

Q 过程的唯一性准则

侯 振 挺

(长沙铁道学院)

摘 要

马尔可夫过程在科学和技术领域中有着广泛的应用。但在现实中所遇到的马尔可夫过程,容易求出的是密度矩阵 Q 而不是 $P_{ij}(t)$ 本身。在文化大革命中,我们走出校门,到铁路现场,在实际工作中也确有此感。因此, Q 是否能唯一决定过程的问题,就有其重要的理论与实际的意义。这正是本文中要证明的定理 1.1 所回答的问题。

在文的后半部分,把定理 1.1 应用到几个特殊的 Q 矩阵上,以示我们所提出的判别准则是行之有效的。

设 $X = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程,其相空间 $E = (1, 2, \dots)$, 其转移概率为 $p_{ij}(t)$, $i, j \in E$, $t \geq 0$, 它们是一组满足下列条件的实值函数,

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in E} p_{ij}(t) \leq 1, \quad (2)$$

$$\sum_{k \in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = p_{ij}(t+s), \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad (4)$$

其中 $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ 。熟知,这时存在极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = q_{ij}, \quad (5)$$

而且 $0 \leq q_{ii} < +\infty (i \neq j)$, $0 \leq q_i \equiv -q_{ii} \leq +\infty$, $\sum_{j \in E} q_{ij} \leq 0$ 。当 $q_i < +\infty (i \in E)$ 时,称过程是可微的,简称 $Q = (q_{ij})$ 为过程的密度矩阵,而过程 $X = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 则简称为 Q 过程,以表示它与 Q 有 (5) 式的关系。如果两个 Q 过程有相同的 $p_{ij}(t)$, 我们就把它们看作同一 Q 过程,故在下面也称满足 (1)–(5) 式的 $(p_{ij}(t))$, 或其拉氏变换为一 Q 过程。

定义 1. 称定义在 $E \times E$ 上的矩阵 $Q = (q_{ij})$ 为 Q 矩阵,如果 Q 满足

$$0 \leq q_{ii} < +\infty (i \neq j), 0 \leq q_i \equiv -q_{ii} < +\infty, \sum_{j \in E} q_{ij} \leq 0 \quad (i \in E), \quad (6)$$

如果还有

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = 0 \quad (i \in E), \quad (7)$$

则称 Q 为保守的 Q 矩阵.

显然, 每个可微的过程的密度矩阵是 Q 矩阵, 现在问: 任给一个 Q 矩阵, 是否存在一个 Q 过程呢? 如果存在, 那么恰好存在一个 Q 过程的充要条件是什么?

1945 年, Doob^[1] 就证明, 对任给一个 Q 矩阵, Q 过程总存在, 而且只有两种可能, 或者只存在一个 Q 过程, 或者有无穷多个. 对于 Q 为保守的情况, Q 过程的唯一性问题, 早在 1940 年已为 Feller^[2] 所解决.

本文的结果是: 对任一已给的 Q 矩阵(未必保守), 找出 Q 过程唯一的充要条件.

一、结果的陈述

本文的主要目的是证明

定理 1.1 设任给一个 Q 矩阵, 则存在唯一的 Q 过程的充要条件是下列二条件同时成立:

(1)

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda > 0, \quad 0 < \lambda < +\infty, \quad (1.1)$$

其中 $P_\lambda^{\min} = (p_{ij}^{\min}(\lambda), i, j \in E)$ 是最小 Q 过程, 即

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{ij}(t) dt \quad (i, j \in E, 0 < \lambda < +\infty), \quad (1.2)$$

而

$$f_{ij}(t) = \sum_{n=0}^\infty f_{ij}^{(n)}(t) \quad (i, j \in E), \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ij}^{(0)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} \quad (i, j \in E), \\ f_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} f_{kj}^{(n)}(s) ds \quad (n \geq 0, i, j \in E). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

(2) 方程

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{n} - \mathbf{n}Q = \mathbf{0}_-, \quad \lambda > 0, \\ \mathbf{0}_- \leq \mathbf{n}, \quad \sum_{i \in E} n(i) < +\infty \end{cases} \quad (1.5)$$

只有零解. 其中 $\mathbf{n} = (n(1), n(2), \dots)$, $\mathbf{0}_- = (0, 0, \dots)$.

下面我们首先给出定理 1.1 的证明, 而后把它应用到几个特殊情况上, 最后证明定理 1.1 的条件 (1) 和 (2) 是独立的.

二、几个引理

引理 2.1 若定理 1.1 中的条件 (1) 成立, 则方程

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_-, \quad \lambda > 0, \\ \mathbf{0}_- \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{1} \end{cases} \quad (2.1)$$

只有零解,其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U(1) \\ U(2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \mathbf{0}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

证. 由 (1.2)–(1.4) 式及文献[3], $\{p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E\}$ 是第一型固壹方程¹⁾

$$U(i) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} U(k) + \frac{\delta_{ii}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \quad (2.2)$$

的最小非负解. 于是, 由文献[3]知, $\left\{ \lambda \sum_{i \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E \right\}$ 是拟规格方程

$$U(i) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} U(k) + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \quad (2.3)$$

的最小非负解. 所以, 由 $\lambda \sum_{i \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leq 1$, 定理 1.1 中的条件 (1) 以及文献[3]得知, 方程

$$\left. \begin{aligned} U(i) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} U(k), \lambda > 0, \\ 0 &\leq U(i) \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad i \in E \quad (2.4)$$

只有零解. 然而方程 (2.4) 是方程 (2.1) 的等价方程, 所以方程 (2.1) 只有零解.

注 2.1 引理 2.1 的逆不真. 在有限非保守的情况下, 引理 2.1 的逆真, 即方程 (2.1) 只有零解与定理 1.1 中的条件 (1) 等价, 这就是我们的引理 5.2.

引理 2.2 令

$$U_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_{i \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \quad (i \in E), \quad (2.5)$$

则当 λ 增大时 $U_\lambda(i)$ 不增, 即当 λ 增大时 $\lambda \sum_{i \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)$ 不减.

证. 由于 $\left\{ \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E \right\}$ 是方程 (2.3) 的最小非负解, 及 $0 \leq \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leq 1$, 所以 $\{U_\lambda(i), i \in E\}$ 是非负线性方程

$$\left. \begin{aligned} U(i) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} U(k) + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i}, \quad i \in E \\ 0 &\leq U(i) \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

的最大解, 并且此最大解可由下列方式得到. 令

$$\left. \begin{aligned} U^{(0)}(i) &\equiv 1 \quad (i \in E), \\ U^{(n+1)}(i) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} U^{(n)}(k) + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E, n \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

则

$$U^{(n)}(i) \downarrow U(i) \quad (n \uparrow +\infty). \quad (2.8)$$

由 (2.7) 和 (2.8) 式知, 当 λ 增大时, $U_\lambda(i)$ 不增.

1) 关于非负线性方程组, 第一型固壹方程, 拟规格方程以及最小非负解的定义均见文献[3].

引理 2.3 定理 1.1 中的条件 (1) 与下列条件等价:

存在某个常数 $0 < \lambda_0 < +\infty$, 使

$$\inf_{i \in E} \lambda_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \eta_{\lambda_0} > 0. \quad (2.9)$$

证. 显然, 只需证明由上述条件可推出定理 1.1 的条件 (1). 下面分两种情况证明.

1) $0 < \lambda < \lambda_0$,

$$\eta_\lambda \geq \inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \eta_{\lambda_0} > 0; \quad (2.10)$$

2) $\lambda_0 \leq \lambda < +\infty$.

由引理 2.2 知, $\eta_\lambda \geq \eta_{\lambda_0} > 0$, 引理 2.3 获证.

注 2.2 熟知, 定理 1.1 中的条件 (2) 等价于方程 (1.5) 对某个常数 $0 < \lambda = \lambda_0 < +\infty$ 只有零解. 于是, 由引理 2.3 知, 定理 1.1 中的两个条件都可用形式上较弱, 实质上等价的条件代替.

引理 2.4 存在与 λ 无关的行矢量 $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) > \mathbf{0}_-$, 使 $\alpha p_\lambda^{\min}$ 可和¹⁾, 而 α 不可和, 即

$$\lambda \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} \alpha(i) p_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{i \in E} \alpha(i) \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty \quad (0 < \lambda < +\infty), \quad (2.11)$$

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) = +\infty \quad (2.12)$$

的充要条件是

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda = 0 \quad (0 < \lambda < +\infty) \quad (2.13)$$

或等价地, 存在某一个常数 $0 < \lambda_0 < +\infty$, 使

$$\inf_{i \in E} \lambda_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \eta_{\lambda_0} = 0. \quad (2.14)$$

证. 先证充分性.

由于 $0 < \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leq 1$, 故使 (2.11) 式成立的行矢量 $\alpha > \mathbf{0}_-$ 是存在的, 如选 $\alpha(i) = 2^{-i} (i \in E)$. 若更有 (2.12) 式成立, 则条件的充分性获证. 所以, 下面我们假定所选的 $\alpha > \mathbf{0}_-$, 使 (2.11) 式成立, 而 (2.12) 式不成立. 任意选定一个数 $0 < \bar{\lambda}_0 < +\infty$, 由于 (2.13) 式, 可选 E 的无穷子集 $\hat{E}$ 使

$$\sum_{i \in \hat{E}} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) < +\infty. \quad (2.15)$$

令

$$\hat{E}_1 = \{i : i \in \hat{E}, \alpha(i) > 1\}, \quad (2.16)$$

$$\hat{E}_2 = \{i : i \in \hat{E}, \alpha(i) \leq 1\}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\alpha}(i) = \begin{cases} \alpha(i), & i \in (E \setminus \hat{E}_2), \\ 1, & i \in \hat{E}_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

则

$$\hat{\alpha}(i) \geq \alpha(i) > 0 \quad (i \in E). \quad (2.19)$$

1) 一般地, 一个行矢量 $\rho = (\rho(1), \rho(2), \dots)$ 可和是指 $\sum_i \rho(i) < \infty$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i) \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) &= \sum_{i \in E \setminus \bar{E}_0} \hat{\alpha}(i) \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) + \sum_{i \in \bar{E}_0} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) \\ &\leq \sum_{i \in E} \alpha(i) \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) + \sum_{i \in \bar{E}_0} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) < +\infty, \end{aligned} \quad (2.20)$$

而

$$\sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i) \geq \sum_{i \in \bar{E}} \hat{\alpha}(i) \geq \sum_{i \in \bar{E}} 1 = +\infty. \quad (2.21)$$

参考引理 2.2 的证明, 易知, 对任一 $0 < \lambda < +\infty$, 有

$$\sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i) \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty. \quad (2.22)$$

于是, 引理 2.4 的充分性得证.

再证必要性.

若 (2.14) 式不成立, 则由引理 2.3 知, 这时有

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda > 0 \quad (0 < \lambda < +\infty). \quad (2.23)$$

若有 $\alpha > 0_-$, 使

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty \quad (0 < \lambda < +\infty), \quad (2.24)$$

则由 (2.23) 式得

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \geq \eta_\lambda \sum_{i \in E} \alpha(i) \quad (0 < \lambda < +\infty). \quad (2.25)$$

由 (2.24) 和 (2.25) 式得

$$\eta_\lambda \sum_{i \in E} \alpha(i) < +\infty. \quad (2.26)$$

由 $\eta_\lambda > 0$ 及 (2.26) 式得

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) < +\infty. \quad (2.27)$$

于是, 引理 2.4 的必要性获证.

引理 2.5 设 $\Phi(t) = (\phi_{it}(t), i, j \in E, t \geq 0)$ 是满足柯氏向后微分方程组

$$\Phi'(t) = Q\Phi(t) \quad (2.28)$$

的一个 Q 过程. 若令

$$p_{it}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \phi_{it}(t) dt \quad (i, j \in E, 0 < \lambda < +\infty), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{P}_\lambda^{(j)} = \begin{pmatrix} p_{1j}(\lambda) \\ p_{2j}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (j \in E), \quad (2.30)$$

则列向量组 $\mathbf{P}_\lambda^{(j)} (j \in E)$ 线性独立. 即若实数组 $\alpha_j (j \in E)$ 使对某一 $\lambda > 0$, 有

$$\sum_{j \in E} \alpha_j \mathbf{P}_\lambda^{(j)} = \mathbf{0}_1, \quad (2.31)$$

则

$$\alpha_j = 0 \quad (j \in E). \quad (2.32)$$

特别, 列向量组

$$\mathbf{P}_\lambda^{\min(j)} = \begin{pmatrix} p_{1j}^{\min}(\lambda) \\ p_{2j}^{\min}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (j \in E) \quad (2.33)$$

线性独立.

证. 设 (2.31) 式成立. 令

$$E_0 = \{j: \alpha_j \geq 0\}, \quad (2.34)$$

$$E_1 = \{j: \alpha_j < 0\}, \quad (2.35)$$

由 (2.31) 式的左边的级数收敛于 0 与 (对下角 j) 求和次序无关, 即得

$$\sum_{j \in E_0} \alpha_j p_{ij}(\lambda) = \sum_{j \in E_1} (-\alpha_j) p_{ij}(\lambda) < +\infty \quad (i \in E). \quad (2.36)$$

由 $\Phi(t)$ 满足方程组 (2.28) 的 Q 过程及 (2.29) 式, 得

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} p_{kj}(\lambda) + \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i, j \in E). \quad (2.37)$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E_s} (-1)^s \alpha_i p_{ii}(\lambda) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \sum_{i \in E_s} (-1)^s \alpha_i p_{ki}(\lambda) \\ &\quad + \frac{\sum_{i \in E_s} (-1)^s \alpha_i \delta_{ii}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E, s = 0, 1). \end{aligned} \quad (2.38)$$

由 (2.36), (2.38) 式以及

$$\sum_{i \in E_s} (-1)^s \alpha_i \delta_{ii} \leq |\alpha_i| < +\infty \quad (i \in E, s = 0, 1) \quad (2.39)$$

知,

$$0 \leq \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \sum_{i \in E_s} (-1)^s \alpha_i p_{ki}(\lambda) < +\infty \quad (i \in E, s = 0, 1). \quad (2.40)$$

由 (2.36) 和 (2.40) 式得

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \sum_{j \in E_0} \alpha_j p_{kj}(\lambda) - \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \sum_{j \in E_1} (-\alpha_j) p_{kj}(\lambda) \\ = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(\sum_{j \in E_0} \alpha_j p_{kj}(\lambda) - \sum_{j \in E_1} (-\alpha_j) p_{kj}(\lambda) \right) = 0 \quad (i \in E). \end{aligned} \quad (2.41)$$

由 (2.38) 式得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E_0} \alpha_i p_{ii}(\lambda) - \sum_{i \in E_1} (-\alpha_i) p_{ii}(\lambda) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(\sum_{j \in E_0} \alpha_j p_{kj}(\lambda) \right) \\ &\quad - \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(\sum_{j \in E_1} (-\alpha_j) p_{kj}(\lambda) \right) + \frac{\alpha_i}{\lambda + q_i} \quad (i \in E). \end{aligned} \quad (2.42)$$

由 (2.41) 和 (2.42) 式得

$$0 = 0 + \frac{\alpha_i}{\lambda + q_i} \quad (i \in E). \quad (2.43)$$

从而 (2.32) 式成立. 由最小 Q 过程 $(f_{ij}(t), i, j \in E, t \geq 0)$ 满足 (2.28) 式即得到引理 2.5 的最后部分.

三、主要定理的证明

定理 1.1 的证明. 先证必要性部分.

若定理 1.1 的条件 (2) 不成立, 由文献 [4] 知, 满足柯氏向前微分方程组的 Q 过程不止一个, 于是 Q 过程非唯一.

若定理 1.1 的条件 (1) 不成立, 于是由引理 2.4 知, 存在与 λ 无关的行矢量 $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) > \mathbf{0}_-$, 使 $\alpha P_\lambda^{\min} (0 < \lambda < +\infty)$ 可和, 但 α 不可和. 由 α 不可和, 有

$$\frac{\left(-\sum_{k \in E} q_{ik}\right) \alpha_i}{\sum_{k \in E} \alpha_k} = 0 \quad (i, j \in E). \quad (3.1)$$

于是, 由文献 [5] 知

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \frac{(1 - \lambda P_\lambda^{\min} \mathbf{1})}{\lambda \alpha P_\lambda^{\min} \mathbf{1}} \cdot \alpha P_\lambda^{\min} \quad (3.2)$$

是一个 Q 过程, 而且是不断的. 于是

$$\lambda P_\lambda \mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3.3)$$

由条件 (1) 不成立, 可知

$$\lambda P_\lambda^{\min} \mathbf{1} \cong \mathbf{1}. \quad (3.4)$$

所以

$$P_\lambda \cong P_\lambda^{\min}. \quad (3.5)$$

故 Q 过程非唯一. 至此, 定理 1.1 必要性部分得证.

再证充分性部分.

设定理 1.1 中的条件 (1) 和 (2) 成立, 证 Q 过程唯一.

以 $P_\lambda = \{p_{ij}(\lambda), i, j \in E\}$ 表示任一 Q 过程. 熟知, 对每个 $j \in E$, $\{p_{ij}(\lambda), i \in E\}$ 满足方程

$$x_i \geq \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E). \quad (3.6)$$

而 $\{p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E\}$ 是方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \quad (3.7)$$

的最小(非负)解. 于是, 容易论证

$$p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda) \geq 0 \quad (i, j \in E) \quad (3.8)$$

及 $\{p_{ii}(\lambda) - p_{ii}^{\min}(\lambda), i \in E\}$ 满足方程

$$x_i \geq \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k \quad (i \in E). \quad (3.9)$$

令

$$r_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$R_\lambda = (r_{ij}(\lambda), i, j \in E), \quad (3.11)$$

于是, $\{p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E\}$ 是以 P_λ 为转移概率矩阵的马氏链的过分函数. 显然, 这个链是非常返的. 由引理 2.1, 文献 [6] 以及 $\sum_{i \in E} 2^{-(i+1)}(p_{ii}(\lambda) - p_{ii}^{\min}(\lambda)) \leq \sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} < +\infty$ 知,

$$p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{a \in E} k_\lambda(i, a) \hat{f}_k^{(a)}(j), \hat{f}_k^{(a)}(j) \geq 0 \quad (i, j, a \in E), \quad (3.12)$$

其中

$$k_\lambda(i, a) = \frac{p_{ia}^{\min}(\lambda)}{\sum_{k \in E} 2^{-(k+1)} p_{ka}^{\min}(\lambda)} \quad (i, a \in E). \quad (3.13)$$

令

$$f_k^{(a)}(j) = \frac{\hat{f}_k^{(a)}(j)}{\sum_{k \in E} 2^{-(k+1)} p_{ka}^{\min}(\lambda)} \quad (a, j \in E), \quad (3.14)$$

把 (3.13) 和 (3.14) 式代入 (3.12) 式得

$$p_{ii}(\lambda) = p_{ii}^{\min}(\lambda) + \sum_{a \in E} p_{ia}^{\min}(\lambda) f_k^{(a)}(i), f_k^{(a)}(i) \geq 0 \quad (\lambda > 0, i, j, a \in E). \quad (3.15)$$

由文献 [7] 知, $P_\lambda = \{p_{ii}(\lambda), i, j \in E\}$ 必须满足

$$P_\lambda \geq 0 \quad (\lambda > 0), \quad (3.16)$$

$$\lambda P_\lambda \mathbf{1} \leq \mathbf{1} \quad (\lambda > 0), \quad (3.17)$$

$$P_\lambda - P_\mu + (\lambda - \mu)P_\lambda P_\mu = 0 \quad (\lambda, \mu > 0), \quad (3.18)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(P_\lambda - I) = Q, \quad (3.19)$$

其中, 0 和 I 分别表示零矩阵和单位矩阵. 由 (3.15) 和 (3.17) 式得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = (f_k^{(a)}(1), f_k^{(a)}(2), \dots) \geq \mathbf{0}_- \quad (\lambda > 0, a \in E), \quad (3.20)$$

及

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) + \lambda \sum_{a \in E} p_{ia}^{\min}(\lambda) \cdot [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \leq 1 \quad (i \in E). \quad (3.21)$$

由 (4) 式有

$$\lambda p_{aa}^{\min}(\lambda) > 0 \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.22)$$

由 (3.21) 和 (3.22) 式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.23)$$

这里及以后用

$$[\rho, \mathbf{C}] = \rho \mathbf{C} = \sum_{i \in E} \rho(i) C(i) \quad (3.24)$$

表示行矢量 $\rho = (\rho(1), \rho(2), \dots)$ 和列矢量 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$ 的内积.

由 $P_\lambda^{\min}$ 满足 (3.18) 式得

$$\mathbf{P}_\lambda^{\min(a)} - \mathbf{P}_\mu^{\min(a)} + (\lambda - \mu) \mathbf{P}_\lambda^{\min} \mathbf{P}_\mu^{\min(a)} = \mathbf{0}_1 \quad (\lambda, \mu > 0, a \in E). \quad (3.25)$$

令

$$A(\mu, \lambda) = I + (\mu - \lambda) \mathbf{P}_\lambda^{\min} \quad (\lambda, \mu > 0), \quad (3.26)$$

由 $P_\lambda^{\min}$ 满足 (3.18) 式, 得

$$A(\mu, \nu) A(\nu, \lambda) = A(\mu, \lambda), \quad (3.27)$$

$$A(\mu, \lambda) \mathbf{P}_\mu^{\min} = \mathbf{P}_\lambda^{\min}, \quad (3.28)$$

(3.28) 式即

$$A(\mu, \lambda) \mathbf{P}_\mu^{\min(\cdot)} = \mathbf{P}_\lambda^{\min(a)} \quad (a \in E) \quad (3.29)$$

把 (3.15) 式代入 (3.18) 式, 并注意 $P_\lambda^{\min}$ 也满足 (3.18) 式及引理 2.5, 得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) = \mathbf{F}_\mu^{(a)} + (\mu - \lambda) \sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] \mathbf{F}_\mu^{(r)}. \quad (3.30)$$

由 (3.20) 和 (3.26) 式知, 当 $\lambda \geq \mu > 0$ 时, $\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) \geq \mathbf{0}_-$; 由 (3.30) 式知, 当 $\mu \geq \lambda > 0$ 时, $\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) \geq \mathbf{0}_-$. 所以, 对于任意的 $\lambda, \mu > 0$, 恒有 $\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) \geq \mathbf{0}_-$. 由 (3.30) 式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu), \mathbf{1}] = [\mathbf{F}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + (\mu - \lambda) \sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] [\mathbf{F}_\mu^{(r)}, \mathbf{1}]. \quad (3.31)$$

由 (3.15) 得

$$P_\mu \mathbf{1} = P_\mu^{\min} \mathbf{1} + \sum_{r \in E} P_\mu^{\min(r)} [\mathbf{F}_\mu^{(r)}, \mathbf{1}]. \quad (3.32)$$

故

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu \mathbf{1}] = [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu^{\min} \mathbf{1}] + \sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] [\mathbf{F}_\mu^{(r)}, \mathbf{1}]. \quad (3.33)$$

但由 (3.17) 和 (3.23) 式知

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu \mathbf{1}] = \frac{1}{\mu} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mu P_\mu \mathbf{1}] \leq \frac{1}{\mu} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\mu > 0). \quad (3.34)$$

由 (3.23) 和 (3.34) 式知

$$\sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] [\mathbf{F}_\mu^{(r)}, \mathbf{1}] < +\infty. \quad (3.35)$$

由 (3.23), (3.31) 及 (3.35) 式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu), \mathbf{1}] < +\infty, \quad (3.36)$$

即 $\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu)$ 可和. 今暂固定 a 及 $\lambda > 0$, 而令

$$\rho_\mu = \mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) \quad (\mu > 0), \quad (3.37)$$

于是 $\rho_\mu \geq \mathbf{0}_-$ 且可和, 并且由 (3.27) 式得

$$\rho_\mu A(\mu, \nu) = \rho_\nu \quad (\mu, \nu > 0). \quad (3.38)$$

根据文献 [7, 引理 2.2] 及定理 1.1 的条件 (2) 知, 存在与 μ 无关 (但与 a 和 λ 有关) 的行矢量 $\beta_\lambda^{(a)} \geq \mathbf{0}_-$, 使 $\beta_\lambda^{(a)} P_\mu^{\min}$ 可和, 且

$$\mu \mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) - \mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) Q = \beta_\lambda^{(a)} \quad (\mu > 0), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) = \beta_\lambda^{(a)} P_\mu^{\min} \quad (\mu > 0). \quad (3.40)$$

由 (3.39) 和 (3.40) 式, 特别取 $\mu = \lambda$ 得

$$\lambda \mathbf{F}_\lambda^{(a)} - \mathbf{F}_\lambda^{(a)} Q = \beta_\lambda^{(a)} \quad (\lambda > 0), \quad (3.41)$$

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = \beta_\lambda^{(a)} P_\lambda^{\min} \quad (\lambda > 0). \quad (3.42)$$

在 (3.30) 式的两端右乘以 $(\mu I - Q)$ 后, 得

$$\beta_\lambda^{(a)} = \beta_\mu^{(a)} + (\mu - \lambda) \sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] \beta_\mu^{(r)}. \quad (3.43)$$

从而有

$$[\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] = [\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + (\mu - \lambda) \sum_{r \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(r)}] [\beta_\mu^{(r)}, \mathbf{1}]. \quad (3.44)$$

由 P_λ 和 $P_\lambda^{\min}$ 都满足 (3.19) 式, 得

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda p_{ia}^{\min}(\lambda) \lambda f_k^{(a)}(j) = 0 \quad (i, j, a \in E). \quad (3.45)$$

特别有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_{aa}^{\min}(\lambda) \lambda f_k^{(a)}(j) = 0. \quad (3.46)$$

但

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_{aa}^{\min}(\lambda) = 1, \quad (3.47)$$

故

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda f_k^{(a)}(j) = 0. \quad (3.48)$$

更有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_k^{(a)}(j) = 0, \quad (3.49)$$

由 (3.41) 式得

$$\lambda f_k^{(a)}(j) + q_{ij} f_k^{(a)}(j) = \sum_{i \neq j} f_k^{(a)}(i) q_{ij} + \beta_k^{(a)}(j). \quad (3.50)$$

由 (3.43) 式知, 当 μ 增加时, $\beta_k^{(a)}$ 不增. 又由 (3.48), (3.49) 及 (3.50) 式, 得

$$\beta_k^{(a)} \downarrow 0 \quad (\lambda \uparrow + \infty). \quad (3.51)$$

现分下列几步去完成定理的证明.

1) 试证

$$[\beta_k^{(a)}, \mathbf{1}] \leq \frac{\lambda}{\eta_\lambda} [\mathbf{F}_k^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.52)$$

证. 由 (3.23) 式和定理 1.1 的条件 (1), 只需证明 (3.52) 式的前半部分. 由 (3.42) 式知,

$$\lambda [\mathbf{F}_k^{(a)}, \mathbf{1}] = \lambda [\beta_k^{(a)} P_k^{\min}, \mathbf{1}] = [\beta_k^{(a)}, \lambda P_k^{\min} \mathbf{1}] \geq \eta_\lambda [\beta_k^{(a)}, \mathbf{1}], \quad (3.53)$$

于是

$$[\beta_k^{(a)}, \mathbf{1}] \leq \frac{\lambda}{\eta_\lambda} [\mathbf{F}_k^{(a)}, \mathbf{1}], \quad (3.54)$$

(3.52) 式得证.

2) 试证

$$(\mu - \lambda) [\mathbf{F}_k^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] = [\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] - [\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0, a, t \in E). \quad (3.55)$$

证. 注意到

$$[\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \leq \frac{1}{\mu} [\beta_k^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0), \quad (3.56)$$

$$\sup_{i \in E} |P_{ii}^{\min}(\lambda) - P_{ii}^{\min}(\mu)| \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0), \quad (3.57)$$

及

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda) [\mathbf{F}_k^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] &= (\mu - \lambda) [\beta_k^{(a)} P_k^{\min}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \\ &= (\mu - \lambda) [\beta_k^{(a)}, P_k^{\min} \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] = [\beta_k^{(a)}, (\mu - \lambda) P_k^{\min} \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \\ &= [\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)} - \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] = [\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] - [\beta_k^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}], \end{aligned} \quad (3.58)$$

即得所证.

3) 试证

$$\sum_{t \in E} [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] \mathbf{P}_\mu^{\min(t)} \leq \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1 \right) \mathbf{1} \quad (\mu > 0). \quad (3.59)$$

证. 由 (3.15), (3.17) 及 (3.52) 式得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} &\geq \mu P_\mu \mathbf{1} = \mu P_\mu^{\min} \mathbf{1} + \sum_{t \in \Gamma} \mu [\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)} \\
 &\geq \eta_\mu \mathbf{1} + \sum_{t \in E} \eta_\mu [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)} = \eta_\mu \left(\mathbf{1} + \sum_{t \in E} [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)} \right). \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

从而, (3.59) 式成立.

4) 试证

$$\sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] \leq \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1 \right) [\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0, a \in E). \quad (3.61)$$

证. 由 (3.52) 及 (3.60) 式得

$$\begin{aligned}
 \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] &= \left[\beta_\lambda^{(a)}, \sum_{t \in E} [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)} \right] \\
 &\leq \left[\beta_\lambda^{(a)}, \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1 \right) \mathbf{1} \right] = \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1 \right) [\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty. \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

5) 试证

$$\begin{aligned}
 [\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] &= [\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] \\
 &\quad - \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0, a \in E). \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

证. 由 (3.52) 式, 显然只需证 (3.62) 式的前半部分. 由 (3.44), (3.55) 及 (3.61) 式知,

$$\begin{aligned}
 [\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] &= [\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} (\mu - \lambda) [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu^{\min(t)}] [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] \\
 &= [\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} \{ [\beta_\lambda^{(a)}, P_\mu^{\min(t)}] - [\beta_\lambda^{(a)}, P_\mu^{\min(t)}] \} [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] \\
 &= [\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] - \sum_{t \in E} [\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}]. \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

(3.63) 式得证.

6) 试证

$$[\beta_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \quad (3.65)$$

$$[\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \quad (3.66)$$

及

$$[\beta_\lambda^{(a)}, [\beta_\mu, \mathbf{1}] P_\mu^{\min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty). \quad (3.67)$$

证. 由 (3.51) 式, 即得 (3.65) 和 (3.67) 式; 由 (3.51) 式及

$$P_{\mu\mu}^{\min}(\mu) \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty), \quad (3.68)$$

即得 (3.66) 式.

7) 试证

$$[\beta_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \equiv 0 \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.69)$$

证. 对 (3.63) 式前半部的两端在 $\mu \uparrow +\infty$ 之下取极限, 由 (3.65), (3.66) 及 (3.67) 式, 即得 (3.69) 式.

8) 试证 Q 过程唯一.

由 (3.69) 式得

$$\beta_\lambda^{(a)} \equiv \mathbf{0} \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.70)$$

由 (3.42) 和 (3.70) 式得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} \equiv \mathbf{0}_- \quad (\lambda > 0, a \in E). \quad (3.71)$$

由 (3.15) 和 (3.71) 式得

$$P_\lambda \equiv P_\lambda^{\min} \quad (\lambda > 0), \quad (3.72)$$

即 Q 过程唯一.

至此, 定理 1.1 的充分性得证.

四、对角线型的情况

定义 4.1 若 Q 矩阵有如下的性质, 则称它是对角线型的,

$$q_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad q_{ii} \cong 0 \quad (i \in E). \quad (4.1)$$

定理 4.1 若 Q 矩阵是对角线型的, 则 Q 过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i \in E} q_i = C < +\infty \quad (4.2)$$

成立.

证. 1) 充分性.

若 (4.2) 式成立, 由于 $\left\{ \lambda \sum_{j \in E} P_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E \right\}$ 是方程

$$x_i = \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \quad (4.3)$$

的最小(非负)解, 故

$$\lambda \sum_{j \in E} P_{ij}^{\min}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \geq \frac{\lambda}{\lambda + C} > 0 \quad (i \in E). \quad (4.4)$$

于是, 定理 1.1 中的条件 (1) 成立; 这时方程 (1.5) 变成

$$\begin{cases} \lambda n_i = q_i n_i, \lambda > 0, \\ 0 \leq n_i, \sum_i n_i < +\infty, \end{cases} \quad (4.5)$$

于是有 $n_i \equiv 0 \quad (i \in E)$, 从而定理 1.1 的条件 (2) 也可满足. 故 Q 过程唯一.

2) 必要性.

若 (4.2) 式不成立, 则

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} P_{ij}^{\min}(\lambda) = \inf_{i \in E} \frac{\lambda}{\lambda + q_i} = 0. \quad (4.6)$$

所以定理 1.1 的条件 (1) 不满足, 故 Q 过程不唯一.

五、有限非保守情况

定义 5.1 若 Q 矩阵有如下的性质, 则称它为有限非保守的:

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = 0 \quad (\text{只对有限个 } i \text{ 不成立}). \quad (5.1)$$

定理 5.1 若 Q 矩阵是有限非保守的, 则 Q 过程唯一的充要条件是满足柯氏向后和向前微分方程组的 Q 过程均唯一, 即下列两条同时成立:

A) 方程 (2.1) 只有零解;

B) 方程 (1.5) 只有零解.

先证明两个引理.

引理 5.1 设 $x_i^*(i \in E)$ 是第一型围壺方程

$$x_i = \sum_{k \in E} a_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E) \quad (5.2)$$

的最小非负解, 令 $D = (i: b_i > 0)$, 则

$$x_i^* \leq \sup_{j \in D} x_j^* \quad (i \in E), \quad (5.3)$$

即

$$\sup_{i \in E} x_i^* = \sup_{j \in D} x_j^*. \quad (5.4)$$

证. 令

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(1)} &= b_i \quad (i \in E), \\ x_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} a_{ik} x_k^{(n)} + b_i \quad (i \in E, n \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

于是有

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} b_i > 0 & (i \in D), \\ 0 & (i \in E \setminus D). \end{cases} \quad (5.6)$$

所以

$$x_i^{(1)} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(1)} \quad (i \in E). \quad (5.7)$$

假定有

$$x_i^{(n)} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \quad (i \in E), \quad (5.8)$$

则当注意 n 增大时 $x_i^{(n)}(i \in E)$ 不减, 及 (5.2) 式是第一型围壺方程时, 即得

$$\begin{aligned} x_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} a_{ik} x_k^{(n)} + b_i = \sum_{k \in E} a_{ik} x_k^{(n)} \leq \sum_{k \in E} a_{ik} \cdot \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \\ &= \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \cdot \sum_{k \in E} a_{ik} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(n+1)} \quad (i \in E \setminus D), \end{aligned} \quad (5.9)$$

于是有

$$x_i^{(n+1)} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(n+1)} \quad (i \in E). \quad (5.10)$$

故由归纳法知, 对一切自然数 n 有

$$x_i^{(n)} \leq \sup_{j \in D} x_j^{(n)} \quad (i \in E). \quad (5.11)$$

由 $x_i^{(n)} \uparrow (n \uparrow + \infty)$, $\sup_{j \in D} x_j^{(n)} \uparrow (n \uparrow + \infty)$ 以及 (5.11) 式即得 (5.3) 式. 引理 5.1 获证.

推论 5.1 除保留引理 5.1 中的假定外, 还假定 D 是有限集, 且

$$\max_{i \in D} x_i^* < +\infty, \quad (5.12)$$

则 $x_i^*(i \in E)$ 有有限的最大值, 且

$$\max_{i \in E} x_i^* = \max_{i \in D} x_i^*. \quad (5.13)$$

引理 5.2 若 Q 是有限非保守的, 则定理 5.1 中的条件 A) 与定理 1.1 中的条件 (1) 等价.

证. 由引理 2.1, 只需证明由 A) 推出定理 1.1 的条件 (1). 设 A) 成立, 由引理 2.1 的证明过程和条件 A) 可知, $U_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \quad (i \in E)$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \quad (5.14)$$

的最小非负解. 于是, 由推论 5.1 知

$$\max_{i \in E} \left(1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \right) = \max_{i \in D} \left(1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \right), \quad (5.15)$$

其中 $D = \{i: \sum_{j \in E} q_{ij} \neq 0\}$ 是有限集. 但

$$0 \leq 1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leq 1 \quad (i \in E), \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{kj}^{\min}(\lambda) \right) + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} \\ &\leq \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} = \frac{q_i}{\lambda + q_i} \quad (i \in E), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\max_{i \in E} \left(1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \right) = \max_{i \in D} \left(1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \right) \leq \max_{i \in D} \frac{q_i}{\lambda + q_i} < 1, \quad (5.18)$$

即

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \min_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \geq \min_{i \in D} \frac{\lambda}{\lambda + q_i} > 0. \quad (5.19)$$

所以定理 1.1 条件 (1) 成立. 于是, 引理 5.2 获证.

由引理 5.2 和定理 1.1 即得定理 5.1.

六、有界的情况

定义 6.1 若存在常数 $0 \leq C < +\infty$, 使

$$-q_{ii} \leq C \quad (i \in E) \quad (6.1)$$

成立, 则称 Q 矩阵是有界的.

定理 6.1 若 Q 矩阵有界, 则 Q 过程唯一的充要条件是定理 1.1 中的条件 (2) 满足.

证. 在引理 2.1 的证明中曾指出 $\left\{ \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda), i \in E \right\}$ 是方程 (2.3) 的最小非负解, 故有

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \geq \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \geq \frac{\lambda}{\lambda + C} > 0 \quad (i \in E). \quad (6.2)$$

从而定理 1.1 中的条件 (1) 满足. 故由定理 1.1 知定理 6.1 成立.

七、E 为有限集的情况

定理 7.1 若 E 为有限集, 则 Q 过程唯一.

证. 显见, 定理 1.1 对 E 为有限集的情况也是适用的. 这时 Q 矩阵为有界的, 于是按证明定理 6.1 时所采用的方法可知定理 1.1 中的条件 (1) 成立. 由

$$\sum_{j \neq k} q_{kj} \leq q_k < q_k + \lambda \quad (k \in E), \quad (7.1)$$

易证, 方程 $\lambda \mathbf{n} - \mathbf{n}Q = \mathbf{0}_-$ 的系数行列式不等于零, 于是定理 1.1 中的条件 (2) 也成立. 故定理 7.1 正确.

八、定理 1.1 中两个条件的独立性

今有生灭过程, 其密度矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -(\delta_0 + \beta_0) & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -(\delta_1 + \beta_1) & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -(\delta_2 + \beta_2) & \beta_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

其中 $\delta_0 > 0$. 令

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{\delta_0}, \\ x_1 = x_0 + \frac{1}{\beta_0}, \\ \cdots \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} x_n = x_0 + \frac{1}{\beta_0} + \cdots + \frac{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1}}{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \cdots), \\ x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\mu_0 = 1, \mu_n = \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n} \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (8.4)$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} (x_\infty - x_i) \mu_i, S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mu_i, \quad (8.5)$$

1) 定理 1.1 的条件 (1) 与 (2) 同时成立的例子. 选

$$\delta_n = \beta_n = 1 \quad (n = 0, 1, \cdots), \quad (8.6)$$

则

$$R = S = +\infty. \quad (8.7)$$

于是由 Q 为有限非保守, 从引理 5.2, 文献 [8] 以及 [9, 定理 1] 知, 定理 1.1 的条件 (1) 和 (2) 均成立.

2) 定理 1.1 条件 (1) 成立, 而条件 (2) 不成立的例子. 选

$$\delta_n = \beta_n = (n+1)2^n \quad (n = 0, 1, \cdots), \quad (8.8)$$

则

$$x_n = n+1 \quad (n = 0, 1, \cdots), \quad (8.9)$$

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)2^n} \quad (n = 0, 1, \cdots), \quad (8.10)$$

$$x_\infty = +\infty, \quad (8.11)$$

$$R = +\infty, S = 1 < +\infty. \quad (8.12)$$

于是由文献 [8] 及 [9, 定理 1.4] 知, 定理 1.1 条件 (1) 成立, 而条件 (2) 不成立.

3) 定理 1.1 的条件 (1) 不成立, 而条件 (2) 成立的例子. 选

$$\delta_n = \frac{1}{2} \beta_n = 2^n \quad (n = 0, 1, \cdots), \quad (8.13)$$

则

$$x_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8.14)$$

$$x_\infty = 2, \quad x_\infty - x_i = 2^{-i} \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (8.15)$$

$$\mu_n = 1 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8.16)$$

$$R = 2 < +\infty, \quad S = +\infty. \quad (8.17)$$

于是由文献[8]及文献[9, 定理 1, 2]知, 定理 1.1 的条件(1)不成立而条件(2)成立.

4) 定理 1.1 条件(1)和(2)同时不成立的例子. 选

$$\delta_n = \frac{1}{2} \beta_n = 2^{2n} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8.18)$$

则

$$x_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8.19)$$

$$x_\infty = 2, \quad x_\infty - x_i = 2^{-i} \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (8.20)$$

$$\mu_n = 2^{-n} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8.21)$$

$$R = \frac{4}{3} < +\infty, \quad S = \frac{5}{3} < +\infty. \quad (8.22)$$

于是由文献[8]及文献[9, 定理 2, 4]知, 条件(1)和(2)均不成立.

由 1)–4) 知, 定理 1.1 中条件(1)和(2)独立.

本节结果也证明了生灭过程的四种类型(自然、流入、流出和正则)都是可实现的.

参 考 文 献

- [1] Doob, J. L., Markov chains-denumerable case, *Trans. Am. Math. Soc.*, **58** (1945), 455–473.
- [2] Feller, W., On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff process, *Trans. Am. Math. Soc.*, **48** (1940), 488–515; *ibid.*, **58** (1945), 474.
- [3] 侯振挺, 齐次可列马尔可夫过程中的概率一分析法 (I), 尚未发表 (本文简报已发表于科学通报, **18** (1973), 3, 115–118).
- [4] Reuter, G. E. H., Denumerable Markov processes and the associated semigroup on 1, *Acta Math.*, **97** (1957), 1–46.
- [5] Reuter, G. E. H., Denumerable Markov processes III, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 64–73.
- [6] Hunt G. A., Markoff chains and Martin boundaries, *Illinois J. Math.*, **4** (1960), 313–340.
- [7] Reuter, G. E. H., Denumerable Markov processes II, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 81–91.
- [8] 杨超群, 关于生灭过程构造论的注记, *数学学报*, **15** (1965), 2, 174–187.
- [9] 杨超群, 一类生灭过程, *数学学报*, **15** (1965), 1, 9–31.