

# 纤维增韧材料的损伤理论

高 玉 臣

(哈尔滨船舶工程学院 201 教研室)

## 摘 要

本文研究了单向纤维增强材料的损伤理论。我们考虑了基体中预先存在的微裂纹的张开、扩展及其附近双位移区的力学机制,即纤维脱胶、摩擦滑动等,建立了裂纹面上由纤维承受的应力所满足的积分方程。把双相区的厚度和裂纹尺寸作为两类不同的损伤变量,分别建立了演化方程。对基本积分方程给出了近似解,其结果与由 Hankel 变换给出的精确解吻合很好。在近似解的基础上给出了复合材料的有效应力强度因子和基体裂纹扩展条件,并给出了考虑损伤过程的完整应力应变关系。

**关键词.** 损伤,纤维增韧,界面脱胶,基体裂纹

## 一、引 言

近年来,复合材料由于其特有的许多优点而得到了日益广泛的应用。纤维增强材料具有良好的韧性。由于纤维的存在,即使基体中有了裂纹,甚至裂纹已开始扩展,整个材料的载荷仍可能允许上升。纤维的这种增韧效果早已被人们认识并利用了,但是对纤维的增韧机理至今仍未被充分研究。Budiansky, Hutchinson 和 Evans<sup>[1]</sup> 曾利用能量原理研究过纤维陶瓷的基体开裂问题。但是,由于文献[1]中假定:基体开裂后纤维单独承担的平均应力与开裂前的平均应力相同,而局限了这一研究的实用价值。Stang 和 Shah<sup>[2]</sup> 把纤维与基体的界面脱胶看成是裂纹扩展过程,曾讨论过纤维拔出的临界条件,但是没有考虑界面的摩擦作用。文献[3]在考虑了界面摩擦的情况下,给出了界面脱胶临界条件以及纤维拔出长度与拉力的关系,这是复合材料的一个基本问题。高玉臣, Mai 和 Cotterell<sup>[4]</sup> 在考虑界面摩擦及纤维的 Poisson 收缩的情况下,研究了纤维增韧材料的断裂韧性,给出了长纤维、短纤维、强纤维、弱纤维的区分标准和相应的增韧公式。文献[5]曾研究过含微裂纹材料的损伤理论,但所考虑的材料中没有纤维。本文对含有微裂纹的纤维增强材料的增韧机理、损伤过程和对外力的反应特性进行了力学原理方面的研究。

## 二、问题的提出

我们考虑了单向纤维增强的复合材料。假定纤维的布置是平行的,分布是均匀的,基体中

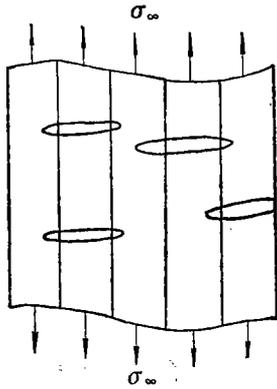


图1 材料模型

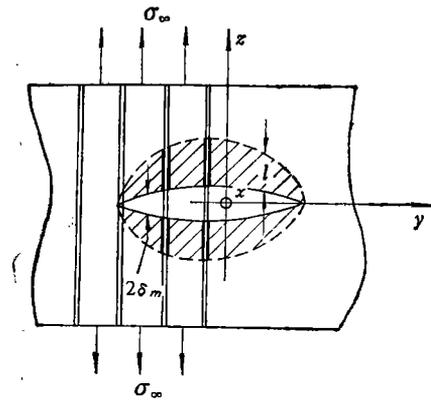


图2 双位移区

存在着垂直于纤维的平面微裂纹,而纤维仍完好无损(见图 1, 2)。我们选取直角坐标系  $x, y, z$ , 使得  $z$  轴平行于纤维方向。假定外载荷是单拉状态,即  $\sigma_x = \sigma_\infty$ , 而其余分量为零。当  $\sigma_\infty$  很小时裂纹是闭合的。当  $\sigma_\infty$  达到某临界值时裂纹开始张开,与此同时,由于纤维保持完好,在裂纹面附近必然有纤维与基体界面的脱胶以使得纤维滑动与裂纹张开成为可能。当载荷进一步增加至另一个临界值时,还会发生基体裂纹的扩展。本文将以弹性系统的余能为基础,分析上述微观过程。

### 三、双相材料

为叙述简便,我们考虑一个位于  $z = 0$  平面内的裂纹。设裂纹面两侧附近的界面脱胶深度为  $l = l(x, y)$ , 由  $|z| < l(x, y)$  所确定的区域称为脱胶区。在脱胶区内纤维与基体之间可以发生相对滑动,所以这种区域又称为双位移区,或以下简称为双相区。相对应地,未脱胶区又被称为单相区。

无论是双相区还是单相区,从细观上讲,位移、应变及应力的分布都是复杂的。所以,我们只能考虑这些量对基体、对纤维或者对材料总体的平均值。因为单相区并不需要什么特殊的描述方法,所以下面只着重研究双相区。令  $\bar{u}, \bar{u}_m$  表示纤维与基体的平均位移,由于相对滑动只能沿着纤维方向,所以有

$$\bar{u}_x = \bar{u}_m = u_x, \quad \bar{u}_y = \bar{u}_m = u_y, \quad (3.1)$$

而  $\bar{u}_z, \bar{u}_m$  则相互独立。由于裂纹面是垂直于纤维方向的,我们作以下简化假定:复合材料的整个变形过程可分为两个过程的叠加。第一个过程是没有界面脱胶的单相材料变形。第二个过程是界面脱胶并伴有相对滑动,但是只有  $z$  方向的位移分量不为零。如果以  $\bar{u}, \tilde{u}$  分别表示第一及第二个过程的位移,于是有

$$\begin{cases} u_x = \bar{u}_x, \\ u_y = \bar{u}_y, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \bar{u}_x + \tilde{u}_x, \\ u_z = \bar{u}_z + \tilde{u}_z. \end{cases} \quad (3.2)$$

为求解  $\bar{u}$ , 材料可以看成是普通的均匀各向异性体。

至于  $\tilde{u}$ , 我们假定 Poisson 收缩可以略去,于是相应的应力为

$$\bar{\sigma}_f = E_f \frac{\partial}{\partial z} \tilde{u}_z, \quad \bar{\sigma}_m = E_m \frac{\partial}{\partial z} \tilde{u}_z, \quad (3.3)$$

其中  $E_f, E_m$  为纤维与基体的 Young 氏模量。

纤维与基体的平衡条件为

$$C_f \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}_f = -F_x = -C_m \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}_m. \quad (3.4)$$

这里  $C_f, C_m$  为纤维与基体的体积比份, ( $C_f + C_m = 1$ ),  $F_x$  是单位体积材料的界面摩擦力。如果界面摩擦应力  $\tau$  为常量, 则有

$$F_x = \alpha \cdot \tau \cdot \text{sgn}(z), \quad (3.5)$$

其中  $\alpha$  为单位体积内的界面面积, 如果纤维截面都是半径为  $r$  的圆, 于是  $\alpha = 2C_f/r$  由(3.3)一(3.5)式可得

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_f = (\bar{\sigma} - \alpha\tau|z|)/C_f, \\ \bar{\sigma}_m = -C_f\bar{\sigma}_f/C_m. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_z = C_m E_m \tilde{u}/E, \\ \tilde{u}_z = -C_f E_f \tilde{u}/E, \\ \tilde{u} = \frac{E}{C_f C_m E_f E_m} \left[ (|z| - l) \bar{\sigma} + \frac{\alpha\tau}{2} (l^2 - z^2) \right] \text{sgn}(z), \end{cases} \quad (3.7)$$

其中

$$E = C_f E_f + C_m E_m, \quad (3.8)$$

$\bar{\sigma}$  是  $x, y$  的未知函数。

#### 四、余能

纤维脱胶和基体裂纹扩展都可看成是开裂过程, 所以均受能量平衡条件的控制。下面我们分析具有预应力和内摩擦的双相材料的应变能及余能。设弹性系统的初始应力状态为  $\sigma_0$ , 应变状态为  $\epsilon_0$ , 而外载为  $T_0$ , 在附加载荷  $T$  作用下产生附加位移、应变及应力为  $u, \epsilon, \sigma$ 。那么, 系统的变形能为

$$U^* = \frac{1}{2} \int (\epsilon + \epsilon_0) : (\sigma + \sigma_0) dV. \quad (4.1)$$

这里  $V$  代表材料体积, 由于

$$\delta U^* = \int \delta \epsilon : (\sigma + \sigma_0) dV, \quad (4.2)$$

所以, 余能  $U$  可以写为

$$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon : \sigma - \epsilon_0 : \sigma_0) dV, \quad (4.3)$$

上式中  $\epsilon_0 : \sigma_0$  一项并不起作用, 可以略去。

由于  $\epsilon$  是协调应变, 而  $\sigma$  与  $T$  相平衡, 利用虚功原理, 我们可以把  $U$  改写为

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} d\mathbf{s}, \quad (4.4)$$

现在我们把普遍公式(4.4)用于双相材料。取一个典型长方体,不妨设其中只包含一个裂纹(见图2),令 $\Omega_{\pm}$ 表示双侧裂纹面,且设想纤维也被切断,以 $A_{\pm}$ 表示长方体的上下表面,以 $l$ 表示纤维与基体的界面。由于公式中只出现 $u_x, u_z, u_x, \sigma_x, \sigma_z$ ,所以我们略去脚标 $x$ ,于是

(4.4)式可以写为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\pm}} (C_f u_f \sigma_f + C_m u_m \sigma_m) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{A_{\pm}} u \sigma dA + \frac{1}{2} \int_l |u_f - u_m| \tau dl. \quad (4.5)$$

为了简化(4.5)式,我们假定 $\bar{\mathbf{u}}$ 的相应应力 $\bar{\sigma}_f, \bar{\sigma}_m$ 与 $E_f, E_m$ 成比例,即

$$\frac{\bar{\sigma}_f}{E_f} = \frac{\bar{\sigma}_m}{E_m}. \quad (4.6)$$

令

$$\sigma = C_f \bar{\sigma}_f + C_m \bar{\sigma}_m. \quad (4.7)$$

于是由(3.6), (3.7), (4.6), (4.7)式可将(4.5)式改写为

$$U = \bar{U} + \tilde{U}, \quad (4.8)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{A_{\pm}} \bar{u} \cdot \sigma dA + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\pm}} \bar{u} \cdot \sigma d\Omega, \quad (4.9)$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\pm}} \tilde{u} \cdot \tilde{\sigma} d\Omega + \frac{1}{2} \int_l |\tilde{u}| \tau dl. \quad (4.10)$$

下面进一步分析 $\bar{U}$ 。我们假定裂纹是稀疏的,即裂纹之间的距离远大于裂纹尺寸,于是在 $A_{\pm}$ 上我们取 $\sigma = \sigma_{\infty}$ 。考虑到线性系统的性质, $\bar{U}$ 可以写为

$$\bar{U} = \frac{C}{2} \sigma_{\infty}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} [\sigma_{\infty} - \sigma(p)] \cdot [\sigma_{\infty} - \sigma(Q)] G(p, Q) d\Omega d\Omega, \quad (4.11)$$

其中

$$C = V(1 - \nu^{*2})/E^*, \quad (4.12)$$

$C$ 为无裂纹时微元的柔度系数。 $E^*, \nu^*$ 为复合材料的总体弹性模量。现在考虑 $\tilde{U}$ ,利用(3.6), (3.7)式,可把(4.10)化为

$$\tilde{U} = \frac{E}{C_f C_m E_f E_m} \int_{\Omega} l \left( \bar{\sigma}^2 - l \alpha \tau \bar{\sigma} + \frac{1}{3} l^2 \alpha^2 \tau^2 \right) d\Omega. \quad (4.13)$$

## 五、纤维应力

在裂纹面上的纤维应力 $\sigma_f$ 应由纤维连续条件确定。由基体无应力条件

$$\sigma_m|_{z=0} = 0, \quad (5.1)$$

再利用(3.6), (4.6), (4.7)式可得

$$\sigma = C_f \sigma_f, \quad \bar{\sigma} = C_f \sigma_f / (1 + \beta), \quad \text{在 } z = 0, \quad (5.2)$$

其中

$$\beta = \frac{C_f E_f}{C_m E_m} \quad (5.3)$$

为了得到纤维连续的条件, 我们利用(4.8), (4.11), (4.13)及(5.2)式, 将 $U$ 变分, 于是得

$$\begin{aligned} \delta U = C_f \int \delta \sigma_f \left\{ \frac{l}{E} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) (2\bar{\sigma} - l\alpha\tau) \right. \\ \left. - \int_{\Omega} [\sigma_{\infty} - \sigma(p)] G(p, Q) d\Omega_p \right\} d\Omega_Q. \end{aligned} \quad (5.4)$$

上式大括号内的项代表裂纹面上纤维位移的间断量, 所以应该等于零, 由此可得

$$\begin{aligned} \frac{l}{E} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \left( \frac{2\sigma}{1 + \beta} - l\alpha\tau \right)_0 \\ + \int \sigma(p) G(p, Q) d\Omega_p = \sigma_{\infty} H(Q), \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中

$$H(Q) = \int G(p, Q) d\Omega_p. \quad (5.6)$$

(5.5)就是确定 $\sigma$ 的积分方程。此外, 利用变分还可以得到基体张开位移

$$2\delta_m = \frac{l}{E\beta} (1 + \beta)^2 \left( \frac{2\sigma}{1 + \beta} - l\alpha\tau \right). \quad (5.7)$$

## 六、 $l$ 和 $\Omega$ 的损伤条件

由于 $l$ 用来确定双相区边界, 而 $\Omega$ 用来确定裂纹面大小, 所以 $l$ 和 $\Omega$ 将被取作损伤变量。为了得到 $l$ 和 $\Omega$ 的损伤演化方程, 我们从余能及损伤耗散能出发, 导出 $l$ 和 $\Omega$ 的损伤动力及损伤阻力。设裂纹面 $\Omega$ 在其边界点 $C$ 处向外扩展 $\delta\Omega_C$ 。而函数 $l(x, y)$ 有一变分 $\delta l$ , 与此相应地 $\sigma$ 也有一变分 $\delta\sigma$ , 注意到(5.5)式, 则 $U$ 的变分可写为

$$\delta U = \mathcal{F}_{\Omega} \delta\Omega_C + \int \mathcal{F}_l \delta l d\Omega, \quad (6.1)$$

考虑到在 $\Omega$ 的边界上 $l = 0$ 且 $G(p, C) = 0$ , 于是有

$$\mathcal{F}_{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} [\sigma_{\infty} - \sigma(p)] [\sigma_{\infty} - \sigma(Q)] \frac{\delta G}{\delta \Omega} d\Omega_p d\Omega_Q, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{F}_l = [\sigma - (1 + \beta)l\alpha\tau]^2 / (E\beta), \quad (6.3)$$

$\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_{\Omega}$ 分别称为 $l, \Omega$ 的损伤动力。

现在考虑界面脱胶和裂纹扩展的能量耗散。设总能量耗散为 $\eta$ , 单位脱胶面的能量耗散为 $\zeta_l$ , 基体裂纹扩展单位面积能耗为 $\zeta_m$ , 于是有

$$\delta\eta = C_m \zeta_m \delta\Omega + 2\alpha \zeta_l \int \delta l d\Omega. \quad (6.4)$$

根据一般损伤理论, 由(6.1), (6.4)式可得

$$2\alpha \zeta_l = \frac{1}{E\beta} [\sigma - (1 + \beta)l\alpha\tau]^2. \quad (6.5)$$

$$C_m \zeta_m = \frac{1}{2} \int \int [\sigma_{\infty} - \sigma(p)] [\sigma_{\infty} - \sigma(Q)] \frac{\delta G}{\delta \Omega} d\Omega_p d\Omega_Q. \quad (6.6)$$

进一步,由(6.5)式有

$$l = (\sigma - \sigma^*) / [\alpha\tau(1 + \beta)], \quad (6.7)$$

其中

$$\sigma^* = (2\alpha\beta E\zeta_l)^{1/2}. \quad (6.8)$$

$\sigma^*$  是复合材料的结构参数,称为脱胶应力的门槛值。

将(6.7)式代入(5.5)式则得

$$\int G(p, Q)\sigma(p)dQ + \frac{\sigma^2 - \sigma^{*2}}{E\alpha\tau\beta(1 + \beta)} - \sigma_\infty H(Q) = 0. \quad (6.9)$$

(6.9)式便是  $\sigma$  的基本积分方程。

## 七、基本方程的近似解

(6.9)式是一个非线性积分方程,只能借助于数值方法求解。文献[6]采用了 Hankel 变换计算了不同参数下的  $\sigma$  及  $2\delta_m$  的分布,并计算了基体应力强度因子。本文是研究损伤过程和反应特性,特别是考虑多裂纹的平均行为,所以必须采用近似方法来研究(6.9)式。用一个常量  $\bar{\sigma}$  代替  $\sigma$ ,并要求(6.9)在平均意义下满足,将(6.9)式对  $Q$  积分,于是得

$$\bar{\sigma} - \sigma_\infty + \frac{\bar{\sigma}^2 - \sigma^{*2}}{ED\alpha\tau\beta(1 + \beta)} = 0, \quad (7.1)$$

其中

$$D = \frac{1}{Q} \int H(Q)dQ. \quad (7.2)$$

设裂纹特征尺寸为  $a$ ,则由量纲分析可得

$$D = ka(1 - \nu^{*2})/E^*, \quad (7.3)$$

其中  $k$  为形状因子。

进一步引入无量纲量

$$\begin{cases} S = \bar{\sigma}/\sigma^*, S_\infty = \sigma_\infty/\sigma^*, \\ m = \frac{E}{2E^*} (1 - \nu^{*2})k\alpha\beta(1 + \beta)a\tau/\sigma^*. \end{cases} \quad (7.4)$$

于是由(7.1)式可得

$$S = (m^2 + 2mS_\infty + 1)^{1/2} - m. \quad (7.5)$$

以上推导只适用于  $S_\infty > 1$  情况,若  $S_\infty \leq 1$  则裂纹不张开,这时应取  $S = S_\infty$ 。

## 八、反应特性

借助于余能表达式(4.8),(4.11),(4.13)式可以得到平均应变的公式。设在所考虑的区域内有多个裂纹,但是裂纹是稀疏的,因而可以略去其耦合作用,于是平均应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial \sigma_\infty} = \frac{\sigma_\infty}{E^*} \\ &+ \frac{1}{V} \sum_i \int_{a_i} [\sigma_\infty - \sigma(p)] H(p) dQ_p. \end{aligned} \quad (8.1)$$

设裂纹都是半径为  $a$  的圆,而且是均匀随机分布的,略去裂纹的萌生,令  $n$  表示单位体积内的

裂纹数,采用近似解(7.5)并注意到(7.2),(7.3)式,于是有

$$\varepsilon = \frac{\sigma^*}{E^*} [S_\infty + k\rho(1 - \nu^{*2})(S_\infty - S)], \quad (8.2)$$

$$\rho = \frac{1}{V} \sum a_i Q_i = n\pi a^3, \quad k = \frac{16}{3\pi}. \quad (8.3)$$

应力应变关系(8.2)式中,  $\rho, S$  均依赖于  $a$ , 所以, 为了得到反应特性, 必须先确定裂纹扩展后  $a$  与  $S_\infty$  的关系. 为此, 利用近似解(7.5)式, 由(6.6)式可得

$$C_m \zeta_m = \frac{1 - \nu^{*2}}{E^*} \frac{4a}{\pi} (\sigma_\infty - \sigma)^2. \quad (8.4)$$

根据(8.4)式, 我们可以定义有效应力强度因子及其临界值

$$K_m = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} (\sigma_\infty - \sigma), \quad (8.5)$$

$$K_{IC} = \left( \frac{E^* C_m}{1 - \nu^{*2}} \zeta_m \right)^{1/2}. \quad (8.6)$$

这样, (8.4)式又可改写为

$$2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} (\sigma_\infty - \sigma) = K_{IC}. \quad (8.7)$$

设  $a_0$  为裂纹的初始长度, 如果引入以下量:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a}{a_0}, \quad \rho_0 = n\pi a_0^3, \\ m_0 &= \frac{E}{2E^*} (1 - \nu^{*2}) k \beta (1 + \beta) \alpha \tau a_0 / \sigma^*, \\ K &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a_0}} \cdot \frac{1}{\sigma_m^*} K_I, \\ K_C &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a_0}} \cdot \frac{1}{\sigma_m^*} K_{IC}. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

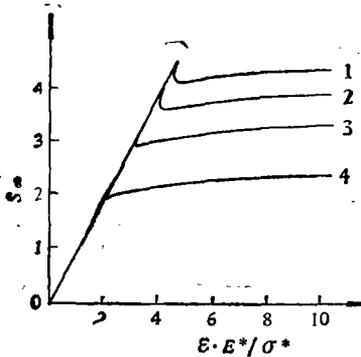


图 3 应力应变关系

(1— $m_0 = 1$ , 2— $m_0 = 0.75$ , 3— $m_0 = 0.5$ ,  
4— $m_0 = 0.25$ ;  $\rho_0 = \pi \cdot 0.05^3$ ,  $K_C = 2.0$ )

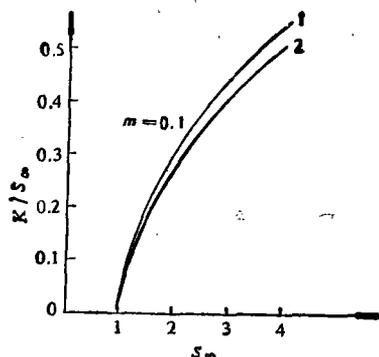


图 4 近似解与精确解的对比

(1—文献[6], 2—本文)

于是(8.2)式可写为

$$\varepsilon = \frac{\sigma^*}{E^*} [S_\infty + k(1 - \nu^{*2})\rho_0 A^{5/2} K], \quad (8.9)$$

这里,(8.9)式应分三个阶段给出,当  $S_\infty < 1$  时,取  $K = 0$ . 当  $S_\infty > 1$ , 但裂纹扩展之前有

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ K = S_\infty + m_0 - (m_0^2 + 2m_0 S_\infty + 1)^{1/2} \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

当  $K$  到达  $K_c$ , 即裂纹扩展之后应取

$$\left\{ \begin{array}{l} K = K_c, \\ S_\infty = \frac{K_c}{\sqrt{A}} + (1 + 2m_0 \sqrt{A} K_c)^{1/2}. \end{array} \right. \quad (8.11)$$

一些典型参数的应力应变曲线,如图3所示. 为了估计近似解的精确性,本文计算了无量纲的基体应力强度因子  $K$ , 并与 Hankel 变换所得精确值<sup>[6]</sup>进行了比较(见图4).

## 九、结 论

1. 为了研究复合材料的增韧机理和反应特性,必须考虑基体的微裂纹附近的力学机制,即纤维脱胶、摩擦滑动、裂纹张开,裂纹扩展等. 当取纤维脱胶深度及裂纹扩展尺寸为损伤变量时,可以建立起以断裂准则为基础的损伤演化方程,并且可以得到材料的反应特性.

2. 基本积分方程的近似解与 Hankel 变换所给出的精确解相差很小,因而可以作为工程应用的依据.

3. 纤维的存在相当于裂纹面上有相互吸引力,因而使基体开裂的有效应力强度因子降低,这便是纤维增韧的本质. 各结构参数,如界面胶合强度、摩擦系数、预应力等对增韧均有直接作用(见文中各公式).

## 参 考 文 献

- [1] Budiansky, B., Hutchinson, J. W. and Evans, A. G., *J. Mech. Phys. Solids*, 34(1986), 2: 167.
- [2] Stang, H. and Shah, S. P., *J. Mater. Sci.*, 21(1986), 953.
- [3] Gao, Y. C., *Mech. Research Communications*, 14(1987), 2: 231.
- [4] Gao, Y. C., Mai, Y. W. and Cotterell, B., *J. Appl. Mathematics & Phys. (ZAMP)*, 39(1988), July.
- [5] Gao, Y. C., *Mech. Research Communications*, 13(1986), 4: 67.
- [6] Zhou, L. M. and Gao, Y. C., A penny-shaped crack in fiber-reinforced materials (to be published).