

构形理论及其应用的研究进展

陈林根*

海军工程大学船舶与动力学院, 武汉 430033

* E-mail: lingenchen@hotmail.com

收稿日期: 2011-08-16; 接受日期: 2011-11-10

国家自然科学基金(批准号: 51176203)和海军工程大学自然科学基金(批准号: HGDYDJJ10011)资助项目

摘要 回顾了构形理论的产生与发展过程, 指出事物结构源自于性能达到最优是其理论精髓。构形理论已发展成为研究自然界和工程界中各种形态组织和结构的一个新兴学科分支。从工程界中的热、机械、流体流动、电、磁、化学等学科, 到自然界中的生命系统和非生命系统等广泛的研究领域, 全面阐述了构形理论及其应用发展现状。

关键词
构形理论
广义热力学优化
“体-点”模型
传热传质
流体流动
运输工程

1 前言

20世纪70年代中期以来, 将传热学、热力学和流体力学相结合, 在有限尺寸和有限时间约束条件下, 以减少系统不可逆性为主要目标, 优化存在传热传质和流体流动不可逆性的实际热力学系统, 取得了大量研究成果, 形成了“热力学优化”这样一个新学科分支^[1], 在物理学领域被称为“有限时间热力学”^[2-8], 而在工程领域被称为“熵产生最小化”^[5, 6]。Bejan^[9-11]在热力学优化的研究基础上, 提出了应用构形理论设计传热系统的结构和外形改善传热性能的理论方法。构形理论的产生和发展, 为传热、特别是导热和对流问题的理论研究开辟了一个新的方向。

2 构形理论的产生和发展

构形理论创立者的思想来源于自然界中的各种系统和组织(包括生命和非生命系统)。仔细观察自然界中一些事物, 人们会对其各种外部形状和内部结

构留下深刻印象, 如树干和树冠、树的根系、叶的脉络、气管和支气管网络、脉管网络、神经网络、河流网络、街道网络、闪电等生命和非生命系统。各种自然组织结构是经过长时间演化而成, 由进化论的观点, 其结构应该是某种最优或接近最优的结构, 那么决定其达到该结构的根本原理是什么呢? 如果找到其规律, 无论是对于分析各类生命和非生命系统, 还是指导设计实际工程装置, 研究各种广义热力学过程均具有重大的意义。

1996年, 美国Duke大学的Bejan教授注意到城市街道纵横交错, 呈一定的规律性, 而且全球各大城市中这种网络状的街道都非常相似, 这是有某种深刻原因的。他分析城市发展过程中, 一般说来都有两种行进速度: 很慢的速度(如步行)和很快的速度(如马车或汽车速度), 而宽窄相济的街道正是兼顾了两种速度后经过长时间发展进化的产物, 它使得城市中的居民平均出行速度达到最优。

Bejan在对街道网络的形成和发展进行建模和数学分析后, 提出了构形理论^[9], 并将其首先应用于电

子元件冷却中高导热材料分布优化(体点问题)^[10]的研究, 提出了构形定律(constructal law): 该定律可表述为: “对于一个沿时间箭头方向(或为适应生存环境)进行结构演化的有限尺寸流动系统来讲, 为流过其内部的“流”提供越来越容易通过的路径是决定其结构形成的根本原因(For a finite-size flow system to persist in time (to live), its configuration must change in time such that it provides easier and easier access to its currents). ”或可更简单的表述为: 事物结构源自于性能达到最优。

所谓“流动系统”和“流”, 内涵广泛。前者包含自然界中各类生命体及其组织器官、非生命系统及子系统(如河流网络, 大气循环, 洋流、裂纹等)和工程界中各种过程和装置; 后者包含热流、流体流、电流、质量流、人和车辆流、货物流等; “性能最优”则包括热阻最小、熵产最小、流阻最小、泵功率最小、电阻最小、速度最快、运输费用最小、利润率最大等等不一而足。

构形理论一方面解释自然界和社会领域中流动结构生成的深刻原因, 另一方面则基于统一的物理原则(构形定律), 指导设计各学科领域中的流动结构, 被称为一种新的几何哲学^[65]。构形理论自提出以来蓬勃发展, 众多学者对构形理论表现出了浓厚的兴趣, 进行了大量的研究, 极大丰富了其内容。所涉及领域包括传热传质、流体流动、电、磁、交通运输、管道网络、风化干燥、经济决策、气候预测、地球物理问题, 经济运输, 产品平台设计, 动植物组织结构与生理学, 以及大学排名等社会动力学问题, 医疗问题, 安全与可持续性问题, 现代城市标度率, 步行动力学, 有机体的聚集, 流通市场动力学, 海岸沙滩形态, 等等。据不完全统计, 截止 2011 年 8 月, 已有 600 多篇相关文献发表, 包括专著和文集^[1, 11~20]、博士论文^[21~39](另有一些博士论文^[40~57]部分研究、应用这一理论)。对各不同时期的研究结果已发表了一些专题综述^[58~70]。

3 构形理论的内涵

构形理论始于对各种组织结构起源的探索。广义的讲, 对于存在约束的研究对象, 只要是存在高、低两种速度不同的“流”, 如热流、流体流、质量流、电流、人和车辆流、货物流等等一类流或几类耦合的流,

都可以应用构形理论研究并优化其结构。和其他相关理论相比, 构形理论具有独特的内涵。

3.1 构形理论和分形理论

针对自然界中存在的各种结构, 很多学者也广泛采用分形几何^[71]来进行分析, 并且还拓展到了工程界, 如对传热传质问题的研究等^[72]。分形是具有扩展对称性的自相似结构, 即结构本身具有无限小比例相似的结构。这是一种从大至无限小的研究过程, 可以非常近似的描述自然界中许多几何形状。如在计算机上经过足够多自相似的迭代过程, 可以逼真的得到一棵树的形状。但这只是一种描述性的、从大到小的、非决定性的过程。

与分形理论相比, 构形理论是一个从有限小单元到大结构的过程, 在时间箭头上与分形刚好相反。以前的学者相信事物的结构是“偶然与机会”的原因造成的^[73], 分形理论的任务只是尽量准确的模拟这种结构, 而不是进行预测; 而构形理论是一种决定性的理论, 即认为事物结构源自于性能达到最优这一要求, 由构形理论可以比较准确的预测事物的结构, 可以指导实际工程装置的设计。

Mandelbrot 由拉丁词“Frangere(破碎)”创造了“Fractal(分形)”一词^[71], 而为表示与分形时间箭头刚好相反的过程, Bejan 在拉丁词“Construere(构建)”的基础上创造“Constructal”一词指代“构形”之意^[10]。“构形”中文译名最早由陈林根等人^[4]提出, 既暗含事物的内部结构与外部形状之意, 又表达了与分形相对、从小到大的构造过程, 与“Constructal”一词原意吻合。

3.2 构形理论与热力学第一、第二定律

在热科学领域, 构形理论可称之为“带有构型问题的非平衡系统热力学^[65](The thermodynamics of nonequilibrium systems with configuration)”, 包含有不同于经典热力学定律内容的规律。

在经典热力学的诞生和发展过程中, 热力学第一定律和第二定律占有重要的统治地位。热力学第一定律揭示了能量守恒与转化在热现象上的应用, 但只说明了能量传递和转化时的数量关系, 未能说明能量传递的方向、条件和深度。热力学第二定律说明了热现象有关的各种过程进行的方向、条件以及进行的限度或深度, 其中方向性是其根本内容。这表明, 两个热力学定律都没有关于系统内部结构的内容。

例如, 考虑一个初始时内部处于不平衡态孤立的热力学系统, 该系统内部存在物理隔断的子系统, 其间存在温差或压差, 某时刻突然将隔断抽走, 使两个子系统直接接触。根据热力学第一定律和第二定律可以知道, 经过足够多的时间, 孤立系统内部将从不平衡状态达到平衡状态。但是在这个过程中, 系统内部的“流”流经了什么路径从而使系统达到了平衡呢? 运用热力学第一定律和第二定律进行分析时, 仅仅将这一过程当成了“黑盒子”, 关注的只是其“输入”和“输出”两端。而“黑盒子”内部到底存在怎样的结构, 使“流”最容易通过它, 从而使系统达到平衡时间最短或耗散最小呢? 弄清这些问题, 正是构形理论的研究范畴。

3.3 构形理论与最小作用量原理

物理学的研究表明, 物理系统的性状常常使得与其性状有关的某种泛函取得极值, 并且该泛函取极值得到的驻值条件, 通常也就是该物理现象所应遵循的控制方程, 这就是著名的最小作用量原理^[74]。近代物理学史上最早使用该原理而且很典型的当属费曼定律^[75]: 光线总是沿需时最少的路径行进(光的折射定律即据此导出)。

应该指出的是, 最小作用原理一般研究的是“点”与“点”之间的作用规律, 而构形理论多研究的是“体”与“点”、即无穷多“点”与一“点”或数“点”之间的最小作用规律, 如对某一区域众多居民出行到类似“影院”、“银行”这样的“点”的最短平均时间的研究, 前者是后者的一个特例。

3.4 构形理论与场协同理论

针对对流换热过程, 过增元从能量方程出发重新审视了热量输运的物理机制, 提出场协同理论^[76-81], 即把对流换热比拟为有内热源的导热过程, 热源强度不仅决定于流体的速度与物性, 而且取决于流速与热流矢量的协同。流动的存在可以强化换热, 也可以并无实质性贡献, 甚至能减弱换热。场协同理论一方面使人们对现有的对流换热现象从新的角度有更深入的理解, 另一方面则有可能发展一系列新的传热控制方法。该理论的提出, 是研究对流问题的一个新的方向。

在研究导热问题时, 为描述热量传递的效率, 过增元等提出了“热量传递势容”的概念^[82]: 物体所具

有的热量与其温度乘积的一半。导热过程必然导致热量传递势容的耗散, 而以“热量传递势容耗散”(“*熵耗散*”^[83])函数讨论传热过程优化时, 采用*熵耗散极值原理*具有较大的优越性: 对于具有一定的约束条件并给定热流边界条件时, 当*熵耗散*最小, 则导热过程最优(温差最小); 在给定温度边界条件时, *熵耗散*最大, 则导热过程最优(热流最大)。

将场协同理论同构形理论相结合, 对各种所研究的场进行匹配, 结合*熵耗散极值原理*, 寻求研究对象的最优结构, 可为构形理论的拓展和应用开辟新的道路。

4 构形理论的研究现状

从构形理论的诞生到现在只有短短十余年时间, 但其研究内容已经覆盖了从工程界的热、机械、电、磁、化学等学科, 到自然界中的生命体及其组织和器官, 再到非生命系统如河岸地貌、全球气候、洋流循环、社会动力学等众多的领域, 取得了丰硕的成果。

4.1 构形理论在工程界中的应用

构形优化按研究对象分类, 主要有导热体优化(体点导热、伸展体导热和绝热层等), 流体流动与对流传热传质优化(内流流道、热源分布、气固反应、空气净化、多孔材料和脉管材料等), 各类装置和部件的优化(换热器、绝热壁、支撑梁、燃料电池、电磁体、热声制冷装置、太阳能利用装置、固态发酵生物反应器、蒸汽发生器、流体分配器和混合器、热电装置等)以及优化算法(遗传算法、模拟退火算法、元胞自动机、神经网络、启发式算法等)等多个方面的研究。随着构形理论研究的不断拓展, 人们提出了各种新概念设计, 研究问题也从一般的导热、流体流动和对流换热问题向多孔介质、纳米传热、自冷却和自修复智能材料等新兴问题不断拓展。

按优化目标分类, 有单目标优化和多目标优化。截至目前, 单目标优化占绝大部分, 主要包括时间最短、费用最低、利润率最大、最大温差最小、传热率最大、流阻最小、热流密度最大、长度最短、熵产率最小、熵损率最小、*熵耗散率*最小、电阻最小、最大热阻最小、功率最大等。多目标优化是构形理论研究的发展趋势。同时, 为满足工程多样化发展的需求, 除各种优化指标的应用外, 不同约束条件(体积约束、

表面积约束、长度约束和强度约束等)的运用也大大丰富和推动了构形理论的研究。

按研究方法分类, 主要有数学分析、数值计算及数值模拟和实验研究, 其中数学分析方法包括精确求解和近似求解。由于研究对象的数学物理模型日益复杂, 为了获得工程应用性更强的优化结果, 数值优化和实验研究逐渐兴起。

4.1.1 导热

电路板在工作时, 各种电子元件会持续发热, 如不及时移走积聚的热量, 严重时会烧毁元件。Bejan 把这类对象抽象成“体-点”(volume-point)问题: 即如何将特定空间(“体”)内的发热量以传导的方式高效地输送到器件表面的某一指定位置(“点”)。通常的做法是在器件内填充少量高导热材料构成高导热通道, 以达到减小热阻, 强化散热的目的。Bejan 提出构形理论后, 首先将其用于优化“体一点”导热问题^[10]。

该方法以“体一点”模型为基础进行优化。其基本思路是假定用于填充的高导热材料体积一定, 以热阻最小为目标, 首先对一矩形单元进行优化, 得到其最优外形(长宽比); 然后将若干个经过优化的矩形单元进行组合, 得到第一级构形体, 再对第一级构形体的外形(或矩形单元数目)及高导热材料的分布进行优化, 使第一级构形体的热阻达到最小; 将类似的工作持续下去, 经过若干次组合和优化, 直至更高级的构形体能覆盖住所给控制体积。构形优化的结果, 是高导热通道组成了一个树枝状的网络, 这种结构并不是人为假定的, 而是热阻最小化后的副产品。

Dan 等人^[84]研究了由两种材料组成的构形体中和时间有关的导热问题, 结果印证了树状结构的普适性。稳态流中阻力最小, 与时间相关流动中达到平衡时间最小, 由这两个优化原则得到了相近的最优内部流动结构。这并不奇怪, 当一个孤立的非平衡系统阻力最小时, 其内部流动总会通过最容易的路径使系统内各部分趋于连续与一致, 达到平衡态的时间也最短。终态为平衡态正是第二定律所表述的内容, 而构形理论所揭示的当达到平衡态时间最短时几何结构最优则是对第二定律的新的补充。

以上述提及的体-点导热优化问题是最基本的研究, 其中包括多个假定条件, 如高导热材料形成等厚度的通道、以及这些构形体内这些通道之间互相垂直等, 这些原因导致了所得到的树形结构与“天然”树

形状差异较大。如果进一步释放这些约束, 那么得到的图形将会更接近于天然的树形结构, 而热阻还将进一步下降。

Ledezma 等人^[85]在文献[10]的基础上, 去掉高导热材料通道等厚度这一条件, 对矩形单元内通道宽度 D_0 进行优化计算可得 $D_{0,opt}=3A_{p,o}(x/L_0)^{1/2}/2L_0$ (其中 $A_{p,o}$ 是单元体内高导热材料截面面积, L_0 为单元体长度, x 为通道内的一点距离冷源的水平距离), 由此得到的单元体热阻下降 6%。而如果去掉高、低导热通道互相垂直($\alpha=0^\circ$)这一条件, 在第一级组合优化过程中增加一自由度 α , 计算得最优的角度 $\alpha_{0,opt}=4^\circ$, 相对 $\alpha=0^\circ$ 来讲, 可使热阻下降 5.8%。

Kuddusi 等人^[86]去掉假定条件 $L_0 \gg H_0$, $k_p \gg k_0$ (其中 H_0 为单元体宽度, k_p 和 k_0 分别为高导热材料和基底材料导热系数), 将单独考虑的两个一维流动合并为二维流动, 求出温度场后再进行热阻最小化, 优化过程变得复杂。

伍文君等人^[87, 88]释放“新一级构形体由最优的上一级构形体组成”的约束, 将上一级构形体的各个参数做为新的自由度, 进行了重新优化, 改进后的最优结构与改进前相比, 各级构形体的热阻下降幅度都在 30%以上。

Ghodoossi 等人^[89]去掉文献[10]中关于高导热通道上热流密度分布的简化, 对该问题进行了精确求解, 发现文献[10]中近似解与所得精确解的偏差高达 25%。Wu 等人^[90]对这一偏差进行了分析, 证明了偏差产生的原因在于文献[10]中的等效导热系数不等效, 而非热流密度分布的简化。

对于矩形单元, 由计算可知, 温度最高处只是两个点, 即离冷源最远的矩形的两个角上。Ghodoossi 等人^[91]对单元体的形状进行了改进, 提出了三角形单元, 求出了热阻最小时的最优构形。Neagu 等人^[92]进一步对单元体外形进行变化, 优化结果是当单元体边界为某种弧形, 使得高温点沿外表均匀分布, 形成均匀的温度梯度场时, 导热效率达到最高, 与矩形外形、等厚度通道情形比较其热阻下降了 29%, 此时体内各处阻力趋于一致, 利用此优化结果可以得到与自然形状非常接近的图形^[93]。进一步可将二维问题拓展至三维, 用圆柱体积单元代替面积单元对体点问题进行分析^[92]。

文献[10, 85]采用的优化方法按时间箭头可称为“向外构形”方法(forward constructal solution^[94], 或称

为 growth method^[95]), 即从内部“小”结构到外部“大”结构. 与“向外构形”优化过程相反, “向内构形”优化 (inward constructal solution^[94], 或称为 design method^[95]) 从控制体总体开始, 其面积和高导热材料的面积一定, “向内”优化确定高导热材料在其内的布置, 使热阻最小. 这是从外部“大”结构到内部“小结构”的过程.

文献[95]利用文献[10]“向外构形”优化的结果, 进一步进行了“向内构形”优化研究, 得到结论: 对于以等截面通道矩形单元为基础进行优化研究的构形体, 优化级数越多(内部结构越复杂), 控制体热阻越小. Ghodoossi 等人^[94, 96]则以等截面通道三角形单元为基础对控制体进行了“向内构形”研究, 其得出的结论却与文献[95]存在重大差异: 增加控制体内部复杂程度并不总能降低其热阻, 而是存在最佳的构造级数, 使热阻达到最小. Zhou 等人^[97]以变截面导热通道矩形单元为基础对控制体进行了“向外构形”和“向内构形”研究.

在上述研究中, 均假定高导热材料通道 D 穿过整个空间. 如果 D 一边与冷源相连, 另一边并不达到边界, 而是与边界有一空隙 S , 对 S 进行优化可进一步优化热阻, 节省导热材料^[98]. Almogbel 等人^[99]进一步提出, 如果低一级的构形体组合成高一级的构形体时去掉高导热材料均匀布置的规定, 对第一级构形体优化发现, 最优布置并非均匀, 而是相对原来位置存在偏移, 如果组成第一级构形体的单元体数目 $n_1=6$, 可使热阻下降 5.7%.

对于管壁绝缘层^[100]和直立平壁的绝缘层^[101]的最优结构, 也运用构形理论加以研究, 为增强隔热效果, 层内可布置一定的气孔, 并考虑到强度的要求; 文献[102]也考虑了隔热层的优化问题. 体-点导热模型被进一步拓展至圆心-圆面^[103], 圆心-圆周^[104], 点-直线^[105], 点-平板^[105]等问题中.

Biserni 等人^[106]讨论了矩形发热固体被突入其内部的等壁温的矩形空腔冷却问题, 优化结果显示, 当矩形空腔变细长并最终贯穿固体时, 热阻最小, 而当矩形空腔变为“T”型时, 导热效果会更好. Biserni 等人^[107]的后续研究表明, 当空腔为“H”型时, 可进一步降低热阻. Rocha 等人^[108]研究了梯形发热固体被矩形空腔冷却问题.

Lorenzini 等人^[109]用构形理论优化了肋片导热的结构, Kacimov 等人^[110]研究了纤维板的散热问题, Gosselin 等人^[111]则探讨了纳米尺度的导热优化问题.

除了热阻最小(优化隔热问题时则为热阻最大)外, 优化目标还可以选为熵产最小^[112]、烟损最小^[113, 114]等等, 而对于与时间相关的导热问题, 还可以选择发热体的降温时间作为优化目标^[84], 对其进行解析优化. 周圣兵等人^[115]以熵产生最小为优化目标对“体-点”导热问题进行了研究. 魏曙寰等人^[116~120]基于烟耗散极值原理, 对矩形单元体、三角形单元体、“圆盘”导热问题、套管换热器截面行了构形优化, 优化结果表明, 基于烟耗散率最小的构形可以较大幅度的降低平均传热温差, 改善传热性能; 并提出了连续与离散变截面相组合的自相似构形优化方法及适用准则^[121], 能够实现多级构造、稳定改善传热性能的预期目的. 谢志辉等人^[122~124]根据空腔散热模型, 建立了基于烟耗散的无量纲当量热阻指标, 综合表征最大温差和散热负荷的无量纲最大热阻指标, 以及无量纲当量热阻与无量纲最大热阻的加权和复合指标. 肖庆华等人^[125, 126]对盘-点导热等问题进行了烟耗散率最小的构形优化.

除了构形理论的优化方法, 对于“体-点”导热问题还有与之相近的其他研究方法. Gersborg-Hansen 等人^[127]用有限元方法分析了导热优化的拓扑结构, Xia 等人^[128]和程新广等人^[129]用仿生优化方法、Mathieu-Potvin 等人^[130]用进化算法、Boichot 等人^[131]用元包机自动寻找较大温度梯度方法、Xu 等人^[132]用模拟退火和遗传算法也对导热问题进行了优化, 得到了较为类似的结构, 但只是数值优化过程, 不是解析解.

4.1.2 流体流动

“体-点”流体流动是工程领域另一类常见的需要进行优化设计的问题.“体-点”流体流动模型可表达为: 给定控制体区域内各点均匀的产生流体, 如何在其内置入一定量的管道, 收集流体并通过控制体边界上的一点向外输出(如地表水-小溪-河流-海洋体系, 即符合这一特征).

假定在单元体区域内存在均匀的渗流, 单元体内置入一管径为 D_0 的管道. 首先渗流以达西流动的方式汇集到管道内, 然后以层流的方式流出单元体边界上的出口点. 对单元体外形和管道直径进行优化, 使流动阻力最小, 然后若干个单元体组装成一级构形体, 继续进行优化, 持续类似工作直至覆盖所给控制体.

构形优化的结果是流体管道最后也呈树状。Bejan 等人^[133, 134]以流阻最小为目标对这种流体网络进行了优化。结果表明, 最优结构是每两个低一级的管道 D_i 与高一级管道 D_{i+1} 相连, 且管径比 $D_i/D_{i+1}=2^{-1/3}$ 。而二分支管相邻管径比为 $2^{-1/3}$ 时, 流体阻力最小, 这正是 Murray^[135]研究血液循环流动规律时得到的定律, 验证了所得结果的正确性。Murray 定律揭示了高一级管道与两个低一级管道对称相连时流阻最小时的管径比。Wechsotol 等人^[136]则研究了连接不对称时的最佳管径比和此时最小的流阻。在解析优化的基础上, Franco 等人^[137]用数值计算分析了树状管道内层流进一层流流出、层流进一湍流流出、湍流进一层流流出、湍流进一湍流流出等各情形时的最优结构。Durand^[138]比较了流通管道总体积一定和总面积一定不同约束下构形的差异, Pramanick 等人^[139]讨论了导热优化中的均分原则^[10]在流体流动领域中的应用。

Bejan 等人^[140]研究了连接处两管道呈“T”型、“Y”型和“十”型时的构形差异。Wechsotol 等人^[141]在考虑了相邻两级管连接处的损失对平行板上的层流、光滑管内的湍流和粗糙管内的湍流三种情形流阻进行计算分析, 表明连接损失并不能被忽略。

在以上工作基础上, Tondeur 等人^[142]设计并制造了一个有 8 级“T”型分支的流体分配器装置, 计算发现以泵功率最小与以压降最小为优化目标所得的最佳管径比有一定差异。Luo 等人^[143]则继续将该型分配器的“T”型分支改变为“Y”型分支, 能使阻力进一步降低。实际上, “T”型结构是“Y”型结构当分叉角等于 180° 时的特殊情况, 所以流动阻力与分叉角大小有关。Luo 等人^[144, 145]又结合这一类装置, 继续从理论角度对构形理论的应用进行了阐述。

在文献[133, 134]思路基础上, Lorente 等人^[146]以连接管道总长度最短为目标, 分析了点与线上、平板上、圆周上诸点间构形优化问题, 此时“Y”型连接结构为最优。Wechsotol 等人^[147]以流阻最小为目标, 较为详细研究了圆心与其圆周上等距离分布的诸点间流体流动构形优化问题, 优化参数包括圆心处管道数目、圆心与圆周点之间连接管道的级数, 每一级管道朝下一级分成两支是最优结构。Lorente 等人^[148]分析了这两个优化目标产生的构形差异。Bejan 等人^[149]则以该类结构为例, 论述了从不平衡态向平衡态转变过程中, 系统结构形成过程。Wechsotol 等人^[150]进

一步将点—圆周间分支状结构演化成环状, 并进行了优化。

以上过程中采用了最大流阻(或最大压降)、连接管道总长度最小为优化目标进行分析和计算, 此外还可采用熵产生最小^[151]、泵功率最小^[152, 153]、费用最小^[153](包括建造费用即尺寸约束, 和运行费用即泵功率费用)、质量积耗散(或当量流阻、当量压降)最小等优化目标。

4.1.3 对流

构形理论较早就被用于研究对流换热问题。Bejan^[154]在研究流体冷却平行发热板问题时认为, 若板间距离太大, 则总传热面积小, 整体传热量也小; 而间隙较小时, 流体热边界层将发生交叉, 造成流体过热, 不能起到很好的冷却效果; 因此存在最佳的间距, 使平板和流体的总换热量最大, 平板得到最佳的冷却效果, 此时换热器达到最佳结构。Bejan^[154]还优化了平行发热板或平行发热柱体被自然对流流体或强迫对流流体冷却的结构, 求得了热流密度最大时最佳的间距、流道截面形状等特征参数。Joucavel 等人^[155]则研究了旋转的发热柱体被来流冷却时的优化问题, 结果表明逆向旋转时换热性能要好一些。

与导热和流体流动构形优化类似, Zimparov 等人^[156, 157]以树状流动结构对“体-点”对流换热问题进行了优化, 研究了“T”型和“Y”型管道分支对流道构形的影响。在兼顾流阻和热阻目标的思想基础上, 以熵产生最小化为目标进行优化, 所得结果还包含了以流阻最小为优化目标的纯流体流动的优化结论。

Wechsotol 等人^[158]优化了圆心和圆周上诸点间对流换热的最优结构, 当优化目标为热阻最小时, 圆心和圆周上各点之间以直管相连, 即辐射状结构为最优; 而优化目标为泵功率最小时, 圆心和圆周上以分级的管道相连, 即树状结构为最优; 但由两种最佳结构得到的热阻和泵功率值相差却不大。

针对逆流换热器, da Silva 等人^[159]对冷热流体管道分别进行对应的构形优化, 讨论了矩形区域树状流道、圆盘区域树状流道、方形区域四角流向中心的树状流道三种类型, da Silva 等人^[160]还设计了圆盘区域树状流道的实际换热器装置对其理论进行了验证。而 Zimparov 等人^[161]则针对顺流换热器进行了相应的计算和讨论。

传统的换热器多采用单尺度进行结构设计, 如

经典的逆流与顺流换热器中, 冷热流体流动管道直径相同。而树状结构中, 相邻两级管道最佳管径比 $D_i/D_{i+1}=2^{-1/3}$, 表明出现了多尺度的管道直径, 这种多尺度结构能有效降低系统的阻力。Bejan 等人^[162]以最大热流密度为目标, 对多尺度的平板对流换热结构进行了研究, 指出在较长平板流体进口处插入较短的平板, 使各平板上的热边界层互相匹配, 就能使热流密度最大。da Silva 等人^[163]优化了多尺度情况下自然冷却平板的情形, 指出当更多的小尺度板增加到一定程度时, 传热增强效果不再明显。Bello-Ochende 等人^[164]研究了类似的层流冷却平行板情形、强迫对流冷却平行柱体情形^[165]和自然对流冷却平行柱体情形^[166]。Gosselin^[167]的研究表明, 对于粗糙管来说, 将大股的湍流分流成小股的层流, 能有效减小泵功率, 而且传热性能也可得到提高。Wechsolt 等人^[168]和 Muzychka 等人^[169]均用数值计算的方法对多尺度优化进行了分析和比较。

肋片在对流换热中有较多应用, Bejan 等人^[170]讨论了“体-点”对流换热模型中肋片的敷设和优化问题。最简单的肋片是“T”型肋, Bejan 等人^[171]优化了这种肋片的长宽比等几何参数, 并研究了其变形“τ”型肋。Alebrahim 等人^[172]研究了发热柱体上的环状肋的最优构形, Bobaru 等人^[173]以数值计算分析了自然对流条件下肋片的最优构形, Almogbel^[174]研究了“T”型肋片出现新分支后的构形, Lorenzini 等人^[175~177]则分析了由“T”型肋片演变成“Y”型肋片情形, 并优化了结构。Bonjour 等人^[178]分析了在两同轴放置管道内对向流动流体热交换过程, 并对两管壁间设置的肋片进行了优化。谢志辉等人^[179, 180]建立了基于耗散的无量纲当量热阻指标, 研究了两级“Y”肋片和“T”肋片的优化。肖庆华等人^[181~183]基于耗散极值原理研究了伞形柱状肋片、强迫对流换热冷却的产热体和冷却流道的构形优化。

Bejan^[184]研究了体积元中各平板间流体采用叉流形式, 第一级及以上各级组合体流体通道间采用逆流形式换热器的最优结构。Matos 等人^[185, 186]采用肋片在换热器内管道间增强换热, 并对结构进行了构形优化。Walsh 等人^[187]研究了强迫对流换热时所需最少冷却流体时的流道结构。Raja 等人^[188]分析了换热器中采用空气和水作为热量交换媒质时的构形优化问题, 用“Fluent”计算软件对流体流动和传热问题进行了数值计算。

Silva 等人^[189]研究了水平壁面被多尺度离散的有限数目热源加热, 同时被流体以强迫对流方式进行冷却模型, 以换热系数最大为目标, 优化了两类情形: 数目很多的小热源和较少的大尺度热源。优化结果表明, 换热系数达到最大时, 热源呈不均匀分布, 流体入口处紧密, 出口处疏松。在此基础上, Silva 等人^[190]又研究了热源厚度对最优构形的影响。Silva 等人^[191]还研究了加热的壁面被无界面约束自然对流流体冷却、有界面约束自然对流流体冷却情形^[192]、“L”型和“C”型壁面被自然对流流体冷却情形^[193]、以及方形发热固体被一面至四面流体强迫对流冷却情形^[194]。

文献[62, 195, 196]探讨了研究对象在保证机械强度前提下能承受住突加热载荷的最佳结构, 涉及到了同时满足热阻和机械强度不同指标的多目标设计问题。Gosselin 和 da Silva^[197]研究了传热问题和功率耗散问题结合的纳米流体流动。Gosselin 和 Bejan^[198]在给定磁场强度条件下, 以最大温差最小化为目标对添有高导热材料的电磁体进行了构形优化。魏曙寰等人^[199, 200]进一步对电磁体进行了耗散率最小构形优化和传热性能与电磁效应的综合性能构形优化, 实现了电磁体多学科多目标构形优化。谢志辉等人^[201]和陈林根等人^[202]对立式绝热壁分别进行了同时考虑隔热、强度、重量因素和同时考虑隔热、强度、体积因素的多学科构形优化。谢志辉^[38]并进一步建立了热流与强度结合的幂权积复合优化函数, 释放强度等式约束, 以该复合函数最大化为目标, 对立式绝热壁进行了多学科多目标构形优化。Wang 等人^[203]研究了脉管结构的冷却性能及机械强度问题。

Rocha 等人^[204]考虑了周期性的压差对冷却效果的影响; Nelson 等人^[205]研究了层流被下方热流加热的对流问题。Neagu 等人^[206]还研究了另外一类对流问题, 所选控制体由边界加热(而不是体内均匀产热), 由流体流过内部降温。制冷剂流率一定或压降一定, 用数值方法求解使流体不超温的最佳结构。

Bello-Ochende 等人^[207]以热流密度最大为目标, 研究了流体热边界层与管道直径匹配问题。Cizmas 等人^[208]优化了高温叶片被气体冷却时最佳叶片内部结构, 研究了固定气体质量流量和固定总压降两种情形。Kalyon 等人^[209]优化了热流体管道绝缘层敷设最优结构。Zamfirescu 等人^[210, 211]研究了有相变(制冰)的对流换热最佳结构。

微通道和微换热器因为在单位体积内具有很大的传热面积, 传热强化效果好, 受到了越来越多重视。Wang 等人^[212]将微通道树状流动结构的传热性能与传统直型和弯曲型管道传热性能进行比较分析, 证明前者结构更为优化; 随后又分析了分叉角度对流动及传热性能的影响^[213]。Wang 等人^[214]还用数值计算对圆盘内树状微管道网络内流动为层流状态情形进行了性能优化, 当网络中存在环时, 传热性能更优。Muzychka 等人^[215]讨论了几种不同的截面形状下微通道的性能, 包括平行平板、矩形、方形、椭圆形、圆形、三角形以及多边形等。Bello-Ochende 等人^[216]用有限元方法计算了微通道热沉的最优构形。Moreno 等人^[217]设计并制造了一套微通道换热器, 具有较高的面积/体积值, 且所需泵功率较小。Luo 等人^[218]则对多尺度的微换热器构形结构进行了探讨。

陈永平等^[219, 220]也采用树状流动结构对微通道散热器进行了理论和试验研究, 证明该类型换热器的热有效性(指散热量与泵功的比值)要比传统平行通道换热器高得多。值得注意的是, 该文中的提法为“类分形树状网络”, 实际上所建立的模型和构形理论中不谋而合。文献[221~227]也用“类分形树状网络”以及多尺度方法研究了流动及换热问题, 发现类分形树状网络结构的等效导热率比同体积的棒状材料的等效导热率小两个数量级^[222], 并且这种结构的渗透率比相同横截面积的平行通道的渗透率大很多^[227]。王立秋等人^[228~231]研究了纳米流体的构形优化。

4.1.4 多孔介质

在研究流体流动和对流换热问题中, 当流阻或热阻达到最小值时, 对应的流道结构为“树状”。而这种树状流道在单元体层面讨论的是呈达西流动的渗流, 即多孔介质中的传热与传质问题^[15, 232]。Ordonez 等人^[233]从解析和数值计算的角度分析了流动阻力最小时, 多孔介质中不对称的“体-点”流动最优结构。Bejan^[234]以热流密度最小为优化目标, 分析了三种情形: 平行板的冷却、平行柱体的冷却、平行板间填充多孔介质后的冷却。Wildi-Tremblay 等人^[235]研究了发热固体被置入其内的树状微通道内的流体冷却问题, 采用遗传算法进行了优化计算, 指出孔隙度对压降有重要影响。Leblond 等人^[236]也采用混合遗传算法优化了存在内热源的壁面被流过多孔管道的流体冷却时的最佳结构。Kacimov 等人^[237]研究了土壤中水分

扩散的二维多孔介质渗透模型。Lorente^[238]以多孔介质离子交换器为研究对象, 从时间和空间上进行构形优化, Lorente 等人^[239]还研究了多尺度非均质多孔介质内的最佳流动问题。

为兼顾传热、传质, Azoumah 等人^[240, 241]以熵产生最小为优化目标, 基于矩形单元, 对处于稳态时气一固反应器的构形优化问题进行了研究; 在此基础上, Azoumah 等人^[242]以输出功率/熵产率为优化目标, 讨论了瞬态时气-固反应器的构形优化问题。Zhou 等人^[243]基于三角形单元, 对稳态的气-固反应器构形优化问题进行分析, 得到了熵产生最小时各级构形体的参数。

4.1.5 光伏电池

Morega 等人^[244]将“体-点”导热问题的构形优化方法移植到光伏电池的结构设计中, 对金属电极条在发射区中的布置进行了优化。陈林根等人^[245]结合经过优化的变截面金属电极和矩形单元, 以减小串联电阻为目标, 对电极条进行了优化设计。Bhakta 等人^[246]以电功率损耗最小为优化目标, 进行了类似的工作。

4.1.6 燃料电池

Vargas 等人^[247]以功率最大为目标, 对碱性燃料电池的内部结构(各单元层相对尺寸及空间距离)进行优化设计, 得到了电池的极化曲线、功率效率函数; 类似的优化方法还被推广应用到了质子交换膜燃料电池的构形优化中^[248, 249]。

Ordonez 等人^[250]以功率密度最大为目标, 对固体氧化物燃料电池内部结构进行了优化, 考虑了三个自由度: 极板厚度、孔道的截面形状及其数目。

Senn 等人^[251]分析了将固体高分子燃料电池中传统的管道型的流体分配系统改进成多孔介质型的流体分配器后的性能, 数值计算的结果表明, 改进后能使燃料电池具有更高的功率输出和更轻的重量, 制造成本也相应降低。管道型的流体分配系统还可以被替换成树状流体分配系统^[252], 也可以提高性能, 降低成本。固体高分子燃料电池的极板容易发热, 如不及时导走热量, 将严重影响电池的寿命, 传统做法是在极板上布置蛇形的弯管, 内部充满循环的流体对极板进行冷却。Senn 等人^[253]将蛇形的弯管替换为树状的微通道流体流动结构, 可使换热增强, 所需压

降降低。Senn 等人^[254]还进一步以提高功率密度为目标, 研究了多级连接的固体高分子燃料电池的构形优化问题。Chen 等人^[255]则讨论了过渡状态条件下和稳态条件下该类电池的构形优化问题。

4.1.7 经济学研究

Bejan 等人^[256]将构形理论拓展到经济学领域, 以运输费用最小和利润率最大为目标, 分别讨论了最优的运输区域结构。Ghodoossi 等人^[257]以费用最小为优化目标, 比较分析了三角形单元组装成矩形构形体和三角形构形体, 以及矩形单元组装成矩形构形体和三角形构形体 4 种情形的结构。Ghodoossi 等人^[258]还以利润率最大为优化目标, 进行了类似的分析。在此基础上, Zhou 等人^[259]将各运输通道间的夹角作为一个增加的自由度, 以三角形单元为例分析了总费用最小时的最优结构。

4.1.8 产品平台设计

Allen 等人^[260]将现代大型企业的产品生产活动划分为三块: 企业组织设计、产品需求设计和制造过程设计, 后两者统称为产品平台设计。借鉴构形理论中的“向外构形优化”和“向内构形优化”, 平台设计中对应有“自顶向下”和“自底向上”两种决策方法, 并以助听器的设计和制造过程为例, 讨论了构形理论在产品平台设计中的应用。Carone 等人^[261]讨论了均衡需求前提下, 采用多目标设计(如尽量使生产费用最小和产品品种供给数最多)的构形优化问题。Hernandez 等人^[262]以压力容器为例, 讨论均衡需求前提下产品平台的优化设计; 还以手臂力量练习器设计为例, 讨论了如何将构形理论与其他多种优化方法相结合进行产品开发。Williams 等人^[263, 264]进一步以压力容器、冷凝器、助听器和悬臂梁等多种产品为例介绍了构形理论在产品平台设计中的应用, 并分析了非均衡性市场需求对设计过程的影响。

4.1.9 市政工程设计

城市居民的热水管网存在一个优化问题^[265~267], 如何在一定区域合理布置管网, 使居民接收水温最高? 有三种可供选择的方式: 所有用户沿一条线布置; 以方块形式进行构造(每四户一个单元); 以成对方式进行构造(每两户)。计算表明, 第三种形式为最优布置。Lorente 等人^[268]还讨论了点—圆周区域内树

状布置问题。

Miguel^[269]根据一天中太阳光线照射角度的变化, 对利用太阳能作为能源供给的建筑物的构形进行了设计, 讨论了三类模型: 减少太阳光辐射的遮荫层敷设、用于加热房间的管束布置以及置于屋顶的蒸馏系统, 为建筑物的结构设计引入了新的理念。

文献[270~274]用总费用最小为优化目标, 对电网的配置进行了优化。电网各个层级电压是逐渐降落的, 当压降分配达到最优时, 总费用最小。

第 2 节中简介了 Bejan 研究街道网络形成原因的成果^[9], 这是构形理论最早的文献。Bejan 等人^[275]还释放了“各个街道之间垂直”这一约束, 并讨论了三维构形优化问题。Reis^[276]则用尺度规律对城市街网的变迁进行了研究。

4.2 生命系统中的构形理论

4.2.1 飞鸟、走兽、游鱼在运动学上的统一

Bejan 等人^[66]以飞翔的鸟、奔跑的脊椎动物、游动的鱼为例, 从运动学和动力学的角度出发, 分析了动物运动时速度与身体质量之间的关系。当水平方向和垂直方向的总阻力最小时, 这三类动物最佳的运动速度 v_{opt} 与其身体质量 M 之间关系式相同: $v_{\text{opt}} \propto M^{1/6}$ 。Bejan 等人还研究了动物奔跑时其跳跃频率 f 与身体质量 M 之间最佳关系式为 $f_{\text{opt}} \propto M^{-1/6}$, 而鱼在水中游动时尾巴摆动频率、鸟在空中飞翔时翅膀煽动频率与身体质量之间也存在这一最佳关系。另外, 这三类动物每单位质量肌肉产生的最大力也惊人一致: 60 N/kg。这些都表明, 飞鸟、走兽、游鱼在运动学上达到了完美的统一。在此基础上, Bejan^[277]还研究了人造飞行器(如飞机、火箭等)的巡航速度和其质量的关系, 也得出了类似的优化关系。

4.2.2 动物的生命体征参数与身体尺寸的关系

生物学家和物理学家很早就开始研究各类动物的热损耗、呼吸、心跳频率等参数与身体尺寸(重量或体积)的关系。传统的分析是, 动物的新陈代谢速率正比于动物体热量损耗, 而热量损耗又正比于动物体的皮肤面积, 因此新陈代谢速率应正比于身体体积的 $2/3$ 次幂, 即存在 $2/3$ 的指数关系。但实际生物学观察结果是 $3/4$ 的指数关系, 这一偏差原因一直没有令人信服的解释。基于构形理论的思想, Bejan^[278]

认为动物体内的血管系统是动物体和外界的换热器, 其中动脉管和静脉管为两个逆向流动、各级分支彼此耦合的树状流动系统。动脉血管收集体内的热量并传递给静脉血管, 然后从皮肤耗散出去。在总身体体积和血管体积一定的约束下, 对所建模型进行优化分析, 当热损失最小时, 正好与其身体体积成 $3/4$ 指数关系。

Bejan^[279]以机械功消耗最小为优化目标, 对动物的呼吸和心跳频率进行了研究。呼吸和心跳时间间隔与身体质量 M 最佳关系式为 $t_{\text{opt}} \propto M^{0.24}$, 即随着身体质量增大, 呼吸和心跳频率逐渐下降, 与实际生物学数据非常吻合。

4.2.3 动物的血管及肺部气管的结构

Reis 等人^[280, 281]根据构形理论的优化方法, 对动物肺部结构进行了建模分析。从气管到支气管再到和肺泡连接的毛细管, 呈现典型的树状分支结构。从所建模型和数学方程推导得知, 当分支级数 $N = 23$ 时, 氧气和二氧化碳气体的流阻最小, 这与生物学上的观察数据完全一致。Wang 等人^[282]用类似的方法对脉管网络进行了研究。

4.2.4 医疗领域的应用

利用激光照射产生的热量可以有效杀灭肿瘤组织, 然而肿瘤组织被高温加热的同时, 正常组织也容易被烧伤, 因此需要确定出肿瘤组织周围的温度场, 实施精确加热。Dai 等人^[283]建立了三层组织加血管模型, 即表皮层、真皮层、皮下组织, 然后加上组成树状流动通道的血管系统, 由数值计算确定出肿瘤组织周围的温度场。Tang 等人^[284]将上述模型进行扩充, 以互相耦合逆向流动的动、静脉树状流动管代替了单一管的血管系统, 使模型更符合实际。在同一模型基础上, Wang 等人^[285]考虑了用电磁辐射加热替代激光照射的方法来进行类似的优化, 得到了有意义的结果。Kim 等人^[286]建立了皮肤组织一侧产生热量, 另一侧流入冷却剂(如血管中的血液)冷却的模型, 对温度场的分布进行了研究。

4.3 非生命系统中的构形理论

4.3.1 河流的演化

自然界中的河流网络展现了典型的树状流动结构, 而且也是一种多尺度的结构。Bejan^[11]认为, 地表

最初不能完全渗透到地下的降水呈杂乱无章的耗散流动(细小溪流, 高阻力流动), 由于存在流动阻力最小这一根本要求, 各耗散流逐级汇集成有组织的流动, 形成了河流体系中的各支流与干流(低阻力流动), 这样多余的雨水便能在最短的时间内及时导走, 并由此形成树状结构流道。Reis^[287]基于构形理论对河道网络进行了理论上的优化, 所得结果与 Horton 定律^[288](支流之间长度比与数目比), Hack 定律^[289](河道面积关系)吻合较好, 说明流动阻力最小是河道网络形成的原因, 而不是以前普遍认为的“偶然的原因”, 或是运输沉积物能力最强、能量耗散率最小、流动功率最小、 F_r 数最小等其他原因^[290]。

4.3.2 大气循环与全球气候

Bejan 等人^[291]将太阳、地球、宇宙理解成一热机系统, 地球从太阳吸热, 将热量散给宇宙, 同时一部分热能转化成功率用于驱动大气和洋流在全球循环, 形成了地球上的气候。优化过程中以功率输出最大为目标, 分析热带、寒带的区域分布(即最佳的吸热、散热面积), 以及风速等。Reis 等人^[292]则基于构形理论着重分析了长期范围内的趋势及单日的情形, 所得结果于气象观测非常接近, 可作为预报的一种手段。

4.3.3 社会动力学问题、安全与可持续性问题

Bejan 等人^[18, 20]将构形理论运用到了空中交通系统、社会系统的统计力学模型、文字手写体的演变^[18]、城市流动结构与人民安全、公共政策制定、全球安全与可持续性、核废料区域规划、大学排名等的研究中^[20]。

5 结论

构形理论始于对自然界各种形态组织结构的探索, 然后拓展至了工程界, 包含有不同于经典热力学定律的新内容。热力学第一定律只说明了能量传递和转化时的数量关系, 热力学第二定律说明了热现象有关的各种过程进行的方向、条件以及进行的限度或深度, 但这两个热力学定律都没有关于系统内部结构的内容; 构形理论不但研究了系统由不平衡态达到平衡态的最佳演进过程, 而且揭示了性能达到最优时的最佳演进结构, 这是构形理论对热力学第一定律和第二定律新的补充。构形理论所强调的各种组织结构形状由小到大、决定性进化的时间箭头

效应，也不同于分形理论由大至无穷小的时间箭头以及对结构仅作描述性模仿的内容。构形理论是可以用于解释各种组织几何形状的热力学机制的表述理论，并可用于改进各种组织和过程性能。构形理论可作为设计各种装置、分析预测各种构形的有力工具。

总结构形理论 10 余年来的研究进展，特别是归纳本文所引重点文献的内容特点，可以发现多尺度、多目标与多学科优化是构形理论发展的前沿和趋势。大量文献研究表明，在导热、流体流动和对流换热等各种传输过程中，多尺度结构往往优于单尺度结构。非对称多尺度结构比对称多尺度结构又更具优势，非对称实质上也是一种结构体几何自由度的增加。多尺度结构是大量自然组织的观测结果，也是构形

优化的理论结果，成为各种新概念设计的一般性选择。在工程优化问题中，单目标优化是突出某一个方面的需求。但 Mauroy 等人^[293]2004 年发表在 *Nature* 上的一篇论文表明，流体流动理论最优化的肺气管结构对实际哺乳动物是十分危险的。这从一个侧面反映出单目标优化的局限性。因此多目标优化已成为复杂流动系统结构优化的一个迫切需求。在对流换热中，往往需要兼顾热阻和流阻两个方面。在传热工程中，一般需要兼顾局部极限传热性能和整体平均传热性能。传热问题和强度问题相结合的构形优化，开辟了多学科构形优化新方向。而耗散极值原理与构形理论相结合，为传热优化提供了更合理的理论工具。

参考文献

- 1 Bejan A, Mamut E, eds. Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Thermodynamics and the Optimization of Complex Energy Systems, Vol. 1. NATO Advanced Study Institute, July 13-24, 1998, Neptun, Romania
- 2 Chen L G, Sun F R. Advances in Finite Time Thermodynamics: Analysis and Optimization. New York: Nova Science Publishers, 2003
- 3 Chen L G, Wu C, Sun F R. Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems. *J Non-Equilib Thermodyn*, 1999, 24(4): 327-359
- 4 陈林根, 孙丰瑞, 吴 C. 有限时间热力学理论和应用的发展现状. 物理学进展, 1998, 18(4): 395-422
- 5 Bejan A. Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite size devices and finite time process. *J Appl Phys*, 1996, 79(3): 1191-1218
- 6 Bejan A. Entropy Generation Minimization. Boca Raton FL: CRC Press, 1996
- 7 陈林根. 不可逆过程和循环的有限时间热力学分析. 北京: 高等教育出版社, 2005
- 8 Radcenco V. Generalized Thermodynamics. Bucharest: Editura Technica, 1994
- 9 Bejan A. Street network theory of organization in nature. *J Adv Transportation*, 1996, 30(2): 85-107
- 10 Bejan A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *Int J Heat Mass Transfer*, 1997, 40(4): 799-816
- 11 Bejan A. Shape and Structure, from Engineering to Nature. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000
- 12 Bejan A. Advanced Engineering Thermodynamics. 2nd ed. New York: Wiley, 1997
- 13 Bejan A, Dincer I, Lorente S, et al. Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies. New York: Springer, 2004
- 14 Rosa R N, Reis A H, Miguel A F, eds. Bejan's Constructal Theory of Shape and Structure. Portugal: Evora Geophysics Center, University of Evora, 2004
- 15 Ingham D B, Bejan A, Mamut E, et al. Emerging Technologies and Techniques in Porous Media. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004
- 16 Bejan A, Lorente S. The Constructal Law (La Loi Constructale). Paris: L'Harmatan, 2005
- 17 Bejan A, Lorente S, Miguel A, et al. Along with Constructal Theory. UNIL FGSE Workshop Series No 1. Hernandez J, Cosinschi M, eds. University of Lausanne, Faculty of Geosciences and the Environment, Switzerland, 2006
- 18 Bejan A, Merkx G W. Constructal Theory of Social Dynamics. New York: Springer, 2007
- 19 Bejan A, Lorente S. Design with Constructal Theory. New Jersey: Wiley, 2008
- 20 Bejan A, Lorente S, Miguel A F, et al. Constructal Human Dynamics, Security & Sustainability. Amsterdam: IOS Press, 2009
- 21 Ledezma G A. Geometric optimization of heat transfer devices. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 1997
- 22 Neagu M. Characteristics and optimization of composite systems with heat conduction. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 1999

- 23 Alebrahim A. Geometric optimization of thermal systems. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 2000
- 24 Hernandez G. Platform design for customizable products as a problem of ace in a geometric space. Doctoral Dissertation. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2001
- 25 Vie P J S. Characterisation and optimisation of the polymer electrolyte fuel cell. Doctoral Dissertation. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2002
- 26 Ordonez J C. Integrative energy-systems design: System structure from thermodynamic optimization. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 2003
- 27 Wechsolt W. Tree-shaped convention flow for heating and cooling. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 2004
- 28 Gosselin L. Multidisciplinary optimization of heat transfer and fluid flow systems. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 2004
- 29 Senn S M. Multi-scale branching flow structures optimizing high-performance polymer electrolyte fuel cells. Doctoral Dissertation. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology in Zurich, 2005
- 30 da Silva A K. Constructal multi-scale heat exchangers. Doctoral Dissertation. Durham: Duke University, 2005
- 31 Azoumah Y. Conception optimale, par approche constructale, de reseaux arborescents de transferts couples pour reacteurs thermochimiques. Doctoral Dissertation. Perpignan: l'Universite de Perpignan, 2005
- 32 Raja V A P. Computational and experimental analysis of dendritic constructal heat exchanger. Doctoral Dissertation. New Delhi: Indian Institute of Technology, 2007
- 33 Wang X Q. New Approaches to micro-electronic component cooling. Doctoral Dissertation. Singapore: National University of Singapore, 2007
- 34 Robbe M. CFD analysis of the thermo-fluiddynamic performance of constructal structures. Doctoral Dissertation. Roma: University of Roma 1, 2007
- 35 周圣兵. 导热构形优化及若干拓展研究. 博士学位论文. 武汉: 海军工程大学, 2007
- 36 Wiker N. Optimization in continuum flow problems. Doctoral Dissertation. Sweden: Linkoping University, 2008
- 37 魏曙寰. 热传导能耗散率最小构形优化. 博士学位论文. 武汉: 海军工程大学, 2009
- 38 谢志辉. 三类传热结构的多目标构形优化. 博士学位论文. 武汉: 海军工程大学, 2010
- 39 肖庆华. 基于能耗散极值原理的传热传质构形优化研究. 博士学位论文. 武汉: 海军工程大学, 2011
- 40 夏再忠. 导热和对流换热过程的强化与优化. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2001
- 41 陈飚松. 热传导与结构耦合系统的灵敏度分析及优化设计. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2001
- 42 徐国宾. 非平衡态热力学理论在河流动力学领域中的应用. 博士学位论文. 浙江: 浙江大学, 2003
- 43 左孔天. 连续体结构拓扑优化理论与应用研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2004
- 44 程新广. 能耗散在传热优化中的应用. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2004
- 45 Bernot M. Transport optimal et irrigation (Optimal transport and irrigation). Doctoral Dissertation. Cachan: Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005
- 46 王博. 蜂窝结构多功能优化设计. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2007
- 47 冯勇进. 分形理论及其在多孔介质和纳米流体热导率上的应用. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2007
- 48 邹明清. 分形理论的若干应用. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2007
- 49 Schymanski S J. Transpiration as the leak in the carbon factory: A model of self-optimising vegetation. Doctoral Dissertation. Perth: The University of Western Australia, 2007
- 50 Tomko M. Destination descriptions in urban environments. Doctoral Dissertation. Melbourne: the University of Melbourne, 2007
- 51 张永存. 多孔材料传热特性分析与散热结构优化设计. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2008
- 52 贺丹. 渐进结构优化方法的改进策略及应用. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2008
- 53 李小伟. 通道湍流换热强化的数值与实验研究. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2008
- 54 员美娟. 多孔介质中流体的若干流动特性研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2008
- 55 徐鹏. 树状分形分叉网络的输运特性. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2008
- 56 Guillaume M. Preparee au Laboratoire de Physico-Chimie et de Thermohydraulique Multiphasique du Commissariat à l'Energie Atomique de Grenoble. Doctoral Dissertation. Nancy: Nancy Université, France, 2008
- 57 da Silva, Santos S G. Modulation of lung development by in utero gene transfer. Doctoral Dissertation. Braga: Universidade do Minho, Portugal, 2009
- 58 Bejan A. How nature takes shape: Extensions of constructal theory to ducts, river, turbulence, cracks, dendritic crystals and spatial economics. Int J Therm Sci, 1999, 38(8): 653–663
- 59 Bejan A. From heat transfer principles to shape and structure in nature: Constructal theory. Trans ASME, J Heat Transfer, 2000, 122(3):

430–449

- 60 Bejan A, Lorente S. Thermodynamic optimization of flow geometry in mechanical and civil engineering. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2001, 26(4): 305–354
- 61 周圣兵, 陈林根, 孙丰瑞. 构形理论: 广义热力学优化的新方向之一. 热科学与技术, 2004, 3(4): 283–292
- 62 Bejan A, Lorente S. Constructal design and thermodynamic optimization. *Annual Rev Heat Transfer*, 2005, 14: 511–527
- 63 Lorente S, Bejan A. Svelteness, freedom to morph, and constructal multi-scale flow structures. *Int J Thermal Sci*, 2005, 44(12): 1123–1130
- 64 Bejan A, Lorente S. Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering. *J Appl Phys*, 2006, 100(4): 041301
- 65 Reis A H. Constructal theory: From engineering to physics, and how flow systems develop shape and structure. *Appl Mech Rev*, 2006, 59(5): 269–282
- 66 Bejan A, Marden J H. Unifying Constructal theory for scale effects in running, swimming and flying. *J Exp Biol*, 2006, 209(2): 238–248
- 67 Fan Y, Luo L. Recent applications of advances in microchannel heat exchangers and multi-scale design optimization. *Heat Transfer Eng*, 2008, 29(5): 461–474
- 68 Bejan A, Marden J H. The constructal unification of biological and geophysical design. *Phys Life Rev*, 2009, 6(2): 85–102
- 69 Bejan A, Lorente S. The constructal law of design and evolution in nature. *Phil Trans R Soc B-Biological Sci*, 2010, 365(1545): 1335–1347
- 70 Bejan A, Lorente S. The constructal law and the design of the biosphere: Nature and globalization. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2011, 133(1): 011001
- 71 Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982
- 72 郁伯铭. 分形介质的传热与传质分析. 工程热物理学报, 2003, 24(3): 481–483
- 73 Prigogine I. *From Being to Becoming*. San Francisco: W. H. Freeman, 1980
- 74 许良. 最小作用量原理与物理学的发展. 成都: 四川教育出版社, 2001
- 75 费曼. 费曼物理学讲义. 第一卷. 费曼物理学讲义翻译组译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983
- 76 Guo Z Y, Li D Y, Wang B X. A novel concept for convective heat transfer enhancement. *Int Heat Mass Transfer*, 1998, 41(2): 2221–2225
- 77 过增元. 对流换热的物理机制及其控制: 速度场与热流场的协同. 科学通报, 2000, 45(19): 2118–2122
- 78 Guo Z Y, Zhou S Q, Li Z X, et al. Theoretical analysis and experimental confirmation of the uniformity principle of temperature difference field in heat exchanger. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(10): 2119–2127
- 79 Tao W Q, Guo Z Y, Wang B X. Field synergy principle for enhancing convective heat transfer—its extension and verifications. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(15): 3849–3856
- 80 过增元, 魏澍, 程新广. 换热器强化的场协同原则. 科学通报, 2003, 48(22): 2324–2327
- 81 过增元. 换热器中的场协同原则及其应用. 机械工程学报, 2003, 39(12): 1–9
- 82 过增元, 程新广, 夏再忠. 最小热量传递势容耗散函数原理及其在导热优化中的应用. 科学通报, 2003, 48(1): 21–25
- 83 Guo Z Y, Zhu H Y, Liang X G. Entransy—A physical quantity describing heat transfer ability. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(13–14): 2545–2556
- 84 Dan N, Bejan A. Constructal tree networks for the time-dependent discharge of finite-size volume to one point. *J Appl Phys*, 1998, 84(6): 3042–3050
- 85 Ledezma G A, Bejan A, Errera M R. Constructal tree networks for heat transfer. *J Appl Phys*, 1997, 82(1): 89–100
- 86 Kuddusi L, Denton J C. Analytical solution for heat conduction problem in composite slab and its implementation in constructal solution for cooling of electronics. *Energy Convers Mgmt*, 2007, 48(4): 1089–1105
- 87 伍文君, 陈林根, 孙丰瑞. 导热优化的“树网”构造法的改进. 中国科学 E: 技术科学, 2006, 36(7): 773–781
- 88 伍文君. 基于构形理论的导热优化方法改进. 硕士学位论文. 武汉: 海军工程大学, 2005
- 89 Ghodoossi L, Egrihan N. Exact solution for cooling of electronics using constructal theory. *J Appl Phys*, 2003, 93(8): 4922–4929
- 90 Wu W J, Chen L G, Sun F R. On the “area to point” flow problem based on constructal theory. *Energy Convers Mgmt*, 2007, 48(1): 101–105
- 91 Ghodoossi S, Egrihan N. Conductive cooling of triangular shaped electronics using constructal theory. *Energy Convers Mgmt*, 2004, 45(6): 811–828
- 92 Neagu M, Bejan A. Three-dimensional tree constructs of ‘constant’ thermal resistance. *J Appl Phys*, 1999, 86(12): 7107–7115
- 93 Neagu M, Bejan A. Constructal-theory tree networks of ‘constant’ thermal resistance. *J Appl Phys*, 1999, 86(2): 1136–1144
- 94 Ghodoossi S, Egrihan N. Inward constructal design for cooling of triangular shaped electronics. ECOS’03, June 30–July 2, 2003, Copenhagen, Denmark. 1169–1176
- 95 Bejan A, Dan N. Two constructal routes to minimal heat flow resistance via greater internal complexity. *Trans ASME, J Heat Transfer*,

- 1999, 121(1): 6–14
- 96 Ghodoossi L. Conceptual study on constructal theory. *Energy Convers Mgmt*, 2004, 45(9-10): 1379–1395
- 97 Zhou S B, Chen L G, Sun F R R. Optimization of constructal volume-point conduction with variable cross-section conducting path. *Energy Convers Mgmt*, 2007, 48(1): 106–111
- 98 Almogbel M, Bejan A. Conduction trees with spacings at the tips. *Int J Heat Mass Transfer*, 1999, 42(20): 3739–3756
- 99 Almogbel M, Bejan A. Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction. *Int J Heat Mass Transfer*, 2001, 44(22): 4185–4194
- 100 Kalyon M, Sahin A Z. Application of optimal control theory in pipe insulation. *Numerical Heat Transfer Part A*, 2002, 41(4): 391–402
- 101 Lorente S, Bejan A. Combine ‘flow and strength’ geometry optimization: Internal structure in a vertical insulating wall with air cavities and prescribed strength. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(16): 3313–3320
- 102 Pramanick A K, Das P K. Method of synthetic constraint, Fermat’s principle and the constructal law in the fundamental principle of conductive heat transport. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(9/10): 1823–1832
- 103 Lorente S, Wechsolt W, Bejan A. Optimization of tree-shaped flow distribution structures over a disc-shaped area. *Int J Energy Res*, 2003, 27(8): 715–723
- 104 Rocha L A O, Lorente S, Bejan A. Conduction tree networks with loops for cooling a heat generating volume. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(15/16): 2626–2635
- 105 Lorente S, Wechsolt W, Bejan A. Tree-shaped flow structures design by minimizing path length. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(16): 3299–3312
- 106 Biserni C, Rocha L A O, Bejan A. Inverted fins: geometric optimization of the intrusion into a conducting wall. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(12/13): 2577–2586
- 107 Biserni C, Rocha L A O, Stanescu G, et al. Constructal H-shaped cavities according to Bejan’s theory. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(11/12): 2132–2138
- 108 Rocha L A O, Lorenzini E, Biserni C, et al. Geometric optimization of shapes on the basis of Bejan’s constructal theory. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(10): 1281–1288
- 109 Lorenzini G, Rocha L A O. Constructal design of Y-shaped assembly of fins. *Int J Heat Transfer*, 2006, 49(23/24): 4452–4457
- 110 Kacimov A R. Optimal design of fibers subject to steady heat conduction. *Heat Mass Transfer*, 2007, 43(4): 319–324
- 111 Gosselin L, Bejan A. Constructal heat trees at micro and nanoscales. *J Appl Phys*, 2004, 96(10): 5852–5859
- 112 Ghodoossi L. Entropy generation rate in uniform heat generating area cooled by conducting paths: Criterion for rating the performance of constructal designs. *Energy Convers Mgmt*, 2004, 45(18): 2951–2969
- 113 Vargas J V C, Bejan A, Siems D L. Integrative thermodynamic optimization of the crossflow heat exchanger for an aircraft environmental control system. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2001, 123(4): 760–769
- 114 Vargas J V C, Bejan A. Integrative thermodynamic optimization of the environmental control system of an aircraft. *Int J Heat Mass Transfer*, 2001, 44(20): 3907–3917
- 115 周圣兵, 陈林根, 孙丰瑞. 基于构形理论的体点导热熵产生最小化. 热科学与技术, 2007, 6(4): 294–299
- 116 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于矩形单元体的以耗散最小为目标的“体点”导热构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(2): 278–285
- 117 Wei S H, Chen L G, Sun F R. Constructal entransy dissipation minimization for “volume-point” heat conduction without the premise of optimized last-order construct. *Int J Exergy*, 2010, 7(5): 627–639
- 118 Wei S H, Chen L G, Sun F R. Constructal entransy dissipation rate minimization of round tube heat exchanger cross-section. *Int J Thermal Sci*, 2011, 50(7): 1285–1292
- 119 Chen L G, Wei S H, Sun F R. Constructal entransy dissipation rate minimization of a disc. *Int J Heat Mass Transfer*, 2011, 54(1-3): 210–216
- 120 Wei S H, Chen L G, Sun F R. Constructal entransy dissipation minimization for “volume-point” heat conduction based on triangular element. *Thermal Sci*, 2010, 14(4): 1075–1088
- 121 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于耗散率最小的离散和连续变截面导热通道构形优化. 中国科学: 技术科学, 2010, 40(10): 1189–1200
- 122 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 以耗散最小为目标的空腔几何构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(12): 1949–1957
- 123 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. T 形腔耗散最小构形优化. 科学通报, 2009, 54(17): 2605–2612
- 124 Xie Z H, Chen L G, Sun F R. Geometry optimization of T-shaped cavities according to constructal theory. *Math Comp Modell*, 2010,

- 52(9-10): 1538–1546
- 125 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于能耗散率最小的“盘点”导热构形优化. 科学通报, 2010, 55(24): 2427–2437
- 126 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于变截面单元体的能耗散率最小导热构形优化. 科学通报, 2011, 56(17): 1401–1410
- 127 Gersborg-Hansen A, Bendsoe M P, Sigmund O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Struct Multidisc Optim*, 2006, 31: 251–259
- 128 Xia Z Z, Cheng X G, Li Z X, et al. Bionic optimization of heat transport paths for heat conduction problems. *J Enhanced Heat Transfer*, 2004, 11(2): 119–131
- 129 程新广, 李志信, 过增元. 基于仿生优化的高效导热通道的构造. 中国科学 E: 技术科学, 2003, 33(1): 251–256
- 130 Mathieu-Potvin F, Gosselin L. Optimal conduction pathways for cooling a heat generating body: A comparison exercise. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(15-16): 2996–3006
- 131 Boichot R, Luo L. Heat transfer intensification using a cellular automation. *Proc 5th Int Confer Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodyn*, July 1-4, 2007, Sun City, South Africa
- 132 Xu X H, Liang X G, Ren J X. Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(9-10): 1675–1682
- 133 Bejan A, Errera M R. Deterministic tree network for fluid flow: Geometry for minimal flow resistance between a volume and one point. *Fractals*, 1997, 5(4): 685–695
- 134 Bejan A. Constructal tree network for fluid flow between a finite-size volume and one source or sink. *Rev Gen Therm*, 1997, 36(8): 592–604
- 135 Murray C D. The physiological principle of minimal work, in the vascular system, and the cost of blood-volume. *Acad Nat Sci*, 1926, 12(3): 207–214
- 136 Wechsolt W, Ordonez J C, Kosaraju S. Constructal dendritic geometry and the existence of asymmetric bifurcation. *J Appl Phys*, 2006, 100(11): 113514
- 137 Franco W, Sen M, Yang K T. Flows in large, self-similar tree networks and their control. *Proc Royal Society A-Maths Phys Eng Sci*, 2006, 462(2074): 2907–2926
- 138 Durand M. Architecture of optimal transport networks. *Phys Rev E*, 2006, 73(1): 016116
- 139 Pramanick A K, Das P K. Note on constructal theory of organization in nature. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(10): 1974–1981
- 140 Bejan A, Rocha L A O, Lorente S. Thermodynamic optimization of geometry: T- and Y-shaped constructs of fluid streams. *Int J Therm Sci*, 2000, 39(9): 949–960
- 141 Wechsolt W, Lorente S, Bejan A. Tree-shaped flow structures with local junction losses. *Int J Heat Mass*, 2006, 49(17/18): 2957–2964
- 142 Tondeur D, Luo L A. Design and scaling laws of ramified fluid distributors by the constructal approach. *Chem Eng Sci*, 2004, 59(8-9): 1799–1813
- 143 Luo L A, Tondeur K. Optimal distribution of viscous dissipation in a multi-scale branched fluid distributor. *Int J Thermal Sci*, 2005, 44(12): 1131–1141
- 144 Luo L A, Tondeur D, Gall H L, et al. Constructal approach and multi-scale components. *Appl Therm Eng*, 2007, 27(10): 1708–1714
- 145 Luo L A, Tondeur D. Multiscale optimization of flow distribution by constructal approach. *China Particuology*, 2005, 3(6): 329–336
- 146 Lorente S, Wechsolt W, Bejan A. Tree-shaped flow structures design by minimizing path length. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(16): 3299–3312
- 147 Wechsolt W, Lorente S, Bejan A. Optimal tree-shaped networks for fluid flow in a disc-shaped body. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(25): 4911–4924
- 148 Lorente S, Wechsolt W, Bejan A. Optimization of tree-shaped flow distribution structures over a disc-shaped area. *Int J Energy Res*, 2003, 27(8): 715–723
- 149 Bejan A, Lorente S. Equilibrium and nonequilibrium flow system architectures. *Heat Tech*, 2004, 22(1): 85–92
- 150 Wechsolt W, Lorente S, Bejan A. Tree-shaped networks with loops. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(3): 573–583
- 151 Bejan A. Thermodynamic optimization of geometry in engineering flow systems. *Exergy Int J*, 2001, 1(4): 269–277
- 152 Gosselin L, Bejan A. Tree networks for minimal pumping power. *Int J Therm Sci*, 2005, 44(1): 53–63
- 153 Gosselin L. Optimization of tree-shaped fluid networks with size limitations. *Int J Therm Sci*, 2007, 46(5): 434–443
- 154 Bejan A. Optimal internal structure of volumes cooled by single-phase forced and natural convection. *Trans ASME, J Electron Packaging*, 2003, 125(6): 200–207
- 155 Joucavie M, Gosselin L, Bello-Ochende T. Maximum heat transfer density with rotating cylinders aligned in cross-flow. *Int J Heat Mass*

- Transfer, 2008, 51(5/6): 1238–1250
- 156 Zimparov V D, da Silva A K, Bejan A. Thermodynamic optimization of tree-shaped flow geometries. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(7): 1619–1630
- 157 Zimparov V D, da Silva A K, Bejan A. Thermodynamic optimization of tree-shaped flow geometries with constant channel wall temperature. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(25–26): 4839–4849
- 158 Wechsolt W, Lorente S, Bejan A. Tree-shaped flow structures: Are both thermal-resistance and flow-resistance minimizations necessary. *Int J Exergy*, 2004, 1(1): 2–17
- 159 da Silva A K, Lorente S, Bejan A. Constructal multi-scale tree-shaped heat exchangers. *J Appl Phys*, 2004, 96(3): 1709–1718
- 160 da Silva A K, Bejan A. Dendritic Counterflow heat exchanger experiments. *Int J Therm Sci*, 2006, 45(9): 860–869
- 161 Zimparov V D, da Silva A K, Bejan A. Constructal tree-shaped parallel flow heat exchangers. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(23/24): 4558–4566
- 162 Bejan A, Fautrelle Y. Constructal multi-scale structure for maximal heat transfer density. *Acta Mech*, 2003, 163(1): 39–49
- 163 da Silva A K, Bejan A. Constructal multi-scale structure for maximal heat transfer density in natural convection. *Int J Heat Fluid Flow*, 2005, 26(1): 34–44
- 164 Bello-Ochende T, Bejan A. Maximal heat transfer density: Plates with multiple lengths in forced convection. *Int J Therm Sci*, 2004, 43(12): 1181–1186
- 165 Bello-Ochende T, Bejan A. Constructal multi-scale cylinders in cross-flow. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(7): 1373–1383
- 166 Bello-Ochende T, Bejan A. Constructal multi-scale cylinders with natural convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(21/22): 4300–4306
- 167 Gosselin L. Fitting the flow regime in the internal structure of heat transfer systems. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 33(1): 30–38
- 168 Wechsolt W, Bejan A, Lorente S. Tree-shaped flow architectures: Strategies for increasing optimization speed and accuracy. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 2005, 48(8): 731–744
- 169 Muzychka Y S. Constructal multi-scale design of compact micro-tube heat sinks and heat exchangers. *Int J Therm Sci*, 2007, 46(3): 245–252
- 170 Bejan A, Dan N. Constructal trees of convective fins. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 1999, 121(3): 675–682
- 171 Bejan A, Almogbel M. Constructal T-shaped fins. *Int J Heat Mass Transfer*, 2000, 43(12): 2101–2115
- 172 Alebrahim A, Bejan A. Constructal trees of circular fins for conductive and convective heat transfer. *Int J Heat Mass Transfer*, 1999, 42(19): 3585–3597
- 173 Bobaru F, Rachakonda S. Optimal shape profiles for cooling fins of high and low conductivity. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(23): 4953–4966
- 174 Almogbel M. Constructal tree-shaped fins. *Int J Thermal Sci*, 2005, 44(4): 342–348
- 175 Lorenzini G, Moretti S. Numerical analysis on heat removal from Y-shaped fins: Efficiency and volume occupied for a new approach to performance optimization. *Int J Therm Sci*, 2007, 46(6): 573–579
- 176 Lorenzini G, Moretti S. Numerical analysis of heat removal enhancement with extended surfaces. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(3–4): 746–755
- 177 Lorenzini G, Moretti S. A CFD application to optimize T-shaped fins: Comparisons to the constructal theory's results. *Tans ASME, J Electron Packaging*, 2007, 129(3): 324–327
- 178 Bonjour J, Rocha L A O, Bejan A et al. Dendritic fins optimization for a coaxial two-stream heat exchanger. *Int J Heat Mass Transfer*, 2003, 47(1): 111–124
- 179 Xie Z H, Chen L G, Sun F R. Constructal optimization of twice level Y-shaped assemblies of fins by taking maximum thermal resistance minimization as objective. *Sci China Tech Sci*, 2010, 53(10): 2756–2764
- 180 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. T 形肋耗散率最小与最大热阻最小构形优化的比较研究. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41(7): 962–970
- 181 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于耗散率最小的伞形柱状肋片构形优化. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41(3): 365–373
- 182 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 强迫对流换热冷却的产热体耗散率最小构形优化. *科学通报*, 2011, 56(24): 2032–2039
- 183 肖庆华, 陈林根, 孙丰瑞. 基于耗散率和流阻最小的冷却流道构形优化. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41(2): 251–261
- 184 Bejan A. Dendritic constructal heat exchanger with small-scale crossflows and larger-scales counterflows. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(23): 4607–4620
- 185 Matos R S, Vargas J V C, Laursen T A, et al. Optimally staggered finned circular and elliptic tubes in forced convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(6): 1347–1359
- 186 Matos R S, Laursen T A, Vargas J V C, et al. Three-dimensional optimization of staggered finned circular and elliptic tubes in forced

- convection. *Int J Therm Sci*, 2004, 43(5): 477–487
- 187 Walsh E J, Grimes R. Constructal theory of the minimum requirements for forced convection cooling solutions. *Proc 2005 ASME Summer Heat Transfer Confer*, July 17–22, 2005, San Francisco, California, USA
- 188 Raja V A P, Basak T, Das S K. Heat transfer and fluid flow in a constructal heat exchanger. *Proceedings of 15th International Conference on Enhanced, Compact and Ultra-Compact Heat Exchangers: Science, Engineering and Technology*, Whistler, Canada, Sept 11–16, 2005, 147–153
- 189 da Silva A K, Lorente S, Bejan A. Optimal distribution of discrete heat sources on a plate with laminar convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(10–11): 2139–3148
- 190 da Silva A K, Lorente S, Bejan A. Constructal multi-scale structures with asymmetric heat sources of finite thickness. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(13): 2662–2672
- 191 da Silva A K, Lorente S, Bejan A. Optimal distribution of discrete heat sources on a wall with natural convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(2): 203–214
- 192 da Silva A K, Lorenzini G, Bejan A. Distribution of heat sources in vertical open channels with natural convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(8): 1462–1469
- 193 da Silva A K, Gosselin L. Optimal geometry of L and C-shaped channels for maximum heat transfer rate in natural convection. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(3): 609–620
- 194 da Silva A K, Gosselin L. Constructal peripheral cooling of a rectangular heat-generating area. *Trans ASME, J Electronic Packaging*, 2006, 128(4): 432–440
- 195 Lorente S, Bejan A. Combine ‘flow and strength’ geometry optimization: internal structure in a vertical insulating wall with air cavities and prescribed strength. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(16): 3313–3320
- 196 Gosselin L, Bejan A, Lorente S. Combined ‘heat flow and strength’ optimization of geometry: Mechanical structures most resistant to thermal attack. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(14–16): 3477–3489
- 197 Gosselin L, da Silva A K. Combined “heat transfer and power dissipation” optimization of nanofluid flows. *Appl Phys Lett*, 2004, 85(18): 4160–4162
- 198 Gosselin L, Bejan A. Constructal thermal optimization of an electromagnet. *Int J Therm Sci*, 2004, 43(4): 331–338
- 199 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 以耗散最小为目标的电磁体多学科构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(9): 1606–1613
- 200 Wei S H, Chen L G, Sun F R. Constructal complex-objective optimization of electromagnet based on magnetic induction and maximum temperature difference. *Rev Mexi Fis*, 2010, 56(3): 245–250
- 201 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 基于热流与强度复合目标的立式绝热壁构形优化. 中国科学: 技术科学, 2011, 41(6): 809–820
- 202 Chen L G, Xie Z H, Sun F R. Multiobjective constructal optimization of an insulating wall combining heat flow, strength and weight. *Int J Thermal Sci*, 2011, 50(9): 1782–1789
- 203 Wang K, Lorente S, Bejan A. Vascular structures for volumetric cooling and mechanical strength. *J Appl Phys*, 2010, 107(4): 044901
- 204 Rocha L A O, Bejan A. Geometric optimization of periodic flow and heat transfer in a volume cooled by parallel tubes. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2001, 123(2): 233–239
- 205 Nelson R A, Bejan A. Constructal optimization of internal flow geometry in convection. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 1998, 120(2): 357–363
- 206 Neagu M, Bejan A. Constructal placement of high-conductivity inserts in a slab: Optimal design of roughness. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2001, 123(6): 1184–1189
- 207 Bello-Ochende T, Bejan A. Fitting the duct to the “body” of the convective flow. *Int J Heat Mass Transfer*, 2003, 46(10): 1693–1701
- 208 Cizmas P G A, Bejan A. Optimal placement of cooling flow tubes in a wall heated from the side. *Int J Transfer Phnomena*, 2001, 3(4): 331–343
- 209 Kalyon M, Sahin A Z. Application of optimal control theory in pipe insulation. *Numerical Heat Transfer Part A*, 2002, 41(4): 391–402
- 210 Zamfirescu C, Bejan A. Constructal tree-shaped two-phase flow for cooling a surface. *Int J Heat Mass Transfer*, 2003, 46(15): 2785–2797
- 211 Zamfirescu C, Bejan A. Tree-shaped structures for cold storage. *Int J Refrig*, 2005, 28(2): 231–241
- 212 Wang X Q, Mujumdar A S, Yap C. Thermal characteristics of tree-shaped microchannel nets for cooling of a rectangular heat sink. *Int J Therm Sci*, 2006, 45(11): 1103–1112
- 213 Wang X Q, Mujumdar A S, Yap C. Effect of bifurcation angle in tree-shaped microchannel networks. *J Appl Phys*, 2007, 102(7): 073530
- 214 Wang X Q, Yap C, Mujumdar A S. Laminar heat transfer in constructal microchannel networks with loops. *Trans ASME, J Electronic Packaging*, 2006, 128(2): 273–280

- 215 Muzychka Y S. Constructal design of forced convection cooled microchannel heat sinks and heat exchangers. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(21-22): 3119–3127
- 216 Bello-Ochende T, Liebenberg L, Meyer J P. Constructal cooling channels for micro-channel heat sinks. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(21-22): 4141–4150
- 217 Moreno R M, Tao Y. Thermal and flow performance of a microconvective heat sink with three-dimensional constructal channel configuration. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2006, 128(8): 740–751
- 218 Luo L, Fan Y, Tondeur D. Heat exchanger: From micro- to multi-scale design optimization. *Int J Energy Res*, 2007, 31(13): 1266–1274
- 219 陈永平, 郑平. 新型分形树状微通道散热器的试验研究. *工程热物理学报*, 2006, 27(5): 853–855
- 220 Chen Y P, Cheng P. An experimental investigation on the thermal efficiency of fractal tree-like microchannel nets. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 2005, 32(7): 931–938
- 221 Xu P, Yu B M, Yun M J, et al. Heat conduction in fractal tree-like branched networks. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(19-20): 3746–3751
- 222 Yu B, Li B W. Fractal-like tree networks reducing the thermal conductivity. *Phys Rev E*, 2006, 73(6): 066302
- 223 Xu P, Yu B M. The scaling laws of transport properties for fractal-like tree networks. *J Appl Phys*, 2006, 100(10): 104906
- 224 Xu P, Yu B M, Feng Y J, et al. Permeability of the fractal disk-shaped branched network with tortuosity effect. *Phys Fluids*, 2006, 18(7): 078103
- 225 Xu P, Yu B M, Feng Y J, et al. Analysis of permeability for the fractal-like tree network by parallel and series models. *Physica A*, 2006, 369(2): 884–894
- 226 Wang X Q, Mujumdar A S, Yap C. Numerical analysis of blockage and optimization of heat transfer performance of fractal-like microchannel nets. *Trans ASME, J Electronic Packaging*, 2006, 128(1): 38–45
- 227 Chen J, Yu B M, Xu P, et al. Fractal-like tree networks increasing the permeability. *Phys Rev E*, 2007, 75(5): 056301
- 228 Wang L. Next frontier in nanofluids research and development. Proc of 17th International Conference on Composites or Nano Engineering, Honolulu, Hawaii, USA, July 26-Aug 1, 2009. 1085–1086
- 229 Bai C, Wang L Q. Constructal design of particle volume fraction in nanofluids. *Tans ASME, J Heat Transfer*, 2009, 131(11): 112402
- 230 Bai C, Wang L Q. Constructal allocation of nanoparticles in nanofluids. *Tans ASME, J Heat Transfer*, 2010, 132(5): 052404
- 231 Fan J, Wang L Q. Constructal design of nanofluids. *Int J Heat Mass Transfer*, 2010, 53(19/20): 4238–4247
- 232 Bejan A. Designed porous media: Maximal heat transfer density at decreasing length scales. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(14): 3073–3083
- 233 Ordonez J C, Bejan A, Cherry R S. Designed porous media: Optimally nonuniform flow structures connecting one point with more points. *Int J Therm Sci*, 2003, 42(9): 857–870
- 234 Bejan A. Designed porous media: maximal heat transfer density at decreasing length scales. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(14-16): 3073–3083
- 235 Wildi-Tremblay P, Gosselin L. Layered porous media architecture for maximal cooling. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(3/4): 464–478
- 236 Leblond G, Gosselin L. Effect of non-local equilibrium on minimal thermal resistance porous layered systems. *Int J Heat Fluid Flow*, 2008, 29(1): 281–291
- 237 Kacimov A R. Analytical solution and shape optimization for groundwater flow through a leaky porous trough subjacent to an aquifer. *Proc R Soc A*, 2006, 462(2069): 1409–1423
- 238 Lorente S. Constructal view of electrokinetic transfer through porous media. *J Phys D-Appl Phys*, 2007, 40(9): 2941–2947
- 239 Lorente S, Bejan A. Heterogeneous porous media as multiscale structures for maximum flow access. *J Appl Phys*, 2006, 100(11): 114909
- 240 Azoumah Y, Mazet N, Neveu P. Constructal network for heat and mass transfer in a solid-gas reactive porous medium. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(14): 2961–2970
- 241 Azoumah Y, Neveu P, Mazet N. Constructal design combined with entropy generation minimization for solid-gas reactors. *Int J Therm Sci*, 2006, 45(7): 716–728
- 242 Azoumah Y, Neveu P, Mazet N. Optimal design of thermochemical reactors based on constructal approach. *AIChE J*, 2007, 53(3): 1257–1266
- 243 Zhou S B, Chen L G, Sun F R. Constructal entropy generation minimization for heat and mass transfer in a solid-gas reactor based on triangular element. *J Phys D-Appl Phys*, 2007, 40(7): 3545–3550
- 244 Morega A, Bejan A. A constructal approach to the optimal design of photovoltaic cells. *Int J Green Energy*, 2005, 2(3): 233–242
- 245 Chen L G, Zhou S B, Sun F R. Constructal minimization of emitter grid resistance for a solar cell with variable cross-section collectors. *Indian J Pure Appl Phys*, 2010, 48(8): 586–592

- 246 Bhakta A, Bandyopadhyay S. Constructal optimization of top contact metallization of a photovoltaic solar cell. *Int J Thermodyn*, 2005, 8(4): 175–181
- 247 Vargas J V C, Bejan A. Thermodynamic optimization of internal structure in a fuel cell. *Int J Energy Res*, 2004, 28(4): 319–339
- 248 Vargas J V C, Ordonez J C, Bejan A. Constructal flow structure for a PEM fuel cell. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47(19/20): 4177–4193
- 249 Vargas J V C, Ordonez J C, Bejan A. Constructal PEM fuel cell stack design. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(21/22): 4410–4427
- 250 Ordonez J C, Chen S, Vargas J V C, et al. Constructal flow structure for a single SOFC. *Int J Energy Res*, 2007, 31(14): 1337–1357
- 251 Senn S M, Poulikakos D. Polymer electrolyte fuel cells with porous materials as fluid distributors and comparisons with traditional channeled systems. *Trans ASME, J Heat Transfer*, 2004, 126(3): 410–418
- 252 Senn S M, Poulikakos D. Tree network channels as fluid distributors constructing double-staircase polymer electrolyte fuel cells. *J Appl Phys*, 2004, 96(1): 842–852
- 253 Senn S M, Poulikakos D. Laminar mixing, heat transfer and pressure drop in tree-like microchannel nets and their application for thermal management in polymer electrolyte fuel cells. *J Power Sources*, 2004, 130(1/2): 178–191
- 254 Senn S M, Poulikakos D. Multistage polymer electrolyte fuel cells based on nonuniform cell potential distribution functions. *Electrochim Comm*, 2005, 7(7): 773–780
- 255 Chen S, Ordonez J C, Vargas J V C. Transient operation and shape optimization of a single PEM fuel cell. *J Power Sources*, 2006, 162(1): 356–368
- 256 Bejan A, Badescu V, De Vos A. Constructal theory of economics. *Appl Energy*, 2000, 67(1): 37–60
- 257 Ghodoossi S, Egriçan N. Flow area structure generation in point to area or area to point flows. *Energy Convers Mgmt*, 2003, 44(16): 2609–2623
- 258 Ghodoossi S, Egriçan N. Flow area optimization in point to area or area to point flows. *Energy Convers Mgmt*, 2003, 44(16): 2589–2608
- 259 Zhou S B, Chen L G, Sun F R. Optimization of constructal economics for volume to point transport. *Appl Energy*, 2007, 84(5): 505–511
- 260 Allen J K, Rosen D W, Mistree F. An approach to designing sustainable enterprise systems. *Engineering Systems Symposium*, Cambridge University, Cambridge, Mar 31, 2004
- 261 Carone M J, Williams C B, Allen J, et al. An application of constructal theory in the multi-objective design of product platforms. *Pro. ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, Sept 2-6, 2003, Chicago, Illinois USA
- 262 Hernandez G, Allen J K, Mistree F. Platform design for customizable products as a problem of access in a geometric space. *Eng Opt*, 2003, 35(3): 229–254
- 263 Williams C B, Allen J K, Mistree F. Platform design for customizable products and production processes as a problem of access in a geometric space. *NSF Design, Service and Manufacturing Grantees and Research Conference*, Jan 9, 2004, SMU – Dallas, Texas
- 264 Williams C B, Allen J K, Rosen D W, et al. Designing platforms for customizable products in markets with non-uniform demand. *Pro. Proceedings of ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, Salt Lake City, Utah, USA
- 265 Lorente S, Wechsoltol W, Bejan A. Fundamental of tree-shaped networks of insulated pipes for hot water and exergy. *ECOS'01*, July 4-6, 2001, Istanbul. 59–68
- 266 Wechsoltol W, Lorente S, Bejan A. Tree-shaped insulated designs for the uniform distribution of hot water over an area. *Int Heat Mass Transfer*, 2001, 44(16): 3111–3123
- 267 Wechsoltol W, Lorente S, Bejan A. Development of tree-shaped flows by adding new users to existing networks of hot water pipes. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45(4): 723–733
- 268 Lorente S, Wechsoltol W, Bejan A. Tree-shaped flow structures for human-scale and small-scales applications. *Heat Tech*, 2004, 22(1): 15–25
- 269 Miguel A F. Constructal design of solar energy-based systems for buildings. *Energy Building*, 2008, 40(6): 1020–1030
- 270 Lewins J. Bejan's constructal theory of equal potential distribution. *Int J Heat Mass Transfer*, 2003, 46(9): 1541–1542
- 271 Arion V, Cojocari A, Bejan A. Constructal tree shaped networks for distribution of electrical power. *Energy Convers Mgmt*, 2003, 44(6): 867–891
- 272 Arion V, Cojocari A, Bejan A. Integral measure of electric power distribution networks: Load-length curves and line-network multipliers. *Engng Convers Mgmt*, 2003, 44(7): 1039–1051
- 273 Bohn S, Magnasco M O. Structure, scaling, and phase transition in the optimal transport network. *Phys Rev Lett*, 2007, 98(8): 088702
- 274 Durand M. Structure of optimal transport networks subject to a global constraint. *Phys Rev Lett*, 2007, 98(8): 088701
- 275 Bejan A, Ledezma G A. Streets tree networks and urban growth: Optimal geometry for quickest access between a finite-size volume and

- one point. *Phys A*, 1998, 255(1): 211–217
- 276 Reis A H. Constructal view of the scaling laws of street networks—The dynamics behind geometry. *Physica A*, 2008, 387(2/3): 617–622
- 277 Bejan A. Constructal Theory: Tree-shaped flows and energy systems for aircraft. *Tans AIAA, J Aircraft*, 2003, 40(1): 43–48
- 278 Bejan A. The tree of convective heat streams: Its thermal insulation function and the predicted 3/4-power relation between body heat loss and body heat loss and body size. *Int J Heat Mass Transfer*, 2001, 44(9): 699–704
- 279 Bejan A. Theory of organization in nature: Pulsating physiological processes. *Int J Heat Mass Transfer*, 1997, 40(9): 2097–2104
- 280 Reis A H, Miguel A F. Constructal theory of flow architecture of the lungs. *Med Phys*, 2004, 31(5): 1135–1140
- 281 Reis A H, Miguel A F. Constructal theory and flow architectures in living systems. *Therm Sci*, 2006, 10(1): 57–64
- 282 Wang K M, Lorente S, Bejan A. Vascularized networks with two optimized channel sizes. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39(14): 3086–3096
- 283 Dai W, Bejan A, Tang X, et al. Optimal temperature distribution in a three dimensional triple-layered skin structure with embedded vasculature. *J Appl Phys*, 2006, 99(10): 104702
- 284 Tang X, Dai W, Nassar R, et al. Optimal temperature distribution in a three-dimensional triple-layered skin structure embedded with artery and vein vasculature. *Numer Heat Transfer Part A*, 2006, 50(9): 809–834
- 285 Wang H, Dai W, Bejan A. Optimal temperature distribution in a 3D triple-layered skin structure embedded with artery and vein vasculature and induced by electromagnetic radiation. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(9/10): 1843–1854
- 286 Kim S, Lorente S, Bejan A. Vascularized materials with heating from one side and coolant forced from the other side. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50(17/18): 3498–3506
- 287 Reis A H. constructal view of scaling laws of river basins. *Geomorphology*, 2006, 78(3/4): 201–206
- 288 Horton R E. Drainage basin characteristics. *Trans Am Geophys Union*, 1932, 13: 350–361
- 289 Hack J T. Studies of Longitudinal Profiles in Virginia and Maryland. Washington: USGS Professional Papers 294-B, 1957
- 290 Huang H, Nanson G C. Hydraulic geometry and maximum flow efficiency as products of the principle of least action. *Earth Surf Process Landf*, 2000, 25: 1–16
- 291 Bejan A, Reis A H. Thermodynamic optimization of global circulation and climate. *Int J Energy Res*, 2005, 29(4): 303–316
- 292 Reis A H, Bejan A. Constructal theory of global circulation and climate. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49(11/12): 1857–1875
- 293 Mauroy B, Filoche M, Weibel E R, et al. An optimal bronchial tree may be dangerous. *Nature*, 2004, 427(6975): 633–636