

# 工程材料的屈服条件研究

高 万 章

(北京建筑工程学院基础部)

## 摘 要

通过对  $\sigma_m$ ,  $\tau_p$  和  $S_2$  这三个应力分量在应力空间中几何意义的分析, 并且与实验结果进行比较, 得到了适用于各种各向同性材料的比较理想的屈服条件。

**关键词:** 应力空间的坐标, 屈服面, 屈服条件, 工程材料

## 一、引 言

三个主应力是应力张量的特征值, 材料的极限状态必然与三个主应力有关。因此, 为了充分地描述材料的极限状态, 就必须选择与三个主应力等价的三个应力分量来代替应力张量。通过对应力张量的合理分解, 我们已经找到了  $\sigma_m$ ,  $\tau_p$  和  $S_2$  这样三个应力分量<sup>[1]</sup>。这三个应力分量具有: 1) 它们相互独立并且与其所对应的应力张量(或它的三个主应力)等价; 2) 它们与其所对应的应变分量分别成单一线性关系, 即

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_m, \\ \tau_p &= G\gamma_p, \\ S_2 &= G\gamma_2,\end{aligned}\tag{1}$$

其中  $\varepsilon_m$ ,  $\gamma_p$  和  $\gamma_2$  分别为  $\sigma_m$ ,  $\tau_p$  和  $S_2$  所对应的正应变和剪应变; 3) 它们和材料破坏时所表现出来的物理现象相一致。

## 二、三个应力分量在应力空间中的几何意义

为了对材料的屈服条件进行分析, 首先了解一下这三个应力分量在应力空间中的几何意义是必要的。这三个应力分量的表达式及其力学含义是

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \tau_p &= \sqrt{-S_1 S_3} = \sqrt{-(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)}, \\ S_2 &= \sigma_2 - \sigma_m,\end{aligned}\tag{2}$$

这里,  $\sigma_m$  是平均应力(应力球张量),  $\tau_P, S_2$  分别是由应力偏张量分解而得到的两组相互独立的平面纯剪切应力。这三个应力分量都不随物体内一点处坐标的变换而变化。

在应力空间中,  $\sigma_m$  位于主轴坐标的等倾轴上,  $\tau_P$  和  $S_2$  则位于主轴坐标的等倾面上。由于  $\tau_P$  和  $S_2$  相互独立, 在等倾面上它们应相互垂直(如图 1 所示)。因为  $\tau_P = \sqrt{-S_1 S_3}$ , 图 1 中的三角形  $OAB$  和  $OBC$  应为相似三角形。值得注意的是,  $\tau_P$  和  $S_2$  的向量和与  $S_1, S_2$  和  $S_3$  的向量和相比较, 不但大小不等而且方向也不相同, 这是因为  $\tau_P$  和  $S_1, S_3$  是非线性关系, 也就是由  $S_1, S_2$  和  $S_3$  到  $\tau_P, S_2$  的变换是非线性变换。如果我们采用  $\sigma_m, \tau_P$  和  $S_2$  这三个应力分量的方向为应力空间的直角坐标系, 对材料的极限状态分析将是十分方便的。

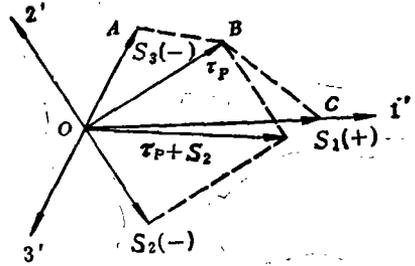


图 1  $\tau_P$  在等倾面上的位置

### 三、屈服面和屈服条件公式

为了得到在  $\sigma_m, \tau_P, S_2$  坐标系中屈服面的形状, 我们首先需要知道  $\tau_P$  的屈服极限值和  $\sigma_m$  及  $S_2$  的关系。根据 Бريدжмен 和 Евстратов<sup>[2]</sup> 的实验数据, 将  $\tau_P$  的屈服极限值和  $\sigma_m$  的关系表示在图 2 和图 3 中。尽管这些实验的实验目的与我们的分析要求并不完全相符, 但我们仍

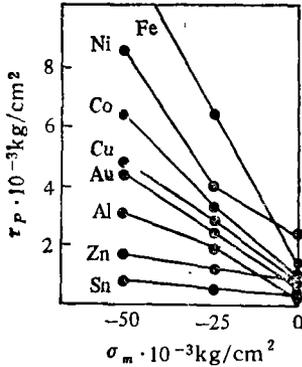


图 2  $\sigma_m$  对金属材料极限状态的影响 ( $\mu_s = 0$ )

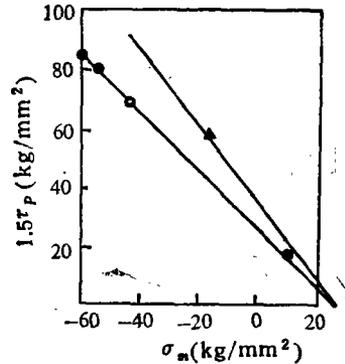


图 3  $\sigma_m$  对铸铁极限状态的影响

(● —  $\mu_s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ▲ —  $\mu_s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

然可以看出, 在  $\mu_s = \text{常数}$  ( $\mu_s = S_2/\tau_P, -\sqrt{2}/2 \leq \mu_s \leq \sqrt{2}/2$ ) 时, 认为  $\tau_P$  的极限值与  $\sigma_m$  成线性关系, 对于大多数工程材料是合理的, 都能得到较好的近似。另外, 如果在静水拉伸时, 材料有可能破坏, 那么在正象限区域内, 极限面应缩为一点, 也就是  $\mu_s$  等于不同常数值各直线应交于  $\sigma_m$  轴上的一点。图 3 中的实验数据也证实了这一设想。关于  $\tau_P$  的屈服极限值和  $S_2$  的关系, 在  $\sigma_m$  等于常数时,  $\tau_P$  的屈服极限值将随  $S_2$  的变化而变化, 极限迹线为一外凸的曲线(如图 4 所示)。由不同  $\mu_s$  值的直线与  $\sigma_m$  等于常数(比如  $\sigma_m = 0$ ) 的平面的交点就可以确定这样的曲线。

根据以上分析我们可以知道, 在  $\sigma_m, \tau_P, S_2$  坐标系中, 屈服面是一个顶点位于  $\sigma_m$  轴上的

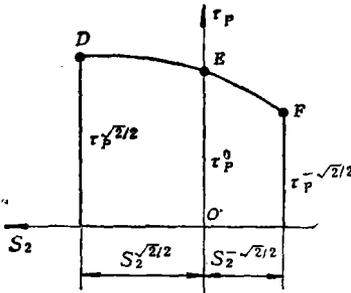


图 4  $S_2$  对极限状态的影响示意图

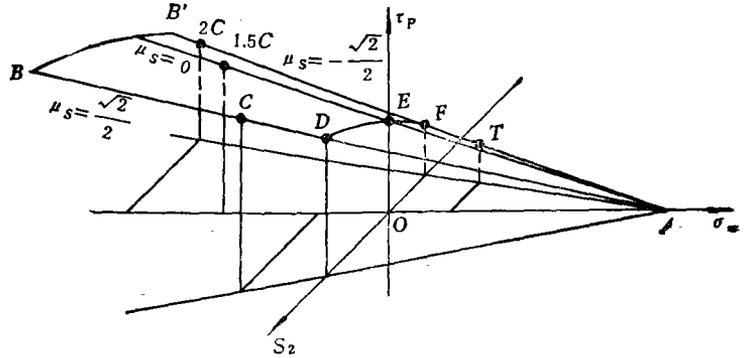


图 5 极限面

锥形曲面(如图 5 所示)。为了使屈服条件公式的形式比较简单,我们采用过  $D, E, F$  三点的圆弧来近似地描述图 4 中的曲线,也就是把图 5 中的屈服面简化成顶点位于  $A$  点的圆锥面(因为圆弧  $DEF$  的圆心不在坐标原点  $O$ , 所以圆锥面的轴线与  $\sigma_m$  轴不重合)。

为了求出这个圆锥面的方程,首先必须根据实验结果求出其必要的参数。

我们用下标  $T, C, 2C$  及  $1.5C$  (图 5) 分别表示单向拉伸、单向压缩、二向等值压缩及

$\sigma_3 = 2\sigma_2$  时的二向压缩(它们的  $\mu_s$  值分别为  $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$  及  $0$ ) 的屈服应力,并用  $\sigma_T, \sigma_C, \sigma_{2C}$  分别表示各相应应力状态下材料屈服时极限主应力的绝对值,用  $\sigma_{1.5C}$  表示相应应力状态下极限主应力  $\sigma_2$  的绝对值。由 (2) 式不难求出在这些应力状态下  $\sigma_m, \tau_P$  和  $S_2$  的极

$$\begin{aligned} \text{限值分别为 } \sigma_{mT} &= \frac{1}{3} \sigma_T, S_{2T} = -\frac{1}{3} \sigma_T, \tau_{PT} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T; \sigma_{mC} = -\frac{1}{3} \sigma_C, S_{2C} = \frac{1}{3} \sigma_C, \\ \tau_{PC} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_C; \sigma_{m2C} = -\frac{2}{3} \sigma_{2C}, S_{22C} = -\frac{1}{3} \sigma_{2C}, \tau_{P2C} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{2C}; \sigma_{m1.5C} = \sigma_{1.5C}, S_{21.5C} = 0, \\ \tau_{P1.5C} &= \sigma_{1.5C}. \end{aligned}$$

根据由单向拉伸和二向等值压缩(它们的  $\mu_s$  值都是  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 在同一条直线上)的极限应力值,由图 5 中的几何关系即可求出圆锥面顶点  $A$  的坐标为

$$\sigma_m^0 = \frac{\sigma_T \sigma_{2C}}{\sigma_{2C} - \sigma_T} \quad (3)$$

知道了顶点  $A$  的坐标,根据相应的极限应力值和图 5 的几何关系,就可以求出图 5 中各直线在  $\sigma_m - \tau_P$  和  $\sigma_m - S_2$  坐标面上的投影对  $\sigma_m$  轴的斜率分别为

$$S_T^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}(\sigma_{2C} - \sigma_T)}{\sigma_T + 2\sigma_{2C}}, \quad (4)$$

$$S_C^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\frac{\sigma_{2C} - \sigma_T}{\sigma_T + 2\sigma_{2C}}, \quad (5)$$

$$S_T^0 = -\frac{\sigma_{1.5C} \sigma_{2C} - \sigma_T \sigma_{1.5C}}{\sigma_{1.5C} \sigma_{2C} - \sigma_T \sigma_{1.5C} + \sigma_T \sigma_{2C}}, \quad (6)$$

$$S_3^0 = 0, \quad (7)$$

$$S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}(\sigma_c\sigma_{2c} - \sigma_T\sigma_c)}{\sigma_c\sigma_{2c} + 3\sigma_T\sigma_{2c} - \sigma_T\sigma_c}, \quad (8)$$

$$S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sigma_c\sigma_{2c} - \sigma_T\sigma_c}{\sigma_c\sigma_{2c} + 3\sigma_T\sigma_{2c} - \sigma_T\sigma_c}, \quad (9)$$

其中, 上标表示该直线所对应的应力偏量的形式参数, 下标  $\tau$  表示直线在  $\sigma_m - \tau_p$  平面上的投影, 下标  $s$  表示直线在  $\sigma_m - S_2$  平面上的投影。

根据圆锥面的特点, 由 (3) 和 (4) — (9) 式中的这些参数, 不难求出图 5 中屈服面  $ABB'$  的曲面方程, 这就是

$$(S_2 - a)^2 + (\tau_p - b)^2 = R^2, \quad (10)$$

其中

$$a = A(\sigma_m - \sigma_m^0), \quad (11)$$

$A =$

$$\frac{(S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2(S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0) - (S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^2(S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0) + (S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0)(S_\tau^0 - S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}})(S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})}{-2[(S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0)S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - (S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0)S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}]}, \quad (12)$$

$$b = B(\sigma_m - \sigma_m^0), \quad (13)$$

$$B = \frac{S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (S_2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}) + [(S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 - (S_\tau^0)^2] S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [(S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 - (S_\tau^0)^2] S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2[(S_\tau^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0) S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - (S_\tau^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_\tau^0) S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}]}, \quad (14)$$

$$R^2 = [A^2 + (S_\tau^0 - B)^2](\sigma_m - \sigma_m^0)^2. \quad (15)$$

某些材料的  $\sigma_T$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{2c}$  及  $\sigma_{1.5c}$  不易用实验测得, 在这种情况下, 我们可以用任意两个  $\mu_s$  值相同的试验值 (例如二向等值拉伸和单向压缩或纯剪切,  $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 2\sigma_2$  中的任意两个) 来确定  $\sigma_m^0$  的值, 然后再根据另外两个  $\mu_s$  值不同的实验值, 即可确定屈服面及屈服条件公式。

因为  $\sigma_m$ ,  $\tau_p$ ,  $S_2$  与其对应的应变  $\epsilon_m$ ,  $\gamma_p$ ,  $\gamma_2$  有 (1) 式所表示的单一线性关系, (10) 式也可以用相应的应变表示成相似的形式。

#### 四、屈服条件公式的线性简化

(10) 式的屈服条件用于各种各向同性的工程材料 (包括塑性材料和脆性材料) 都具有较高的精度。但 (10) 式这样一个非线性公式, 使用起来还不十分简便。为此, 我们将 (10) 式进行线性简化。

首先, 我们把图 5 中的曲面形状的屈服面简化为平面, 也就是用图 5 中的平面  $ABB'$  代替圆锥形的屈服面; 其次, 最大纯剪切应力  $\tau_p$  和最大剪应力  $\tau_{\max}$  比较, 在  $\mu_s = 0$  时, 二者相等; 在  $\mu_s = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 二者差别最大, 这时  $\tau_{\max}$  比  $\tau_p$  大 6.07%。为了得到线性简化, 我们用线性参量  $\tau_{\max}$  代替非线性参量  $\tau_p$ 。用  $\sigma_m$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $S_2$  建立图 5 中平面  $ABB'$  的方程, 整理后即

可得到简化的屈服条件公式如下<sup>[1]</sup>:

$$\sigma_1 - \left( \frac{\sigma_T^0}{\sigma_{2c}^0} - \frac{\sigma_T^0}{\sigma_c^0} \right) \sigma_2 - \frac{\sigma_T^0}{\sigma_c^0} \sigma_3 = \sigma_T^0, \tag{16}$$

这里  $\sigma_T^0$ ,  $\sigma_c^0$ ,  $\sigma_{2c}^0$  分别表示单向拉伸、单向压缩、二向等值压缩时极限主应力的绝对值。

(16) 式的精度不如 (10) 式, 但比 (10) 式偏于安全, 使用十分简便。

### 五、屈服条件与实验结果的比较

在与实验结果进行比较时, 不少文献只在拉剪和压剪这样一些应力状态下进行比较, 这是不全面的。由于不管任何应力状态, 都可以分解为一个应力球张量(即平均应力)和一个平面应力之和, 实验也已经证实, 极限应力值和平均应力  $\sigma_m$  成线性关系, 所以只要在平面应力状态下与实验结果进行比较, 就可以较全面地评价一个屈服条件。

按着 Kupter 等人对混凝土的实验结果<sup>[3]</sup>, 我们取

$$\sigma_c = 10\sigma_T, \quad \sigma_{2c} = 11.7\sigma_T, \quad \sigma_{1.5c} = 6.25\sigma_T,$$

由 (3) 和 (4)~(9) 式即可得到  $\sigma_m^0 = 1.0935\sigma_T$ ,  $S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -0.6202$ ,  $S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.4385$ ,  $S_r^0 = -0.8511$ ,  $S_s^0 = 0$ ,  $S_r^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.0649$ ,  $S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -0.7530$ 。由 (12), (14), (15) 式得到

$$A = -1.2100, \quad B = 1.9799, \quad R^2 = 9.4800(\sigma_m - \sigma_m^0)^2.$$

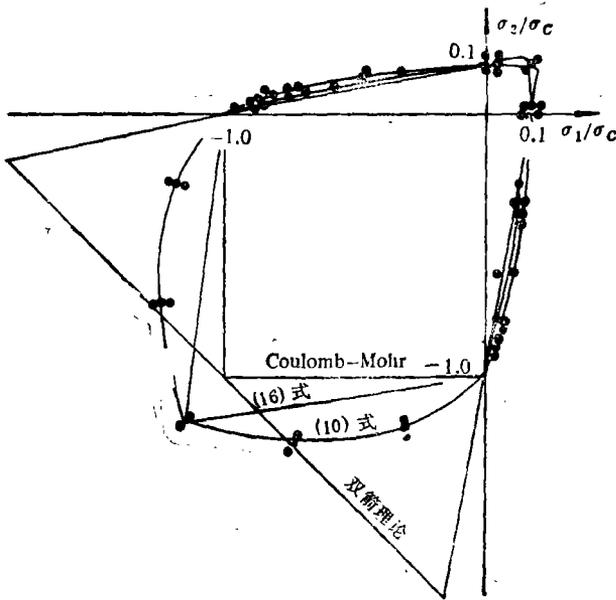


图 6 (10) 和 (16) 式与混凝土实验结果的比较<sup>[3]</sup>

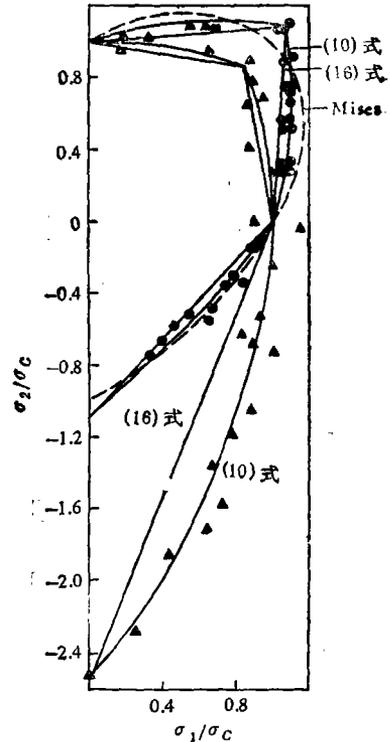


图 7 (10) 和 (16) 式与钢和铸铁的实验结果的比较  
(●——钢, ▲——铸铁)<sup>[4]</sup>

由 (11), (13) 及 (10) 式得到混凝土的屈服条件公式为

$$\begin{aligned} & [S_2 + 1.2106(\sigma_m - 1.0935\sigma_T)]^2 + [\tau_p - 1.9799(\sigma_m - 1.0935\sigma_T)]^2 \\ & = 9.4800(\sigma_m - 1.0935\sigma_T)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

对于其它材料, 只要得到了所需要的实验数据, 就可根据  $\mu_s$  值相同的两个实验数据求得  $\sigma_m^0$ , 并可进一步根据相应的数据确定  $S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ,  $S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ,  $S_r^0$ ,  $S_s^0$ ,  $S_r^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ,  $S_s^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$  及  $A$ ,  $B$ ,  $R^2$ , 从而得到与 (17) 式相似的屈服条件. 在图 6 和图 7 中, 把 (10) 和 (16) 式的屈服条件和几种材料的实验结果进行了比较. 可以看出, 在平面应力状态下, 它们和实验结果是一致的.

在图 6 和图 7 中, 我们把 (10) 式和 (16) 式的屈服条件与 Coulomb-Mohr, Mises 的公式及俞茂镛的双剪应力公式<sup>[4,5]</sup>进行了比较.

## 六、对塑性材料的简化

公式对塑性材料的简化, 可以从  $S_2$  和  $\sigma_m$  对  $\tau_p$  极限值的影响来考虑. 首先考虑  $S_2$  对  $\tau_p$  极限值的影响.  $S_2$  的值的范围是有限度的, 其变化范围是

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\tau_p \leq S_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_p.$$

由对塑性材料的实验数据的分析知道, 在  $\sigma_m$  的值不变时 (比如  $\sigma_m = 0$ ),  $\mu_s$  的值分别为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \text{ 和 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

时,  $\tau_p$  的极限值有  $\tau_p^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} < \tau_p^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \tau_p^0$ , 而且  $\tau_p^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$  只比  $\tau_p^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$  大 5% 左右. 这表明在图 4 中,  $E$  点是  $D$ ,  $E$  和  $F$  三点中的最高点,  $D$  和  $F$  两点的高度相近. 我们假定

$$\tau_p^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \tau_p^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(这时  $-S_1^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = S_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ). 有  $a = 0$ ,  $A = 0$ . (5) 式及 (11)–(15) 式变为

$$S_2^2 + (\tau_p - b)^2 = R^2, \quad (18)$$

其中

$$b = B(\sigma_m - \sigma_m^0), \quad (19)$$

$$B = \frac{(S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 + (S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 (-S_r^0)^2}{2(S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - S_r^0)}, \quad (20)$$

$$R^2 = (S_r^0 - B)^2 (\sigma_m - \sigma_m^0)^2. \quad (21)$$

对实验数据进行分析比较还可以知道, 在  $\sigma_m$  等于常数时,

$$(S_2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 + (\tau_p^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2$$

略大于  $(\tau_p^0)^2$ , 二者的值非常接近, 如果我们按二者相等简化, 则有  $B = 0$ . (18) 式可简化为

$$S_2^2 + \tau_p^2 = [(S_r^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 + (S_s^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^2] (\sigma_m - \sigma_m^0)^2. \quad (22)$$

关于  $\sigma_m$  对  $\tau_p$  极限值的影响, 在  $\sigma_m$  的值变化不大时, 不太明显. 如果忽略  $\sigma_m$  的影响, 并且取  $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_T$ , 则 (22) 式变为

$$S_2^2 + \tau_p^2 = \frac{1}{3} \sigma_r^2, \quad (23)$$

由  $S_1 + S_2 + S_3 = 0$  可得

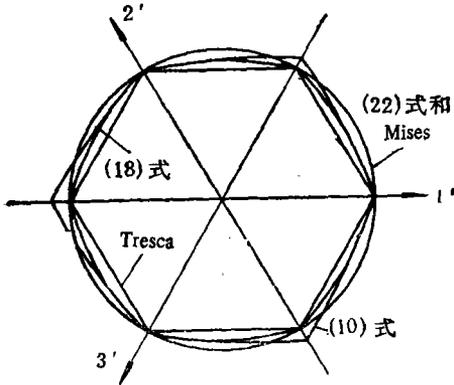


图 8 各种屈服条件在等倾面上的迹线

$$\begin{aligned} S_2^2 + \tau_p^2 &= S_2^2 - S_1 S_3 = S_2^2 + S_1^2 + S_1 S_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + (S_2 + S_3)(S_1 + S_3) \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 \\ &= \frac{1}{2} [(S_1 + S_2)^2 + (S_2 + S_3)^2 + (S_3 + S_1)^2] \\ &= \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ &= \frac{1}{3} \sigma_r^2. \end{aligned}$$

由此可知, (23) 式就是 Mises 的公式。

值得注意的是, (23) 式只能在  $\sigma_m$  变化不大时才能使用。如果  $\sigma_m$  的值变化范围很大, 我们由 Бريدжмен 的实验结果(见图 2) 可以看出, (23) 式将和实际情况不相符。(10), (16), (18) 和 (22) 式在这种情况下和实际情况是相符的。

(16) 式的屈服条件, 如果忽略  $S_2$  和  $\sigma_m$  的影响, 即简化为 Tresca 的公式。同样, Tresca 的公式也只能在  $\sigma_m$  值变化不大的情况下使用。

在图 8 中, 我们画出了一些屈服条件公式在等倾面上的迹线。

### 参 考 文 献

- [1] 高万章, 中国科学 A 辑, 1988, 2:204—210.
- [2] Рисаренк, Г. С. и Лебедев А. А., 复杂应力状态下的材料变形与强度(江明行译), 科学出版社, 1983, 103—109; 114.
- [3] Kupfer, H. et. al., *ACI. J.*, 66(1969), 8.
- [4] 俞茂铨、何丽南、宋凌宇, 中国科学 A 辑, 1985, 12:1113—1120.
- [5] Yu Mao Hong (俞茂铨), *Inter. J. Mech. Sci.*, 25(1983), 1:71—74.