

# 灵活的运筹学和应用数学

杨德庄

(中国科学技术大学研究生院, 北京 100039)

**摘要** 从易被人们忽视的 LP 产生过程的创新点入手, 简述了数学规划 (OR&AM 的重要分支) 从最初形成起, 就体现了应用数学研究如同纯数学研究一样, 其问题的提出和它的数学模型、新概念的引进、数学思想与技巧的运用、简单性与美, 是非常重要的; 另一方面应用数学与纯数学在问题的提出、研究的目的和美学观点等方面有着显著的差异. 阐述了著名数学家华罗庚教授开创的应用数学思想和方法论几个创新点的概要, 其中包括应用数学与纯数学的共性与差异、评价标准、应用数学的分类观点、推广应用型与创造型、模型与算法一体化方法、更动目标或约束方法, 等等.

**关键词** 应用数学 模型与算法一体化方法 更动目标或约束方法

运筹学和应用数学有着广泛的研究领域和众多的分支. 为此, 我们先从数学规划谈起.

在经济、军事和社会发展三大系统中, 最优化问题是系统设计、系统管理与控制、系统改造和系统运行决策的主题. 人们总是希望自己设计的系统或已有系统的管理、运行和改造决策达到某种意义下的最优化. 众所周知, 最优化问题一般由两大部分组成: 一是目标函数, 二是约束条件. 它的数学描述, 也就是它的数学模型往往是所谓的数学规划, 其一般形式为

$$\begin{aligned} & \max f(X) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} g_i(X) \leq b_i, & i \in I, \\ \text{指数集 } I \text{ 可为空集.} \end{cases} \end{aligned}$$

运筹学家和应用数学家对这种单目标的数学规划, 根据函数  $f(X)$  与  $g_i(X)$ ,  $i \in I$  的不同类型加以研究. 对于一些类型提出了若干特殊求解算法. 其中研究最早、最成熟的是所谓线性规划 (简记 LP, 即  $f, g_i$  皆为线性函数,  $X \geq 0$ ). 最早研究 LP 的是苏联数学家 Kantorovich<sup>[1]</sup>, 而在欧美, 美国数学家 Dantzig 被称为线性规划之父<sup>[2]</sup>. 本文以 Dantzig 研究的 LP 及其单纯形法<sup>[3]</sup> 作为讨论的起点.

## 1 LP 形成过程中的两个重要创新与启示

### 1.1 目标函数的提出——一种突破和创新

Dantzig 说他提出线性规划模型及其单纯形算法经过了十分缓慢的醒悟过程. 1946 年

春天,他在美国空军任审计长的一名数学顾问. 由于当时空军在制定编制计划和调度时采用了一套非常复杂的基本规则和工作程序,激发了他着手建立一种模型,去描述各种活动之间的关系,这些关系是一些制约条件的限制,它们的数学描述是一组线性不等式,后来人们称之为约束条件,但没有目标函数(当时尚无此概念). 当时在军界,人们说“我们的目标是赢得这场战争”,在实业界,人们说“我们的目标是赢利”,Dantzig说“人们从未发现所述目标与实现这些目标的活动之间的直接关系”<sup>[2]</sup>.

起初他按没有目标函数或没有目标这种方式对问题加以考虑. 为了从可行解中选取在某种意义下最优的一个解,他曾设法用添加基本规则的方法去做(即增加约束条件的办法),不久他放弃了这条途径.

后来,他引进了目标函数的概念,在求解线性不等式组的基础上,引进一个线性函数的极值化( $\max C^T X$  or  $\min C^T X$ ). 这似乎把问题复杂化了. 然而正是由于引进了目标函数,从整体模型上考虑问题(从最优化问题的两个要素——目标与约束上考虑问题),他才创造了单纯形法.

## 1.2 单纯形法的思想与技巧的产生

(1)几何直观与基本定理. 1947年夏天,他开始寻找一种方法,从观察可行解区域是凸集(即多面体)着手,发现可以利用把一个由极点沿着棱移动到下一个极点的方法,逐步改进以在有限步达到最优,猜想到了LP的基本定理.

(2)几何直观与代数表示. 以上是任何数学家都可能这样来考虑的,但也可能立即打消这种念头. 他一开始也放弃过这种想法. 后来他用按列的维数而不是按行的维数来考虑这个问题的几何空间维数,奇妙出现了!问题的代数表述的关键被抓住了.

LP形成过程给人们的启示:首先,人们看到了应用数学研究(通常,人们把Dantzig的工作归属到应用数学范畴),如同纯数学研究一样,问题的提出和它的数学描述、新概念的引进、数学思想与技巧的运用、数学处理的简单性与美,同样是非常重要的. 著名数学家M.F. Atiyah认为,几乎所有的领域都要用到数学(有的数学家认为一切问题都是数学问题). 无论纯数学还是应用数学,要想对集中注意力的专题用数学来分析,首先要对问题进行数学的提炼. 对此,他说:“要剥去所有无关的东西,把剩下的内容转换成适当的数学形式,这种工作的成功依赖于能否找到恰如其分的数学概念和表达形式,以及随后能否找出合适的分析与计算的有效技巧.”“在这种抽象的世界中,简单性与美获得了绝对的重要性.”<sup>[4]</sup>这种观点和著名数学家华罗庚教授的观点完全一致. 第二,数学规划从Dantzig的第一个模型开始,问题的提出就有强烈的实际背景,它产生于数学的外部. 这是应用数学研究之一大特点. 第三,数学规划从一开始,它的研究目的就是为了解决实际问题. 这又是应用数学研究的一个特点. 第四,Dantzig的模型与算法是相互依存的.

## 2 纯数学与应用数学(包括OR)的评价标准、华罗庚教授的应用数学分类观

这是一个极端重要的问题,但本文不想对如何评价纯数学研究与应用数学研究展开讨论,只想简单提及它.

当今纯数学分支之细,各分支理论之精妙,连纯数学队伍内部不同分支之间也是隔行如隔

山,但他们有共同表达自己研究成果的方式. 纯数学研究成果的表现形式是论文,论文的核心是定理. (70 年代,数学家 Ulam 概算每年出版的数学专业杂志中大约出现多少新定理时,连他本人也大吃一惊,据说当时一年有 30 万左右.) 评价这些成果大致从这几方面:

(1) 问题的重要性, (2) 问题的难度、复杂度, (3) 成果的科学价值 (对本学科以及外学科的推动作用), (4) 一个解决问题好的成果还具有: 构思巧, 思想妙, 论证逻辑严谨, 思路清晰, 语言表达优美, 形式对称以及方法简单, 等等.

人们最关注的是 (4) 中的创新点, 任何在概念、思想与技巧上的创新都会得到高度评价.

著名数学家华罗庚教授不仅是“中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论与多个复变函数论等很多方面研究的创始人与开拓者”<sup>[9]</sup>, 而且也是我国应用数学的创始人和先行者. 他把应用数学大致分成三类. 一类是应用数学的基础理论研究, 这类研究与纯数学研究在思想与技巧上没有本质差别. 差别在于问题的来源不同, 纯数学问题多数来源于数学内部, 而应用数学问题多数来源于数学的外部, 在研究的动力 (目的) 和美学观点上也有些差异. 另一类应用数学研究是数学与别的学科领域的交叉, 相互渗透, 互相促进, 以揭示该学科中重要的数学结构和解决有关问题为目的. 第三类应用数学研究是面向国民经济系统、军事系统和社会发展系统, 以解决这三大系统中提出的现实问题为目标. 他认为在中国这三类研究都很重要, 都有很好的前景. 在当今中国中这三类研究力量最弱的是第三类, 而我国国家发展急需大量的这类研究. 因此, 他主张大力发展第三类研究, 以形成中国应用数学的特色.

应用数学研究成果的表现形式, 也大致可以分成三种类型, 其中一部分 (应用数学基础理论研究) 的评价与纯数学基本上一样; 另一部分要结合交叉学科的评价 (深入到其它学科的应用数学研究); 而大量的应用数学研究是面向三大系统, 以解决三大系统中提出的现实问题为研究对象的. 这部分的应用数学研究的成果主要表现形式是研究报告, 研究报告的核心是数学思想与技巧. 事实上, 即使是应用数学基础理论研究, 也主要看其思想与技巧, 如上提到的线性规划与单纯形法就是一个范例. 评价这些成果也大致从以下几个方面:

(1) 问题的现实重要性, (2) 问题的难度与复杂度, (3) 成果的效益 (经济的、社会的) 及推动作用, (4) 一个解决问题好的成果也还具有: 构思巧, 思想妙, 方法有效、实用, 文体清楚, 方法简单和易于普及推广, 等等.

所以, 许多数学家认为纯数学与应用数学没有本质上的差别. 他们的区别主要在于研究对象和目的以及成果表现形式上. 在应用数学中, 数学思想与技巧主要指的是把实际问题变为数学问题的建模及其对模型求解算法的思想与技巧. 大多数数学家都认为一种数模与算法是创造物, 是一种艺术品, 而数学定理只是发现物. 因此, 华罗庚教授和许多数学家都认为应用数学研究难也就在于此. 任何在应用数学中的概念、思想与技巧上的创新, 同样应得到高度评价. 然而, “在数学家中存在一种顽固的偏见, 认为只有纯数学需要高水平的智力创造, 而数学在实际中的应用是低水准的, 对真正的数学家是无挑战性的.”<sup>[10]</sup> 华罗庚教授则不然, “他在真实世界中的数学应用工作, 展示了巨大的创造性和智慧力量.”<sup>[10]</sup>

### 3 理论研究与应用研究推广、应用型与创造型

运筹学与应用数学有基础理论研究与应用研究之分, 在应用研究中又有推广应用型与创

造型之别. 这是华罗庚教授的观点.

我们还是从数学规划说起, Dantzig 先驱性的研究成果一出现, 也就是数学规划的第一个模型及其单纯形算法一形成, 立即引起人们的极大兴趣, 因为他开辟了一个新的数学天地. 在理论研究上, 人们一方面尽力对 LP 进行理论深化研究, 并寻找新的算法, 如 Khachiyan 算法、Karmarkar 算法, 等等; 另一方面, 人们把 LP 的模型推广到一般非线性情形和其它情形, 寻求更为广泛的理论、模型与算法. 在应用研究上, 人们努力应用有关理论和方法, 去解决许多实际问题, 取得了成效. 值得一提的是, 各国都在走自己的应用研究的道路.

华罗庚教授对中国应用数学研究工作的推动有其特殊的功绩, 尤其在应用研究方面. 他的应用研究工作在国内外引起了强烈的反响. 国外评论认为他的数学普及推广工作是开创性的, “在当今, 这是对所有数学家的挑战.”<sup>[6]</sup> 他的教育思想冲破了中国几千年传统的孔夫子思想. 他推广数学方法, 在学术上洞察之深、选材之妙、加工之巧、表述之深入浅出、行动上之魄力, 足见其是世界上最伟大的数学家之一. 他非常重视并花费了大量精力于推广应用型上 (华罗庚教授在这方面的的工作, 在我国是人所共知的). 同时他更重视并花费同样的精力在创造型研究上. 创造型是从实际问题中创造性地建模, 并给出有效的算法的研究工作. 他极其关注我国创造型研究成果及其研究的方法论. 他在不停地思索, 如何走出一条中国的应用数学道路. 他自己走过寻觅探索阶段、蹲点试验阶段、推广应用乃至大规模推广应用阶段和创造型初探阶段. 他希望在中国不久的未来有大量的创造型的应用研究成果.

当然, 推广应用型与创造型也不是截然分开的, 推广应用中也有创造性的工作, 创造型中也有推广应用的部分.

#### 4 模型算法一体化方法、“四步”→“五步”→“四步”

著名的应用数学家林家翘教授, 曾提出应用数学的“四步”方法论: 第一步, 建立数学模型, 把一个实际问题变为数学问题; 第二步, 研究求解所建立的数学模型的方法或算法及其软件; 第三步, 解释算出的结果 (这是数学工作者最容易忽视的); 第四步, 从此过程中提出有价值的数学问题进行理论研究. 华罗庚教授很赞赏林教授的“四步”, 但华教授很重视建模过程, 认为这是解决问题的关键. 因此, 他在林教授的基础上加上一部, 形成了“五步”方法论. 这加上的一步叫作调查研究, 加在建立数学模型之前. 他认为一切产生于调查研究之后, 数学模型建立的好坏, 关键在于调查研究和系统分析.

我们在华罗庚教授指导下经过长期的研究与实践, 在方法论上, 又把“四步”或“五步”中的建立数学模型与求解算法合成一步, 这样把两步统一为一步的思考, 提高了建立数学模型的创造性, 称之为“模型寓于算法, 算法嵌入模型”. 这种思想方法的重要性在于:

(1) 避免了模型与算法分离造成的算法研究的被动式和难度. 同一个实际问题可以建立许许多多不同的模型, 按自然语言翻译成数学语言的建模工作, 仅是描述而无目的性, 属于初级建模, 它给算法研究带来被动式, 往往难以求解或无法求解. “新手”多属此类, 由于无法求解的困惑, 人们常常会灰心退缩. 模型算法一体化的思考, 可以尽量避免由于模型和算法分离思考造成的算法研究的被动式.

(2) 拿现成模型去套问题, 这又是“新手”的通病, 加上急于求成, 更易患此病. 新的思路就可以避免之.

(3)可以避免建模工作中的先入为主的毛病,建成模型后如果不适用,一般人很难重建,缺乏经验的新手,易陷入绝境.即如果只顾用数学语言描述问题,这样的模型一旦在脑中先入为主,很难自拔.

(4)模型算法统一为一体的思考方法,是以解决问题为最终目标的,为了解决问题,建模者不但要充分调动自身的知识库和方法库,还要善于学习,向实际学习,向别的学科学习,利于自身技能的提高和多学科之间的协作以及知识的交叉.

(5)模型算法统一为一体的方法,更能做到:抓住问题特殊性,建立特殊模型,给出特殊算法,问题解决得更加有效.

(6)新的建模思想集中体现了数学思想与技巧在应用数学中的运用,同时也是应用数学美学观点的集中体现(如同纯数学).便于提高应用研究队伍的技能,提高其兴趣,培养其数觉.数觉是日本数学家小平邦彦教授提出来的<sup>[7]</sup>.纯数学和应用数学研究都强调数觉,应用数学也许更应强调数觉,因为大多数应用数学家是属于直觉主义流派.

实际上,华罗庚教授在他自己和指导我们进行创造型应用研究时就是这样做的.他很赞同建模过程的“泡”和“悟”,“泡”就是深入实际,把自己思想技巧与实际问题的背景泡在一起,与多学科合作者、实际工作者泡在一起,这有一个过程,才能抓住问题的实质,反对下车伊始就发言、就建模;“悟”就是在这整个过程中,不断地去悟出问题的特性、解决问题的真谛.这种思想尤其对提高应用队伍的自身素质和建模的水平,从而增强其价值、自信心和稳定性具有特殊的重要性.

## 5 更动目标函数或约束条件的思想

从应用数学基础理论研究角度考虑问题,它关心最优化数学模型的一般理论与方法的研究.比如,线性规划的一般理论和算法的研究(诸如单纯形法, Karmarkar 算法等等),以及非线性规划的一般理论和算法的探索.他们认为既然有了线性与非线性的一般数学模型,数学工作者的任务就是研究其一般算法.这种从一般性、普遍性的角度去研究事物是非常重要的.这是人类认识世界的重要方式.

从应用数学的应用研究角度考虑问题,它直接面向实际问题,最终目标是解决实际问题.它更关心实际问题的特殊性.当然它很希望有一般理论与方法能套用在该问题的解决上(这是求之不得的好事).但是,往往一般理论和方法还处于初级阶段,还远不能适应这种需求.在这种情况下,先去追求一般理论和方法的研究,再用它去解决实际问题,这种途径,一般说来是不科学的和不现实的;另一种途径就是特殊问题特殊解决,寻求具体问题具体分析的做法,建立特殊模型,给出特殊算法,尤其是模型与算法一起考虑的思路.

实际问题往往非常复杂,对其分析透彻的,可以走模型与算法合二而一的途径,普通研究者还不能完全做到这点.模型既要失真,又要有特殊算法与其配合,这很难.因此,以自己最好的方式完成建模之后,往往还需要进一步研究算法.此时有两条路子,其一,循规蹈矩的数学化研究;其二,灵活的数学化研究.

灵活的数学化研究,就是根据问题的特性采用特殊的数学技巧,适当地改变其目标函数或约束条件,既不使模型失真,又使数模具有特殊性,形成特殊的算法.其背景是:一个实际问题有无穷多数学模型,而这些数模的最优解是一样的.这无穷多数模中有一类(或一个)是与自

己已建立的数模在目标与约束上具有大致相同的形式, 只在目标或约束上, 稍有区别. 但正是这种稍有区别之别, 往往给我们解决问题带来转机, 能够形成特殊的算法. 循规蹈矩的数学化研究, 实际上是完全受缚于已建立的数学模型的目标函数和约束条件. 对于这种过于严格化的处理, 可能是无路可通的. 这样做的人们只取 Dantzig 当初数学建模的一面而丢失了其灵魂的核心.

这种更动目标函数或约束条件, 或两者同时更动的方法, 我们称之更动目标约束法. 实践证明, 它是非常有效的. 它仅是一种思想, 如同整数规划的分枝定界思想, 动态规划的最优化原则一样, 它的具体应用在于使用者的技艺及其积累, 如同一个棋手的下棋艺术, 一个外科“一把刀”的使刀技巧.

在中国, 要发展应用研究, 一需要有自己的思想, 二需要有大批训练有素的“OR 大夫”和“应用数学大夫”.

实际上, 在应用数学基础研究中, 我们也常把一种数学模型按某种规则更动其目标和约束, 转变为等价的另一种数学模型, 以便更灵活地寻求其求解的另一种途径. 比如:

(1) 线性规划把原规划转变为其对偶规划:

$$\begin{array}{ccc}
 \max C^T X & & \min Y^T b \\
 \text{s. t. } \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} & & \text{s. t. } \begin{cases} Y^T A \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases} \\
 \text{原规划} & \text{—— 等价 ——} & \text{对偶规划}
 \end{array}$$

(2) 一些非线性规划也可以把原规划转变为其对偶规划.

(3) 分式规划通过变量代换使其转变为线性规划:

$$\begin{array}{ccc}
 \max \frac{U^T y_0}{V^T x_0} & \text{通过 Charnes-Cooper 交换} & \max Z^T y_0 \\
 \text{s. t. } \begin{cases} \frac{U^T y_i}{V^T x_i} \leq 1, i=1, 2, \dots, n \\ U \geq 0 \\ V \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} t = \frac{1}{V^T x_0} \\ W = tV \\ Z = tU \end{cases} & \text{s. t. } \begin{cases} W^T x_i - Z^T y_i \geq 0 \\ W^T x_0 = 1 \\ w_0 \geq 0 \\ Z \geq 0 \end{cases} \\
 \text{分式规划} & \text{—— 等价 ——} & \text{线性规划}
 \end{array}$$

(4) 整数规划中割平面法, 就是利用不断更动约束的办法, 寻求其整数解.

.....

这些是一种数学上完全严格的等价形式.

从应用研究角度, 我们视这些转换有更广的含义, 我们也用“等价”一词. 但正如 Dantzig 所说: “许多乌七八糟的现实问题的提法, 带有某种柔性 (softness), 即缺乏精确性, 这就允许它们有许多等价的数学表达方式, 我所说的等价, 并不是数学中一一对应意义下的等价, 而是指在应用目的方面的等价. 从人们寻求解答的观点来看, 问题的一种提法恰巧与另一种提法同样令人满意, 但也可能一种提法可用数学方法进行分析 and 求解, 另一种却无用数学方法解决.”<sup>[4]</sup> 而我们提出的更动目标约束法提供了数学与实际结合的更广意义的等价含义.

对于中国的 OR 和应用数学来说, 中国 OR 与应用数学的发展受益于纯数学家的参予, 但中国的 OR 和应用数学的发展也受限于纯数学家的思路. 正如华罗庚教授所说: “跳出来, 是很不容易的.” 再之, 中国传统的数学学术思想、学术评价, 不恰当地用在 OR 和应用数学上, 使

中国的应用研究队伍和应用研究的风格的发展受到一些限制. 形成中国特殊风格的灵活的应用数学研究是有其战略意义的.

## 6 几个例子

下面给出把模型与算法两者统一为一体的建模方法和更动目标约束法的一些例子.

在我国 OR 和应用数学发展的过程中, 出现过许多具有独创性的模型和算法, 其中有不少就是模型和算法一体化的建模, 产生了对特殊问题, 建立特殊模型和特殊算法的漂亮的应用研究成果, 有的在世界上还享有盛誉. 因为这些成果人人皆知, 在这里我们仅给它们一种新的观点, 一点即明. 下面罗列几个(它们都是线性规划问题, 都可以套用标准的线性规划模型和算法)<sup>[12]</sup>, 比如(1)图上作业法, (2)中国邮路问题, (3)打麦场设计, (4)统筹方法, ……

我们在应用研究过程中, 许多实际问题的解决, 是采用模型与算法一体化方法和更动目标约束法的. 下面我们仅举几个更动目标约束法的例子.

### 6.1 变压器优化设计问题<sup>1)</sup>(详见文献[8])

这是我们在 1975 ~ 1977 年间完成的研究成果. 我国电力变压器设计在此成果完成之前, 一直处于手工设计阶段. 此成果的完成标志着我国电力变压器设计进入了一个新阶段. 对这个问题我们所建立的数学模型是混合型整数规划问题, 求解难度大. 后来, 我们采用更动目标法, 把原目标函数更动成两个函数的绝对值之和, 形成一个等价问题. 表面上看, 问题的数学模型更复杂了(因为出现了绝对值函数的极值问题). 实质上, 我们抓住了目标函数的特殊性质, 给出了一种特别有效的算法. 因为数学模型的描述需要很长的篇幅, 我们简记如下:

原问题为

$$\min_{X \in S} F(X),$$

其中  $S$  为约束集合, 其元素必须满足许许多多函数方程. 它等价的更动目标后的问题为

$$\min_{X \in S} \{|P(X) - p_0| + |U(X) - u_0|\}.$$

以二维为例. 由于  $P(X)$ ,  $U(X)$  具有特性: 在  $x_1, x_2$  取值范围内,

- ①  $P(X)$  是  $x_1, x_2$  的降函数;
- ②  $U(X)$  是  $x_1$  的增函数,  $x_2$  的降函数.

假定  $a \leq x_1 \leq b$ ,  $c \leq x_2 \leq d$ , 我们取此矩形中心  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , 其中  $\bar{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{c+d}{2}$ , 我们计算  $P(\bar{X})$ ,  $U(\bar{X})$ . 令  $P(\bar{X}) = \bar{p}$ ,  $U(\bar{X}) = \bar{u}$ . 不论以下 4 种情形中哪一种出现:

$$\text{I. } \bar{p} \leq p_0, \bar{u} \leq u_0, \text{ II. } \bar{p} \leq p_0, \bar{u} \geq u_0, \text{ III. } \bar{p} \geq p_0, \bar{u} \leq u_0, \text{ IV. } \bar{p} \geq p_0, \bar{u} \geq u_0,$$

总可以去掉原来矩形区域的一半, 只需在剩下的一半区域中去寻找好的解.

这实际上是利用目标函数特性给出了整数规划分枝定界法的一种特殊技巧. 如图 1 所示. 这是一种特殊的平面区域对分法. 华罗庚教授对这种灵活的处理技巧给予了很高的评价.

1) 曾获全国科学大会奖, 中国科学院重大科技成果奖

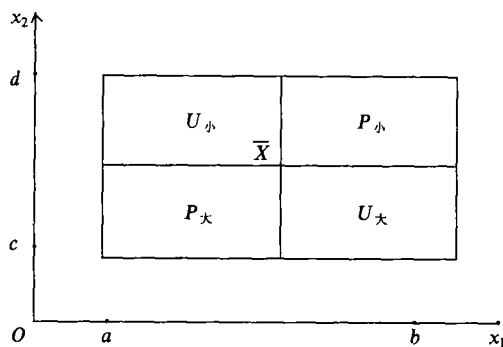


图 1

## 6.2 军队营房翻建经费合理分配问题<sup>1)</sup>(详见文献[9])

我军后勤营房翻建任务很重,合理分配这种经费对我军建设具有重大意义.通过系统分析与综合,我们建立了一个具有 6 000 多个整数变量、2 000 多个约束条件的整数规划模型.为了寻找好的算法,我们采用了更动目标函数法,引进了新的概念,把目标函数更动为一个矩阵函数的极大极小问题.

为方便起见,我们简记原问题为

$$\max_{X \in S} F(X).$$

更动目标后的问题为

$$\min_{X \in S} \max_{i,j} \begin{pmatrix} A_{11}(X) & A_{12}(X) & \cdots & A_{1n}(X) \\ A_{21}(X) & A_{22}(X) & \cdots & A_{2n}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(X) & A_{m2}(X) & \cdots & A_{mn}(X) \end{pmatrix},$$

其中  $S$  为约束集合,其元素必须满足 2 000 多个函数等式或不等式.

这又是一个从表面上看,把问题复杂化了的处理,实则不然,根据问题的特殊性,我们给出了一个很好的求解算法.

## 6.3 线性规划更动约束的一种算法

这是一种简便的近似算法.为了简洁,我们用框图表述之.算法的逻辑框图见图 2.

许多实际问题的目标函数值的上下界是可以估算的.比方某个工厂建立的 LP 模型,它的目标函数是利润函数,而利润的上下界大约为  $\alpha=1\,500$  万元,  $\beta=2\,000$  万元,它们是可以估算出来的,那么,利用目标函数不等式

$$C^T X \geq \frac{\alpha + \beta}{2}$$

增加一个约束,我们只要判定增加此约束条件后有无可行解即可.当然判定一个线性不等式组有无解,不是易事.但这可以利用单纯形算法两段法的第一段算法.单纯形法的主要计算量在第二段算法的迭代上.对一个实际问题来说,比方以上提到的工厂追求利润的问题,它无需求得数学上的精确解.利用以上更动约束法,经过目标函数取值区间的几次对分,也就满足要求了.这种算法既简单又易于控制,所以解决如此类型的问题是很有效的.

1) 曾获国家科技进步二等奖

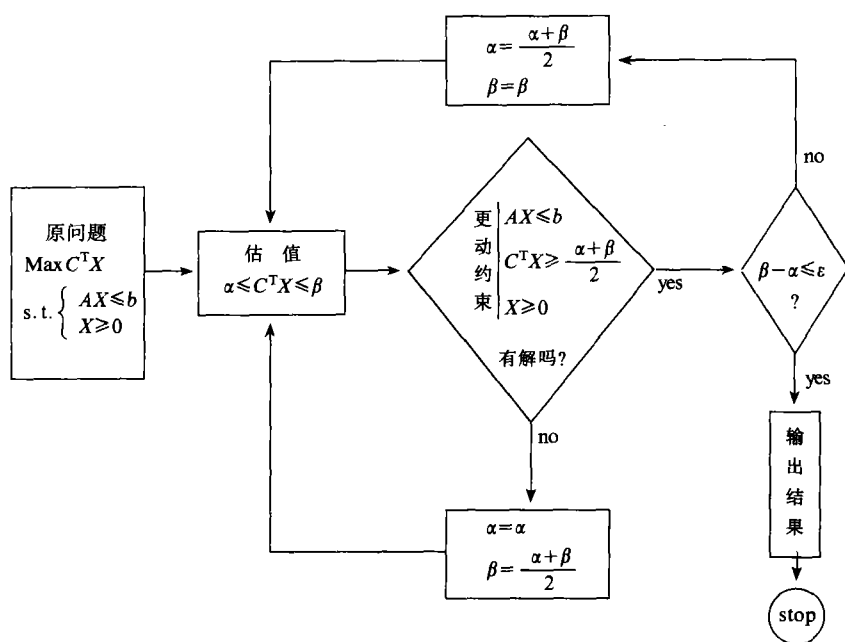


图 2

#### 6.4 多目标线性规划的一种算法

多目标问题,实际上是寻求一个各目标(各方)都能接受的,某种意义下的妥协解.一般说来,每个目标都达到最优的解,是不存在的.我们用框图(图 3)来说明一种多目标规划的更动约束法如下:

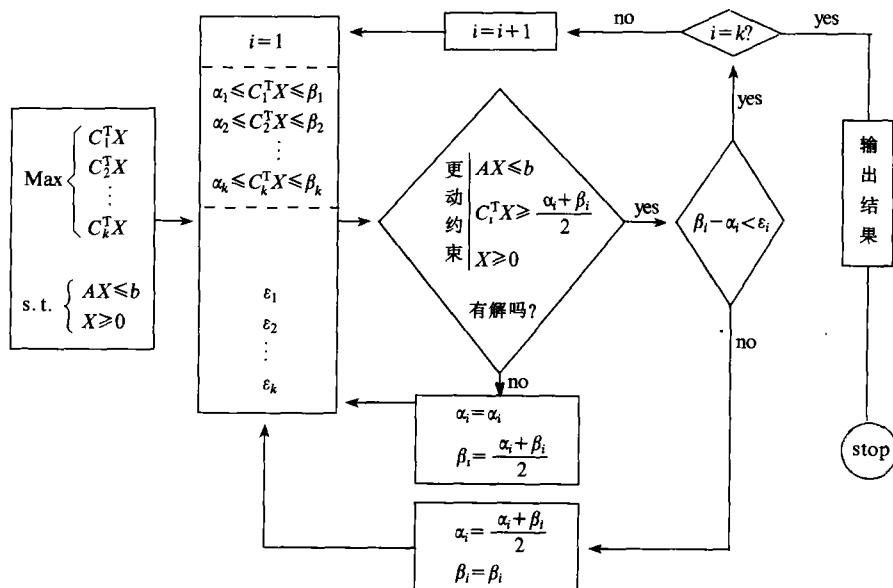


图 3

这里,估值  $\alpha_i, \beta_i$  是事先给定的;  $\varepsilon_i$  为妥协精度,也是事先协调好的.

## 7 二(多)次建模思想

更动目标约束法就是二次建模的做法. 我们这里说的二次建模具有更普遍的意义. 在不更动目标和约束的情况下使所建的模型通过二次建模变得更容易求解, 具有很高的智力技巧. 这里仅举几个例子说明这个问题.

(1) 变压器铁芯最大截面问题<sup>[10]</sup>, (2) 露天煤矿优化设计问题<sup>[11]</sup>.

这两个问题的第一次建模都是整数规划模型或混合整数规划模型. 如果套用任何一种现成的整数规划求解算法, 都难以实现求解的目的. 因此, 我们进行了二次建模. 在第一次建模基础上, 我们又建立了它们的图与网络模型. 把这两个问题的原来的数学模型, 化成一个最短路问题, 利用动态规划最优优化原则, 我们给出了它们求解的很好的算法.

这两个问题的一、二次建模及其求解算法, 详见文献[10, 11, 14].

## 8 方法论逻辑图

以上讨论的应用数学有关的方法论, 我们用逻辑框图(图4)来表示. 它们包括: (1) “四步”→

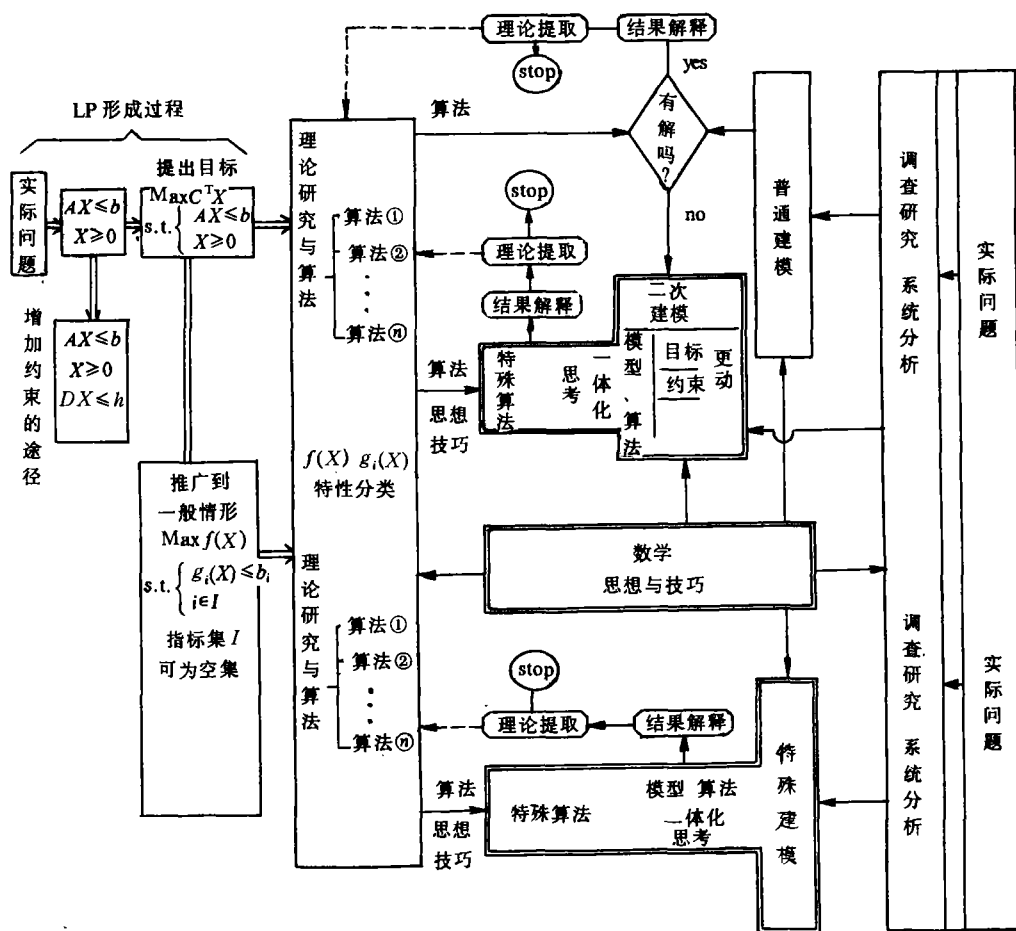


图4

→“五步”→“四步”, (2) 模型算法一体化法, (3) 更动目标和约束法, (4) 二次建模思想.

其方法论示意图

|                  |                  |                  |                  |                                      |
|------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------------------------|
| 理<br>论<br>提<br>取 | 结<br>果<br>解<br>释 | 算<br>法<br>研<br>究 | 数<br>学<br>模<br>型 | 系<br>调<br>统<br>查<br>分<br>研<br>析<br>究 |
| 五步               | 四步               | 三步               | 二步               | 一步                                   |
| 四步               | 三步               | 二步               | 一步               |                                      |

## 9 灵活与创新

华罗庚精神是勤奋、探索、创新、开拓、拼搏、爱国, 其精华在于勇探索、争创新.

对于中国的应用数学, 华罗庚教授认为他的工作主要在于探路, 在于敲开应用之门, 在于打基础, 让别人好在他的肩膀上爬上去. 他强调应用数学研究的最终目标, 在于解决实际问题. 在解决实际问题中, 他认为重要的在于创新, 在于灵活运用数学思想与技巧, 抓住实际问题的特殊性, 灵活地、精巧地解决关键环节: 建模与算法. 即使手中掌握有方法, 也要经过创造性的加工, 把它交给大众, 让他们在工作中运用. 我们曾提出灵活的运筹学<sup>[1]</sup>(Flexible OR), 本文将这种思想推广到应用数学研究中, 特别是推广到华罗庚教授对应用数学分类的第三类中, 它综合了华罗庚教授的应用数学思想方法的几个创新点和我们在这方面研究的几点体会, 其中包括对应用数学研究的评价标准、分类观点、推广应用型与创造型、模型与算法一体化方法、更动目标或约束方法, 等等. 他希望中国的应用数学具有更大的灵活性和创新性.

**致谢** 中国科学院院士王元教授对本文提出了很多宝贵的意见, 作者表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- 1 Kantorovich L. V. Mathematical Method of Organization and Planning Production. Leningrad: Publication House of the Leningrad State University, 1939
- 2 Donald J. A. An interview with George B Dantzig: The father of linear programming. College Mathematics, 1986, 17(4): 203~311
- 3 Dantzig G. B. Linear Programming and Extension. Princeton: Princeton University Press, 1963
- 4 Atiyah M. F. Identifying progress in mathematics. Collected Works, 1988, 1: 351~364
- 5 华罗庚. 华罗庚科普著作选集. 上海: 上海教育出版社, 1984
- 6 Schweigman C, Zhang S. The teachings of Hua Loo-Keng: A challenge today? The Mathematical Intelligencer, Vol 16, No 3. New York: Springer-Verlag, 1994
- 7 小平邦彦. 数学の印象. 东京: 岩波书店, 1986. 145~158
- 8 杨德庄, 刘奇志. 电力变压器电磁最优设计问题. 中国科学技术大学学报, 1975, 5(2): 37~56
- 9 杨德庄, 陈德泉, 计 雷等. 危破窑房翻建费合理分配. 优选与管理科学, 1987, 3(1): 1~12
- 10 杨德庄, 刘奇志. 变压器铁心最大截面问题. 应用数学学报, 1980, 3(3): 275~280
- 11 Yang Dezhuang (杨德庄). Optimal design of large-scale opencut coal mine system. In: Advances in Optimization and Approximation. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994. 332~346
- 12 Hua Loo-Keng, Wang Yuan. Popularizing Mathematical Methods in the People's Republic of China. Boston: Birkhauser, 1989
- 13 Saunders M. Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics. Amer Math Monthly, 1981, 88(7): 462~472
- 14 Du Ding-Zhu, Sun Jie. Advances in Optimization and Approximation. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994