(T)$, 有 $\mathcal{H} \times \mathcal{B}_F$ 上的双集函数 $\mu_F(\partial H, \partial \Gamma)$, 称 $\{\mu_F(\partial H, \partial \Gamma): F \in \mathcal{F}(T)\}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的有穷维规范协容度-测度族, 如果:

- i) $\forall F \in \mathcal{F}(T), H \in \mathcal{H}, \Gamma \in \mathcal{B}_F, \mu_F(H, \Gamma) = \mu_F(H \cup F, \Gamma)$;
- ii) $H \supset F' \Rightarrow \mu_F(H, \Gamma) = \mu_{F \cup F'}(H, \Gamma \times S_{F' \setminus F})$, 这里及以下约定 $\Gamma \times S_\emptyset = \Gamma$.
- iii) $\forall H \in \mathcal{H}, \mu_F(H, \partial \Gamma)$ 是 $\mathcal{B}_F$ 上的测度; $\forall \Gamma \in \mathcal{B}_F, \mu_F(\partial H, \Gamma)$ 在 $\mathcal{H}$ 上单减且当 $H_n \downarrow H$ 时, $\mu_F(H_n, \Gamma) \uparrow \mu_F(H, \Gamma)$;
- iv) $\forall n \geq 0, F \in \mathcal{F}(T), \Gamma \in \mathcal{B}_F, H_i \in \mathcal{H}, i = 0, 1, \dots, n$,

$$\eta^{(F, T)}(H_0; H_1, \dots, H_n) \triangleq \mu_F(H_0, \Gamma) - \sum_{i=1}^n \mu_F(H_0 \cup H_i, \Gamma)$$

$$+ \sum_{i_1 < i_2} \mu_F(H_0 \cup H_{i_1} \cup H_{i_2}, \Gamma) + \cdots + (-1)^n \mu_F(H_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n, \Gamma) \geq 0.$$

约定: $\infty - \infty = 0$.

定理 1. 设对每一 $F \in \mathcal{F}(T)$, $\mu_F(\partial K, \partial \Gamma)$ 为 $\mathcal{X} \times \mathcal{B}_F$ 上的实值集函数, 则存在随机生存场 P 使

$$P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_K \times \Gamma)) = \mu_F(K, \Gamma), P(\{(\phi, \Delta_T)\}) = 0$$

的充要条件是 $\{\mu_F: F \in \mathcal{F}(T)\}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的有穷维规范协容度测度族. 此外满足上式的 P 是唯一的.

证. 必要性显然. 充分性将分散于下述引理 1 至引理 7 的证明中.

对 $A_i \subset T$, $i = 0, 1, \cdots, n, n \geq 0$, 记

$$\mathcal{G}_{A_0, \cdots, A_n} = \begin{cases} \{G \in \mathcal{G}: G \supset A_0, G \not\supset A_i, i = 1, \cdots, n\}, & n \geq 1 \\ \{G \in \mathcal{G}: G \supset A_0\} & n = 0, \end{cases}$$

对 $\mathcal{X}_{A_0, \cdots, A_n}$ 亦有类似的意义. 此外记

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{G} = \{K \cup G: K \in \mathcal{X}, G \in \mathcal{G}\}.$$

引理 1. 定义 $\forall F \in \mathcal{F}(T)$, $\mathcal{C}_F = \{\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0, \cdots, A_n} \times \Gamma): n \geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}_F, A_i \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{G}, i = 0, 1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(T)} \mathcal{C}_F \cup \{(\phi, \Delta_T)\},$$

则 $\mathcal{C}$ 为 X 上的半环, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, 此外 X 可以表为 $\mathcal{C}$ 中集合的可列并.

证明显然.

引理 2. 设 ν 为 $\mathcal{X}$ 上的非负单减实函数, 且: i) $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{X}$, $\nu(K_1 \cup K_2) + \nu(K_1 \cap K_2) \geq \nu(K_1) + \nu(K_2)$, ii) $\forall K, K_n \in \mathcal{X}$, $K_n \downarrow K \Rightarrow \nu(K_n) \rightarrow \nu(K)$; 那么由下面 (2) 式定义的函数 ν' 满足条件: $\forall A, A_n \subset T$, $A_n \uparrow A \Rightarrow \nu'(A_n) \downarrow \nu'(A)$. 这里

$$\nu'(G) \triangleq \inf\{\nu(K): K \subset G, K \in \mathcal{X}\}, \quad (1)$$

$$\nu'(A) \triangleq \sup\{\nu'(K): A \subset G \in \mathcal{G}\}. \quad (2)$$

证. 易见在 $\mathcal{G}$ 上, 当 $G_n \uparrow G$ 时有 $\nu'(G_n) \downarrow \nu'(G)$, 利用文献 [8] 命题 1-4-3 可证 ν' 在 $\mathcal{X}$ 上重合于 ν . 于是对 $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $\nu'(G_1 \cup G_2) + \nu'(G_1 \cap G_2) \geq \nu'(G_1) + \nu'(G_2)$, 从而对 $A_1, A_2 \subset T$,

$$\nu'(A_1 \cup A_2) + \nu'(A_1 \cap A_2) \geq \nu'(A_1) + \nu'(A_2). \quad (3)$$

现设 $A, A_n \subset T$, $A_n \uparrow A$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $G_1 \in \mathcal{G}$. 使 $G_1 \supset A_1$, $\nu'(A_1) - \nu'(G_1) < \varepsilon/2$; 再取 $G_2 \in \mathcal{G}$ 且 $G_2 \supset A_2 \cup G_1$, $\nu'(A_2 \cup G_1) - \nu'(G_2) < \varepsilon/4$; 一般归纳地选取 $G_n \in \mathcal{G}$ 使 $G_n \supset A_n \cup G_{n-1}$, $\nu'(A_n \cup G_{n-1}) - \nu'(G_n) < \varepsilon/2^n$, 由 (3) 式

$$0 \geq \nu'(G_{n+1}) - \nu'(A_{n+1}) \geq \nu'(G_n) - \nu'(A_n) - \varepsilon/2^{n+1}, \quad \forall n \geq 1,$$

从而得到 $0 \leq \nu'(A_n) - \nu'(G_n) < \sum_{k=1}^n \varepsilon/2^k < \varepsilon$, 故

$$\lim_n \nu'(A_n) \leq \lim_n \nu'(G_n) + \varepsilon = \nu'\left(\bigcup_{n \geq 1} G_n\right) + \varepsilon,$$

再由 $\bigcup G_n \supset A$ 即知 $\nu'(A_n) \uparrow \nu'(A)$.

现设 $\{\mu_F(\partial K, \partial \Gamma): F \in \mathcal{F}(T)\}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的规范协容度测度族. 对每一 F 和 $\Gamma \in \mathcal{B}_F$,

定义

$$\mu'_F(G, \Gamma) = \inf\{\mu_F(K, \Gamma): K \subset G, K \in \mathcal{K}\}, \quad (4)$$

其中 $G \in \mathcal{G}_F$;

$$\mu'_F(A, \Gamma) = \sup\{\mu'_F(G, \Gamma): F \cup A \subset G \in \mathcal{G}\}, A \subset T; \quad (5)$$

由定义 2 条件 ii), 类似文献 [8] 定理 1-4-1 的方法, 易知 μ'_F 对任意 Γ 都与 μ_F 在 $\mathcal{K}$ 上重合, 因此下面就将 μ'_F 简单地写成 μ_F .

引理 3. 对 $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}$, $\{\mu_F(\partial A, \partial \Gamma): F \in \mathcal{F}(T)\}$ 满足定义 2 中 i), ii), iv) 及 iii) 的前一结论.

证. i), ii) 由定义 (5) 即知. iv) 由引理 2 及已证的 i) 推出. 下证 iii) 的前一结论. 设 $G \in \mathcal{G}_F$, 取相对紧开集列 $\{G_n\}$ 使 $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$, $G_n \uparrow G$, 易见对 $\forall \Gamma \in \mathcal{B}_F$, $\mu_F(G, \Gamma) = \lim_n \mu_F(G_n, \Gamma)$, $\mu_F(\bar{G}_1, S_F) < +\infty$ 及控制收敛定理保证了 $\mu_F(G, \partial \Gamma)$ 是可列可加的, 因此 $\mu_F(G, \partial \Gamma)$ 是 $\mathcal{B}_F$ 上的测度. 一般地对 $A \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}$, $A \supset F$, 取相对紧开集列 $\{G_n\}$ 使 $G_n \supset \bar{G}_{n+1}$, $G_n \downarrow K$ (设 $G \cup K = A$), 那么 $\forall \Gamma \in \mathcal{B}_F$, $\mu_F(A, \Gamma) = \lim_n \mu_F(G_n \cup G, \Gamma)$, 由单调收敛定理知 $\mu_F(A, \partial \Gamma)$ 为 $\mathcal{B}_F$ 上的测度, 再由 $\mu_F(A, \Gamma) = \mu_F(A \cup F, \Gamma)$ 得 iii) 前一结论.

引理 4. 设 $F, F' \in \mathcal{F}(T)$, $\Gamma \in \mathcal{B}_F$, $\Gamma' \in \mathcal{B}_{F'}$, $A_i, A'_i \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$, 且

$$\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n} \times \Gamma) = \phi_{F'}^{-1}(\mathcal{G}_{A'_0}^{A'_1, \dots, A'_m} \times \Gamma'), \quad (6)$$

则

$$\eta^{(F, \Gamma)}(A_0; A_1, \dots, A_n) = \eta^{(F', \Gamma')}(A'_0; A'_1, \dots, A'_m). \quad (7)$$

证. 不失一般性, 设 $A_0 \supset F$, $A'_0 \supset F'$.

注意到 $\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n} \times \Gamma) = \phi$ 当且仅当 $\Gamma = \phi$, 或存在 $i \geq 1$ 使 $A_i \subset A_0$, 因此若 $\Gamma, \Gamma', \mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n}$ 及 $\mathcal{G}_{A'_0}^{A'_1, \dots, A'_m}$, 其中有一个为 $\emptyset$ 时, (7) 式两端均为零, 以下可设它们均非空. 由 (6) 式

$$\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n, \Gamma'} \times \Gamma) = \phi,$$

因此 $F' \subset A_0$; 类似可得 $F \subset A'_0$. 仍从 (6) 式

$$\phi_{F \cup F'}^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n} \times (\Gamma \times S_{F' \setminus F})) = \phi_{F \cup F'}^{-1}(\mathcal{G}_{A'_0}^{A'_1, \dots, A'_m} \times (\Gamma' \times S_{F \setminus F'}))$$

所以

$$\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n} = \mathcal{G}_{A'_0}^{A'_1, \dots, A'_m}, \quad \Gamma \times S_{F' \setminus F} = F' \times S_{F \setminus F'}. \quad (8)$$

由 (8) 式及引理 3 i) 得证引理 4.

在 $\mathcal{C}$ 上定义函数 P :

$$P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1, \dots, A_n} \times \Gamma)) = \eta^{(F, A)}(A_0; A_1, \dots, A_n),$$

$$P(\{\phi, \Delta_T\}) = 0.$$

引理 5. P 为 $\mathcal{C}$ 上的有限可加测度.

证. 只需证明二元可加性.

设

$$\phi_{F_1}^{-1}(\mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma) = \phi_{F_1}^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} \times \Gamma_1) + \phi_{F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} \times \Gamma_2),$$

其中 $A_0 \supset F_1$, $C_1 \supset F$, $B_0 \supset F_2$, “+” 表示不交并且上式右方二集上空. 于是易知 $F \subset A_0 \cup B_0$, 从而有 $C_0 = A_0 \subset B_0$ 或 $C_0 = B_0 \subset A_0$, 假设是前一情形, 由不相交性

$$\mathcal{G}_{A_0 \cup B_0}^{A_1 \cdots A_n, B_1 \cdots B_m} = \mathcal{Q} \quad (9)$$

或

$$(\Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1}) \cap (\Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) = \mathcal{Q}. \quad (10)$$

由 (9), (10) 式得

$$\Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1} = \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2} = \Gamma \times S_{(F_1 \cup F_2) \setminus F}, \quad (11)$$

$$\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} = \mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} = \mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l}. \quad (12)$$

从 (10), (12) 式得

$$\begin{aligned} & P(\phi_{F_1}^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} \times \Gamma_1)) + P(\phi_{F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} \times \Gamma_2)) \\ &= P(\phi_{F_1 \cup F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1})) \\ & \quad + P(\phi_{F_1 \cup F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2})) \\ &= \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0, \Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1}) - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_K, \Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1}) \\ & \quad + \sum_{K_1 < K_2} \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_{K_1} \cup C_{K_2}, \Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1}) + \cdots \\ & \quad + (-1)^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1}) \\ & \quad + \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_K, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) \\ & \quad + \sum_{K_1 < K_2} \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_{K_1} \cup C_{K_2}, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) + \cdots \\ & \quad + (-1)^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup \mathcal{X}_1 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) \\ &= \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0, \Gamma \times S_{(F_1 \cup F_2) \setminus F}) - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_K, \Gamma \times S_{(F_1 \cup F_2) \setminus F}) + \cdots \\ & \quad + (-1)^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma \times S_{(F_1 \cup F_2) \setminus F}) \\ &= \mu_F(C_0, \Gamma) - \sum_{K=1}^l \mu_F(C_0 \cup C_K, \Gamma) + \sum_{K_1 < K_2} \mu_F(C_0 \cup C_{K_1} \cup C_{K_2}, \Gamma) + \cdots \\ & \quad + (-1)^l \mu_F(C_0 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma) = P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma)), \end{aligned}$$

这里最后两个等式用到 $\Gamma_1 \times S_{(F \cup F_2) \setminus F_1} \cup \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2} = \Gamma \times S_{(F_1 \cup F_2) \setminus F}$ 和 μ 满足定义 2 条件 ii), 前者可直接由 (10) 式推出, 后者由此时 $A_0 = B_0 = C_0 \supset F \cup F_1 \cup F_2$ 知.

由 (9) 和 (11) 式, 设 $A_{i_0} \subset B_0$, 那么

$$\begin{aligned} & P(\phi_{F_1}^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} \times \Gamma_1)) + P(\phi_{F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} \times \Gamma_2)) \\ &= P(\phi_{F_1 \cup F}^{-1}(\mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l, A_{i_0}} \times \Gamma_1 \times S_{(F \setminus F_2) \setminus F_1})) \\ & \quad + P(\phi_{F_1 \cup F_2}^{-1}(\mathcal{G}_{C_0 \cup A_{i_0}}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2})) \\ &= \mu_{F \cup F_1}(C_0, \Gamma_1 \times S_{F \setminus F_1}) - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1}(C_0 \cup C_K, \Gamma_1 \times S_{F \setminus F_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_{F \cup F_1}(C_0 \cup A_{i_0}, \Gamma_1 \times S_{F \setminus F_1}) + \cdots \\
& + (-1)^{l+1} \mu_{F \cup F_1}(C_0 \cup \cdots \cup C_l \cup A_{i_0}, \Gamma_1 \times S_{F \setminus F_1}) \\
& + \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup A_{i_0}, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) \\
& - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup A_{i_0} \cup C_K, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) + \cdots \\
& + (-1)^l \mu_{F \cup F_1 \cup F_2}(C_0 \cup A_{i_0} \cup C_1 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma_2 \times S_{(F \cup F_1) \setminus F_2}) \\
& = \mu_{F \cup F_1}(C_0, \Gamma \times S_{F \setminus F}) - \sum_{K=1}^l \mu_{F \cup F_1}(C_0 \cup C_K, \Gamma \times S_{F \setminus F}) + \cdots \\
& + (-1)^l \mu_{F \cup F_1}(C_0 \cup C_1, \cdots \cup C_l, \Gamma \times S_{F \setminus F}) \\
& = \mu_F(C_0, \Gamma) - \sum_{K=1}^l \mu_F(C_0 \cup C_K, \Gamma) + \cdots \\
& + (-1)^l \mu_F(C_0 \cup \cdots \cup C_l, \Gamma) \\
& = P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{A_0}^{C_1 \cdots C_l} \times \Gamma)),
\end{aligned}$$

其中用到 $\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} = \mathcal{G}_{A_0}^{C_1 \cdots C_l, A_{i_0}}$, $\mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} = \mathcal{G}_{C_0 \cup A_{i_0}}^{C_1 \cdots C_l}$ 这由 (9) 式和 $\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} \cup \mathcal{G}_{B_0}^{B_1 \cdots B_m} = \mathcal{G}_{C_0}^{C_1 \cdots C_l}$

知. 引理 5 证毕.

引理 6. 设 $F \in \mathcal{F}(T)$, $\Gamma \in \mathcal{B}_F$, 则 $P(\phi_F^{-1}(\partial A \times \Gamma))$ 是半环 $\{\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n}; A_i \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}, i = 0, \cdots, n, n \geq 0\}$ 上的测度.

证. 熟知^[8], 在 $\mathcal{G}$ 上引入以形如 $\mathcal{G}_K^G$ 的集为子基的拓扑后, 它成为具有可数基的紧 Hausdorff 空间. 对任意 $n \geq 0$, $K_i \in \mathcal{K}_F$, $G_i \in \mathcal{G}$, $i \leq n$, 取紧集列 $K_i^m \uparrow G_i$, 取相对紧开集列 $G_0^m \downarrow K_0$ 且 $G_0^m \supset \bar{G}_0^{m+1}$, 那么 $\mathcal{G}_{G_0 \cup G_0^m}^{K_1 \cup K_1^m, \cdots, K_n \cup K_n^m} \uparrow \mathcal{G}_{K_0 \cup G_0}^{K_1 \cup G_1, \cdots, K_n \cup G_n}$, 又由 μ_F 的单减性

$$\begin{aligned}
& \lim_m \mu_F(K_i \cup K_i^m \cup G_0 \cup G_0^m, \Gamma) \\
& \leq \mu_F(K_i \cup K_i^m \cup G_0 \cup K_0, \Gamma) \\
& \lim_m \mu_F(G_0 \cup G_0^m, \Gamma) \leq \mu_F(G_0 \cup K_0, \Gamma).
\end{aligned}$$

由 (5) 式得

$$\lim_m \mu_F(K_i \cup K_i^m \cup G_0 \cup G_0^m, \Gamma) = \mu_F(K_0 \cup K_i \cup G_0 \cup G_i, \Gamma), \quad (13)$$

$$\lim_m \mu_F(G_0 \cup G_0^m, \Gamma) = \mu_F(K_0 \cup G_0, \Gamma), \quad (14)$$

再从 $\mu_F(A, \Gamma) = \mu_F(A \cup F, \Gamma)$ 知 (13), (14) 式对任 $K_i \in \mathcal{K}$ 成立.

因此

$$\lim_m P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{G_0 \cup G_0^m}^{K_1 \cup K_1^m, \cdots, K_n \cup K_n^m} \times \Gamma)) = P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_{K_0 \cup G_0}^{K_1 \cup G_1, \cdots, K_n \cup G_n} \times \Gamma)).$$

现从形如 $\mathcal{G}_K^G$ 的集合在 $\mathcal{G}$ 中的紧性及引理 5 得证引理 6.

引理 7. P 可以唯一扩张成 $\mathcal{A}$ 上的 σ 有限测度.

证. 令

$$\mathcal{C}_F^1 = \left\{ \phi_F^{-1} \left(\mathcal{G}_{A_0}^{A_1 \cdots A_n} \times \prod_{i \in F} \Gamma_i \right); n \geq 0, A_i \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}, i = 0, 1, \cdots, n, \Gamma_i \in \mathcal{B}_i \right\},$$

$$\mathcal{C}^1 = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(T)} \mathcal{C}_F^1 \cup \{(\phi, \Delta_T)\}.$$

显然 $\mathcal{C}^1$ 仍为 X 上半环, X 可表示为 $\mathcal{C}^1$ 中可列集之并, 且 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}^1)$, 故只需证明 P 在 $\mathcal{C}^1$ 上的可列可加性. 设 $R(\mathcal{C}^1)$ 表示 $\mathcal{C}^1$ 产生的环, 我们来证明 P 在 $R(\mathcal{C}^1)$ 的下连续性.

$$\text{设 } X_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} X_{nk} \downarrow \phi \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$X_{nk} \cap X_{ni} = \phi \quad i \neq k,$$

其中

$$X_{nk} = \phi_{F_{nk}}^{-1} \left(\mathcal{G}_{A_0^{(n,k)}}^{A_1^{(n,k)} \dots A_{l_{nk}}^{(n,k)}} \times \prod_{t \in F_{nk}} \Gamma_t^{(n,k)} \right).$$

假定存在 $\varepsilon > 0$ 使对 $n \geq 1$, $P(X_n) \geq \varepsilon$. 为方便记 $\mathcal{G}(n, k) = \mathcal{G}_{A_0^{(n,k)}}^{A_1^{(n,k)} \dots A_{l_{nk}}^{(n,k)}}$, $\Gamma(n, k) = \prod_{t \in F_{nk}} \Gamma_t^{(n,k)}$, 又设

1°) $\forall n \geq 1, i \leq m_n, j \leq m_{n+1}$, 或 $X_{ni} \supset X_{n+1j}$ 或 $X_{ni} \cap X_{n+1j} = \phi$, 当 $X_{ni} \supset X_{n+1j}$ 时 $F_{ni} \subset F_{n+1j}$.

2°) $F_{nk} \subset A_0^{(n,k)} \subset A_1^{(n,k)}$, $n \geq 1, k \leq m_n, 1 \leq l_{nk}$.

由 X_n 的单调性易知, 当 $X_{ni} \supset X_{n+1j}$ 时

$$\{A_k^{(n,i)}: k = 1, \dots, l_{ni}\} \subset \{A_k^{(n+1,j)}: k = 1, \dots, l_{n+1,j}\}, \quad (15)$$

$$A_0^{(n,i)} \subset A_0^{(n+1,j)}, \quad (16)$$

$$\forall t \in F_{ni}, \Gamma_t^{(n,i)} \supset \Gamma_t^{(n+1,j)}. \quad (17)$$

设 $A_i^{(n,i)} = K_i^{(n,i)} \cup G_i^{(n,i)}$, 对每一 $n \geq 1, i \leq m_n, 1 \leq l_{ni}$ 和 $t \in F_{ni}$, 由引理 6 及 μ_F 的有限性, 取相对紧开集 $G_i^{(n,i)} \supset K_i^{(n,i)}$, 紧集 $K_{(n,i,j)} \subset G_i^{(n,i)}$ 及 $C_i^{(n,i)} \subset \Gamma_t^{(n,i)}$ (假设 S_t 均为完备可分距离空间) 使

$$\sum_{i=1}^{m_n} P(\phi_{ni}^{-1}(\mathcal{G}(n, i) \times \Gamma(n, i))) < \sum_{i=1}^{m_n} P(\phi_{ni}^{-1}(\mathcal{G}'(n, i) \times C(n, i))) + \varepsilon,$$

其中

$$\mathcal{G}'(n, i) = \mathcal{G}_{G_0^{(n,i)}}^{K_1^{(n,i)} \cup K(n, i, 1) \dots K_{l_{ni}}^{(n,i)} \cup K(n, i, l_{ni})},$$

$$C(n, i) = \prod_{t \in F_{ni}} C_t^{(n,i)}.$$

记

$$Y_{ni} = \phi_{ni}^{-1}(\mathcal{G}'(n, i) \times C(n, i)) \quad n \geq 1, i \leq m_n$$

那么当 $X_{ni} \supset X_{n+1j}$ 时 $Y_{ni} \supset Y_{n+1j}$, 且适当选择 $G_i^{(n,i)} K_{(n,i,j)}$ 及 $C_i^{(n,i)}$ 可使 Y_{ni} 仍具有性质 1°) 和 2°). 置

$$Y_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} Y_{ni}$$

则 $Y_n \downarrow \phi$, $P(Y_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

考虑上述 Y_{ni} 构成的阵列:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1m_1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nm_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (18)$$

从其中每一行取一个元素 $Y_{n\tau_n}$ 使 $Y_{n\tau_n} \supset Y_{n+1, \tau_{n+1}}$, 直至存在 $n_0 \geq 1$, 对任意 $i \leq m_{n_0+1}$, $Y_{n_0, \tau_{n_0}} \supset Y_{n_0+1, i}$, 否则一直取下去, 这样得出一个 (有穷或无穷) 集列 $\{Y_{n, \tau_n}; n \geq 1\}$, 其对应的下标序列 $\tau \triangleq \{\tau_n, n \geq 1\}$ 称为陈列 (18) 的一个分枝, 分枝全体记为 π .

设 $\tau \in \pi$ 为一无穷分枝, $\{Y_{n, \tau_n}, n \geq 1\}$ 是相应序列, 那么对任意 $n \geq 1$, $Y_{n, \tau_n} \supset Y_{n+1, \tau_{n+1}} \neq \phi$, 由于

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_{n, \tau_n} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_{E_{n, \tau_n}}^{-1} (\mathcal{G}'(n, i) \times C(n, i)) \\ &= \phi_i^{-1} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{i_{n\tau_n}} \mathcal{G}_{G_0^{(n, \tau_n)} \cup G_0^{(n, \tau_n)'}}^{K_i^{(n, \tau_n)} \cup K(n, \tau_n, i)} \times \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i \in I_{n, \tau_n}} C_i^{(n, \tau_n)} \times S_{A \setminus F_{n, \tau_n}} \right) \right), \end{aligned}$$

这里 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n, \tau_n}$, 有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{i_{n\tau_n}} \mathcal{G}_{G_0^{(n, \tau_n)} \cup G_0^{(n, \tau_n)'}}^{K_i^{(n, \tau_n)} \cup K(n, \tau_n, i)} = \phi \quad (19)$$

或

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i \in I_{n, \tau_n}} C_i^{(n, \tau_n)} \times S_{A \setminus F_{n, \tau_n}} \right) = \phi, \quad (20)$$

但因 $\mathcal{G}_G^K$ 和 $C_i^{(n, \tau_n)}$ 紧, 故存在正整数 $N \geq 1$, 使 $Y_{N\tau_N} = \phi$ 与 τ 为无穷分枝矛盾. 因此 π 中序列均为有穷的, 以 $|\tau|$ 表 τ 的维数, 令

$$M = \sup\{|\tau|: \tau \in \pi\},$$

若 $M = +\infty$, 则 π 中存在一列分枝 $\{\tau^n\}_{n \geq 1}$ 使 $|\tau^n| \rightarrow +\infty$, 于是 $\{Y_{\tau^n, \tau^n}: n \geq 1\}$ 是 (18) 式中元的无穷集合, 由 Y_{ni} 的性质, 可以选择自然数序列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$, $s_n \leq m_n$, 使 $\{Y_{n, s_n}\}_{n \geq 1}$ 具有性质: $\forall n \geq 1$, $\{Y_{\tau^n, \tau^n}: n \geq 1\}$ 中的无穷多个集合是 Y_{n, s_n} 的子集, 而且 $Y_{n, s_n} \supset Y_{n+1, s_{n+1}}$, 即 $\tau^\circ = \{s_n: n \geq 1\}$ 是 π 的一个无穷分枝, 这是不可能的, 故 $M < +\infty$.

由分枝的定义, 对 $i \leq m_M$,

$$Y_M Y_{M+1} = \bigcup_{i,j} Y_{Mi} Y_{M+1, j} = \phi,$$

因此 $Y_{M+1} = \phi$, 于是当 $n \geq M+1$ 时, $P(Y_n) = 0$ 又矛盾于 $P(Y_n) \geq \varepsilon/2$, 所以应是 $P(X_n) \downarrow 0$.

唯一性是显然的, 引理 7 证毕, 从而完成了定理 1 的证明.

三、具有随机凸生存域的随机场

本节里 T 为 $d \geq 1$ 维欧氏空间, $\mathcal{D}$ 表示 T 的凸开集全体. 对 $A \subset T$, cl_A 表示 A 的闭凸包, 其余记号同上节. 令

$$X_1 = \{(D, x) \in X, D \in \mathcal{D}\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \sigma_1(\{\phi_t^{-1}(\mathcal{D}_t \times \Gamma): t \in T, \Gamma \in \mathcal{B}_t\} \cup \{(\phi, \Delta T)\}).$$

其中 $\phi_t = \phi_{(t)}$, $\mathcal{D}_t = \{D \in \mathcal{D}, D \ni t\}$, $\sigma_1(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 在 X_1 上产生的 σ 代数.

定义 3. 称 $(X_1, \mathcal{A}_1)$ 上的 σ 有穷测度为随机凸生存域上的随机场. 简称凸生存场.

以下 $m_F(ds)$ 表示 $\mathcal{B}_F$ 上的测度.

定理 2. 设 $\{m_F(ds): F \in \mathcal{F}(T)\}$ 为一族有穷测度, 则存在唯一凸生存随机场 P 使对 $F \in \mathcal{F}(T)$, $\Gamma \in \mathcal{B}_F$,

$$P(\phi_F^{-1}(\mathcal{D}_F \times \Gamma)) = m_F(\Gamma), P(\{(\phi, \Delta T)\}) = 0$$

的充要条件是:

$$c_1) \quad \forall F \subset F_1 \subset F_2, \Gamma \in \mathcal{B}_F, \text{cl}_F = \text{cl}_{F_1} \Rightarrow m_{F_1}(\Gamma \times S_{F_2 \setminus F}) = m_{F_2}(\Gamma \times S_{F_2 \setminus F}).$$

$$c_2) \quad \forall F \in \mathcal{F}(T), t \in T, \text{若 } t_n \rightarrow t \text{ 且 } \forall n \geq 1, \text{cl}(F \cup \{t_n\}) \subsetneq \text{cl}(F \cup \{t\}) \Rightarrow m_{F \cup \{t_n\}} \times (\Gamma \times S_{t_n \setminus F}) = m_{F \cup \{t\}}(\Gamma \times S_{t \setminus F}).$$

$$c_3) \quad \forall n \geq 0, F_i \in \mathcal{F}(T), i = 0, 1, \dots, n, \Gamma \in \mathcal{B}_F,$$

$$\begin{aligned} \eta^{(F, \Gamma)}(F_0, F_1, \dots, F_n) &\triangleq m_{F \cup F_0}(\Gamma \times S_{F \setminus F}) - \sum_{i=1}^n m_{F \cup F_0 \cup F_i}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_i) \setminus F}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j} m_{F \cup F_0 \cup F_{i1} \cup F_{i2}}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_{i1} \cup F_{i2}) \setminus F}) + \dots \\ &+ (-1)^n m_{F \cup F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_n) \setminus F}) \geq 0. \end{aligned}$$

证. 必要性之证类似于文献 [5], 这里只证明充分性.

先从 $\{m_F, F \in \mathcal{F}(T)\}$ 构造有限维规范协容度测度族如下:

$\forall F \in \mathcal{F}(T), \Gamma \in \mathcal{B}_F, G \in \mathcal{G}$, 令

$$\mu_F(G, \Gamma) = \inf\{m_{F \cup F'}(\Gamma \times S_{F' \setminus F}): F' \subset G\}, \quad (22)$$

$\forall A \subset T$, 令

$$\mu_F(A, \Gamma) = \sup\{\mu_F(G, \Gamma): A \cup F \subset G \in \mathcal{G}\}. \quad (23)$$

我们来证明 (23) 式定义的 $\{\mu_F\}$, 限制 $A \in \mathcal{H} = \mathcal{K}$ 时, 满足定义 2 的所有条件, 而且 $\mu_F(F, \Gamma) = m(\Gamma)$, 对 $F \in \mathcal{F}(T)$ 和 $\Gamma \in \mathcal{B}_F$.

i), ii) 由定义即知. 现以 $\mathcal{Q}$ 表示 T 中有理点集, $\mathcal{Q}_n$ 为 $\mathcal{Q}$ 的有限子集且 $\mathcal{Q}_n \uparrow \mathcal{Q}$. 对 $F, F' \in \mathcal{F}(T), T \in \mathcal{B}_F, G \in \mathcal{G}_F$ 有

$$\mu_F(F', \Gamma) = m_{F \cup F'}(\Gamma \times S_{F' \setminus F}), \quad (24)$$

$$\mu_F(G, \Gamma) = \lim_n \mu_F(G \mathcal{Q}_n, \Gamma). \quad (25)$$

事实上, 对 $F \subset F_0 = \{t_1, \dots, t_N\}$, 由 (22), (23) 式,

$$\mu_F(F_0, \Gamma) \leq m_{F_0}(\Gamma \times S_{F_0 \setminus F})$$

用 $O_n(t_i)$ 表以 t_i 为中心, 对角线长为 $\frac{1}{n}$ 的 d 维开立方体, F_{ni} 表 $O_n(t_i)$ 的顶点集, $F_n =$

$$\bigcup_{i=1}^N F_{ni}, \quad G_n = \bigcup_{i=1}^N O_n(t_i). \quad \text{显然, } \forall \Gamma \in \mathcal{B}_F$$

$$\mu_F(F_0, \Gamma) = \lim_n \mu_F(G_n, \Gamma).$$

若 $F' \subset G_n$, 由 $\text{cl}(F \cup F' \cup F_n) = \text{cl} F_n$ 及 $c_1), c_3)$,

$$\begin{aligned} m_{F \cup F'}(\Gamma \times S_{F' \setminus F}) &\geq m_{F \cup F' \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F' \cup F_n) \setminus F}) \\ &= m_{F \cup F_n}(\Gamma \times S_{F_n \setminus F}), \end{aligned}$$

于是

$$\mu_F(G_n, \Gamma) \geq m_{F \cup F_n}(\Gamma \times S_{F_n \setminus F}) \geq m_{F_0 \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_n) \setminus F}),$$

从而

$$\mu_F(F_0, \Gamma) \geq \lim_n m_{F_0 \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_n) \setminus F}). \quad (26)$$

设 $t_i^n \in F_n$ 使 $t_i^n \rightarrow t_i$, 由 $c_2)$ 及

$$\begin{aligned} m_{F_0 \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_n) \setminus F}) &\geq m_{F_0 \cup \{t_i^n\}}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup \{t_i^n\}) \setminus F}) \\ &\quad + m_{(F_0 \cup F_n) \setminus \{t_i^n\}}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_n) \setminus \{t_i^n\} \setminus F}) - m_{F_0}(\Gamma \times S_{F_0 \setminus F}) \end{aligned}$$

利用归纳法可得

$$\lim_n m_{F_0 \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F_0 \cup F_n) \setminus F}) \geq m_{F_0}(\Gamma \times S_{F_0 \setminus F}), \quad (27)$$

结合 (26) 式得

$$\mu_F(F_0, \Gamma) \geq m_{F_0}(\Gamma \times S_{F_0 \setminus F}),$$

故 $\mu_F(F_0, \Gamma) = m_{F_0}(\Gamma \times S_{F_0 \setminus F})$, 此即 (24) 式.

任取 $G \in \mathcal{G}_{F \cup F'}$, 对 $t \in F \cup F'$, 取顶点为有理点的 d 维立方体 $O_n(t) \downarrow t$, 令 $G_n =$

$$\bigcup_{t \in F \cup F'} O_n(t), \quad F_n \text{ 为 } G_n \text{ 的顶点集, 那么对 } n \geq 1,$$

$$m_{F \cup F'}(\Gamma \times S_{F' \setminus F}) \geq m_{F \cup F' \cup F_n}(\Gamma \times S_{(F' \cup F_n) \setminus F}) = m_{F \cup F_n}(\Gamma \times S_{F_n \setminus F}),$$

于是

$$\begin{aligned} m_{F \cup F'}(\Gamma \times S_{F' \setminus F}) &\geq \lim_n m_{F \cup F_n}(\Gamma \times S_{F_n \setminus F}) \\ &= \lim_n \mu_F(F_n, \Gamma) \geq \lim_n \mu_F(GQ_n, \Gamma) \end{aligned}$$

因而

$$\mu_F(G, \Gamma) \geq \lim_n \mu_F(GQ_n, \Gamma),$$

连同显然的相反不等式得证 (25) 式.

现证明 $\{\mu_F\}$ 满足 iii), iv).

设 $K, K_n \in \mathcal{K}_F$, $K_n \downarrow K$, 对每一 n , 取相对紧开集列 $G_n^n \downarrow K_n$, $G_n^n \supset \bar{G}_n^{n+1}$, 令 $G_n = G_n^n$, 那么 $G_n \downarrow K$, 对 $\Gamma \in \mathcal{B}_F$ 有 $\mu_F(K, \Gamma) = \lim_n \mu_F(G_n, \Gamma) \leq \lim_n \mu_F(K_n, \Gamma) \leq \mu_F(K, \Gamma)$,

由此得出

$$\lim_n \mu_F(K_n, \Gamma) = \mu_F(K, \Gamma).$$

由 (24), (25) 式及 m_F 的有穷性, $\mu_F(G, \partial \Gamma)$ 从而 $\mu_F(K, \partial \Gamma)$ 为 $\mathcal{B}_F$ 上的测度, 这证明了 iii). 最后由

$$\eta^{(F, \Gamma)}(G_0; G_1, \dots, G_n) = \lim_m \eta^{(F, \Gamma)}(G_0 Q_m; G_1 Q_m, \dots, G_n Q_m)$$

和

$$\eta^{(F, \Gamma)}(K_0; K_1, \dots, K_n) = \lim_m \eta^{(F, \Gamma)}(G_0^m; G_1^m \dots G_n^m)$$

以及 c_3) 得证 iv). 此处 $G_i^m \downarrow K_i$ 且 $G_i^m \supset \bar{G}_i^{m+1} \in \mathcal{K}$, $i = 0, \dots, n$.

现由定理 1, 在 $(X, \mathcal{A})$ 上存在唯一 σ 有穷测度 P 使

$$P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_K \times \Gamma)) = \mu_F(K, \Gamma),$$

$$P(\{(\phi, \Delta \Gamma)\}) = 0,$$

特别当 $K = F$ 时, 由 (24) 式

$$P(\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_F \times \Gamma)) = \mu_F(F, \Gamma) = m_F(\Gamma). \quad (28)$$

以下 $\phi_{t_1, \dots, t_n}$, $\mathcal{G}_{t_1, \dots, t_n}$ 分别表示 $\phi_{(t_1, \dots, t_n)}$, $\mathcal{G}_{(t_1, \dots, t_n)}$, $\overline{t_1 t_2}$ 表示连接 t_1, t_2 的线段. 易见

$$X \setminus X_1 = \bigcup_{(r_1, r_2) \in Q'} \phi_{r_1, r_2}^{-1}(\mathcal{G}_{r_1, r_2} \times S_{r_1, r_2}). \quad (29)$$

任意固定 $(r_1, r_2) \in Q^2$, 取顶点为有理点的 d 维开立方体 $O_n(r_i)$, 使 $O_n(r_i) \downarrow r_i$, $i = 1, 2$.

$F_{n,i}$ 为 $O_n(r_i)$ 的顶点集, 那么 $\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2)) \downarrow \overline{r_1 r_2}$, 故

$$\begin{aligned} \mu_{r_1, r_2}(r_1 r_2, S_{r_1, r_2}) &= \lim_n \mu_{r_1, r_2}(\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2)), S_{r_1, r_2}) \\ &= \lim_n \mu_{r_1, r_2}([\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2))]^\circ, S_{r_1, r_2}) \\ &= \lim_n \lim_m \mu_{r_1, r_2}([\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2))]^\circ Q_m, S_{r_1, r_2}) \\ &\geq \lim_n \lim_m \mu_{r_1, r_2}([\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2))] Q_m, S_{r_1, r_2}), \end{aligned} \quad (30)$$

其中 A° 表 A 的内部. 对固定的 n , 当 m 充分大时, $\text{cl}[Q_m \cap \text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2))] = \text{cl}(F_{n1} \cup F_{n2} \cup \{r_1, r_2\})$, 因此由 c_2) 和 (24) 式,

$$\begin{aligned} \lim_m \mu_{r_1, r_2}([\text{cl}(O_n(r_1) \cup O_n(r_2))] Q_m, S_{r_1, r_2}) \\ = m_{F_{n1} \cup F_{n2} \cup \{r_1, r_2\}}(S_{F_{n1} \cup F_{n2} \cup \{r_1, r_2\}}). \end{aligned}$$

由 (29) 式得出

$$\mu_{r_1, r_2}(\overline{r_1 r_2}, S_{r_1, r_2}) \geq m_{r_1, r_2}(S_{r_1, r_2}).$$

相反不等式显然, 所以有

$$\mu_{r_1, r_2}(\overline{r_1 r_2}, S_{r_1, r_2}) = m_{r_1, r_2}(S_{r_1, r_2}). \quad (31)$$

最后从 (29) 式得

$$P(X \setminus X_1) = 0. \quad (32)$$

又因为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}_1(\{\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_F \times \Gamma) \cap X_1; F \in \mathcal{F}(T), \Gamma \in \mathcal{B}_F\} \cup \{(\phi, \Delta_i)\}) \\ &= \mathcal{A}_1(\{\phi_F^{-1}(\mathcal{G}_K \times \Gamma) \cap X_1; F \in \mathcal{F}(T), \Gamma \in \mathcal{B}_F\} \cup \{(\phi, \Delta_i)\}) \\ &= \mathcal{A} \cap X_1, \end{aligned}$$

将 P 限制在 $(X_1, \mathcal{A}_1)$ 上即得证定理 2.

注. m_F 为有穷的限制是不必要的,但其为无穷时不再具有明显的概率意义,此时的一种直观解释见文献[5]. 有穷情况下上述 $c_1)$ — $c_3)$ 恰好重合于文献[5](对 $d = 1$).

参 考 文 献

- [1] Kuznetsov, S. E., *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 18(1973), 3: 596—601.
- [2] Gettoor, R. K., *Ann. Proba.*, 16(1988), 2: 564—585.
- [3] Fitzsimmons, P. J. & Maisonneuve, B., *Proba. Theory Related Fields*, 72(1986), 319—336.
- [4] Gettoor, R. K. & Glover, J., *In Seminar on Stochastic Processes*, Birkhäuser Boston, 1987, 35—69.
- [5] Dynkin, E. B., *In Stochastic Analysis*, Academic, New York, 1978, 63—77.
- [6] Hu K. Y., *Ann. Proba.*, 16(1988), 222—230.
- [7] Dynkin, E. B. & Fitzsimmons, P. J., *Stochastic Processes on Random Domains*, Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités Statistiques, Vol.23, 1987, 379—396.
- [8] Matheron, G., *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley & Sons, 1975.