

利用精确阻抗边界条件分析阻抗劈的电磁散射

吴良超 汪茂光

(西安电子科技大学天线研究所, 西安 710071)

摘 要

利用精确阻抗边界条件 (EIBC), 结合波动方程, 采用纵向场法, 按 Maliuzhinets 的思路, 详细分析了在精确阻抗边界条件下阻抗劈的电磁散射解, 并且给出了其绕射场的一致性绕射系数表达式.

关键词 散射、劈、精确阻抗边界条件

阻抗劈的电磁散射理论是分析涂覆吸波材料目标的雷达散射截面 (RCS) 的理论基础之一, 已有许多作者从事过这方面的研究^[1-4]. 所用的方法主要是 Maliuzhinets 法^[1-3] 和 Weiner-Hopf 法^[4], 他们的出发点都是波动方程加上阻抗边界条件, 但是 Leontovich 阻抗边界条件是近似阻抗边界条件^[5, 6], 它只有在平面波垂直阻抗劈劈面入射或者阻抗劈为良导体或大折射率材料才成立. 相应地, 利用近似阻抗边界条件分析出的阻抗劈的电磁散射解也是近似的.

1 利用精确阻抗边界条件分析阻抗劈的电磁散射

图 1 为一阻抗劈, 位于柱坐标系 (ρ, φ, z) 中, 平面波垂直劈边缘与劈面成 φ' 角入射 (劈边缘方向为 z 方向), 观察点为 $P(\rho, \varphi)$. 阻抗劈由两个阻抗面组成, 一面为“0”面, 阻抗为 $\tilde{Z}_0$, 材料的复相对介电常数和复相对磁导率分别为 $\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\mu}_0$; 另一面为“ n ”面, 阻抗为 $\tilde{Z}_n$, 材料的复相对介电常数和复相对磁导率分别为 $\tilde{\epsilon}_n, \tilde{\mu}_n$. 劈外角为 $n\pi$ 弧度. 两阻抗面满足的精确阻抗边界条件为

$$\text{TM 波入射: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \pm jk \sin \theta_{0,n}^e E_z = 0, \varphi = 0, n\pi, \quad (1)$$

$$\text{TE 波入射: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \pm jk \sin \theta_{0,n}^h H_z = 0, \varphi = 0, n\pi, \quad (2)$$

其中, E_z, H_z 分别为 z 向电场与磁场, k 为自空间波数, $\varphi = 0$ 对应阻抗劈的“0”面, $\varphi = n\pi$ 对应阻抗劈的“ n ”面. “+”号与 $\varphi = 0$ 对应, “-”号与 $\varphi = n\pi$ 对应.

$$\sin\theta_{0,n}^e = -\frac{\eta_0}{\tilde{Z}_{0,n}} k_{t\varphi_{0,n}}, \quad \sin\theta_{0,n}^h = -\frac{\tilde{Z}_{0,n}}{\eta_0} k_{t\varphi_{0,n}}, \quad (3)$$

η_0 为自由空间波阻抗, $k_{t\varphi_{0,n}}$ 的定义为

$$k_{t\varphi_0} = -\cos\beta_0, \quad \beta_0 = \arcsin\left[\frac{\sin\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\tilde{u}_{r0}\tilde{\epsilon}_{r0}}}\right]. \quad (4)$$

将上式下标“0”换成“n”, “ φ' ”换成 $n\pi - \varphi'$, 便可得到 kt_{φ_n} , 这里 $\theta_{0,n}^{e,h}$ 不再是一个常数, 而是一个随入射角 φ' 变化而变化的量.

在空间观察点 $P(\rho, \varphi)$, 纵向电场与磁场满足齐次 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \quad \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0. \quad (5)$$

根据纵向场理论, 当纵向场分量 E_z, H_z 求出后, 其它分量场便可由 E_z, H_z 经过矩阵运算而求得. 因此, 这里只给出纵向场的解. 纵向场求解的出发点便是 (5) 式的波动方程和 (1), (2) 两式的精确阻抗边界条件. 在这些式中, 由于 E_z, H_z 存在着对称性, 因此, 我们分析其中一个量 E_z 的解. H_z 的解可由 E_z 的解根据对称性直接写出.

根据平面波谱理论, E_z 可写成如下谱函数的积分形式:

$$E_z(\rho, \varphi) = \frac{-1}{2\pi j} \int_{\alpha'} F_z\left(-\alpha + \frac{n\pi}{2}\right) e^{-jk\rho\cos(\varphi-\alpha)} d\alpha, \quad (6)$$

其中, $F_z(-\alpha + \frac{n\pi}{2})$ 为谱函数, α' 为 α 平面的积分路径, 要求该路径能够保证 (6) 式的积分一致收敛并满足辐射条件. 从 (6) 式可以看出, $E_z(\rho, \varphi)$ 满足 (5) 式的波动方程.

对 (6) 式进行变量代换, 令

$$\gamma = \varphi - \alpha, \quad (7)$$

则 (6) 式变换成

$$E_z(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma'} F_z\left(\gamma - \varphi + \frac{n\pi}{2}\right) e^{-jk\rho\cos\gamma} d\gamma, \quad (8)$$

γ' 为复平面 γ 上的积分路径, 由 Maliuzhinets 定义为图 2 所示的由线^[1].

将 (8) 式代入精确阻抗边界条件 (1) 式, 且考虑到 (7) 式的变换, 得

$$jk \int_{\gamma'} F_z\left(\gamma - \varphi + \frac{n\pi}{2}\right) (\sin\gamma \pm \sin\theta_{0,n}^e) e^{-jk\rho\cos\gamma} d\gamma = 0, \quad \varphi = 0, n\pi. \quad (9)$$

在定义了图 2 所示的 γ' 积分路径后, (9) 式成立的充要条件为 $F_z\left(\gamma - \varphi + \frac{n\pi}{2}\right) (\sin\gamma + \sin\theta_{0,n}^e)$ 是偶函数, 再考虑到 $\varphi = 0, n\pi$, 得

$$F_z\left(\gamma \pm \frac{n\pi}{2}\right) (\sin\gamma \pm \sin\theta_{0,n}^e) = F_z\left(-\gamma \pm \frac{n\pi}{2}\right) (-\sin\gamma \pm \sin\theta_{0,n}^e). \quad (10)$$

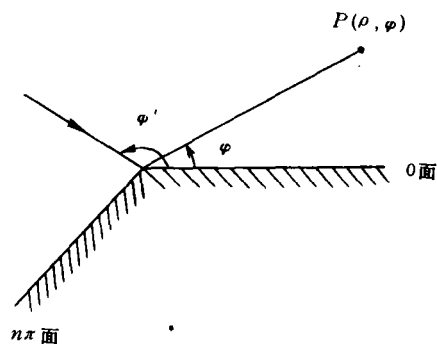
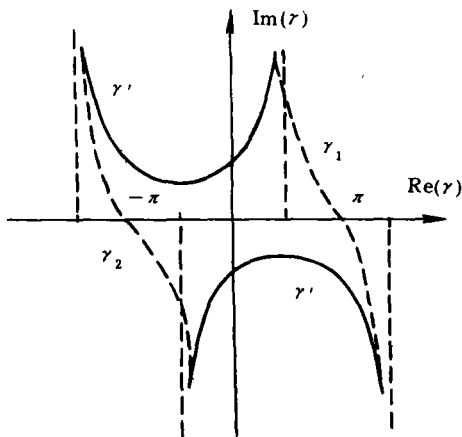


图 1 阻抗劈

图 2 积分路径 γ'

这样, 求解阻抗劈电磁散射的解便转化成 (10) 式一阶泛函差分方程的解了. 根据一阶线性差分方程解的理论, 方程的一般解形式为

$$F_{\pm}(\gamma) = \psi^{\epsilon}(\gamma) \sigma(\gamma), \quad (11)$$

$$(\sin \gamma \pm \sin \theta_{0,n}^{\epsilon}) \psi^{\epsilon} \left(\gamma \pm \frac{n\pi}{2} \right) = (-\sin \gamma \pm \sin \theta_{0,n}^{\epsilon}) \psi^{\epsilon} \left(-\gamma \pm \frac{n\pi}{2} \right), \quad (12)$$

$$\sigma \left(\gamma \pm \frac{n\pi}{2} \right) = \sigma \left(-\gamma \pm \frac{n\pi}{2} \right). \quad (13)$$

$F_{\pm}(\gamma)$ 的零点和极点都包含在 $\sigma(\gamma)$ 中, $\psi^{\epsilon}(\gamma)$ 在 $|R_{\epsilon}(\gamma)| \leq \frac{n\pi}{2}$ 内不含任何零点和极点^[1]. 下面先求 $\psi^{\epsilon}(\gamma)$ 的解, 然后再求 $\sigma(\gamma)$ 的解.

对 (12) 式两边取对数, 再求导, 并进行整理得

$$g \left(\gamma + \frac{n\pi}{2} \right) + g \left(-\gamma + \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{1}{\cos \left(\gamma + \theta_0^{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{1}{\cos \left(\gamma - \theta_0^{\epsilon} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (14)$$

$$g \left(\gamma - \frac{n\pi}{2} \right) + g \left(-\gamma - \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{1}{\cos \left(\gamma + \theta_0^{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \right)} - \frac{1}{\cos \left(\gamma - \theta_0^{\epsilon} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (15)$$

其中 $g(\gamma) = \text{dln}[\psi(\gamma)]/\text{d}\gamma$, 对 $g(\gamma)$ 作沿虚轴的 Fourier 变换, 定义如下:

$$H(\omega) = FT[g(\gamma)] = \int_{-j\infty}^{j\infty} g(\gamma) e^{-\omega\gamma} \text{d}\gamma. \quad (16)$$

之所以作沿虚轴的 Fourier 变换, 是因为 $\psi^e(\gamma)$ 的对数导数 $g(\gamma)$ 在 $|\operatorname{Re}(\gamma)| \leq \frac{n\pi}{2}$ 内是正则函数, Fourier 变换中的传输定理仍然成立, 一些变换性质也存在:

$$FT[g(-\gamma)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(-\gamma) e^{-\omega\gamma} d\gamma = H(-\omega), \quad (17)$$

$$FT\left[g\left(\gamma \pm \frac{n\pi}{2}\right)\right] = e^{\pm \omega \frac{n\pi}{2}} H(\omega), \quad FT\left[g\left(-\gamma \pm \frac{n\pi}{2}\right)\right] = e^{\mp \omega \frac{n\pi}{2}} H(-\omega). \quad (18)$$

这样, 利用 (16)–(18) 式的变换性质, 对 (14), (15) 两式进行变换, 消去 $H(-\omega)$ 得

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{n\pi\omega} - e^{-n\pi\omega}} \left[e^{\left(\frac{n\pi}{2} + \theta_0^e + \frac{\pi}{2}\right)\omega} + e^{\left(\frac{n\pi}{2} - \theta_0^e - \frac{\pi}{2}\right)\omega} + e^{\left(-\frac{n\pi}{2} + \theta_n^e + \frac{\pi}{2}\right)\omega} + e^{\left(-\frac{n\pi}{2} - \theta_n^e - \frac{\pi}{2}\right)\omega} \right] FT\left[\frac{1}{\cos\gamma}\right]. \quad (19)$$

为了求出 $\psi^e(\gamma)$, 需要对 (19) 式两边作 Fourier 反变换, 由 (16) 式的 Fourier 变换定义, 相应地有其反变换及其性质为

$$g(\gamma) = FT^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{\omega\gamma} d\omega, \quad FT^{-1}[H(\omega) e^{i\omega\varphi}] = g(\varphi + \gamma). \quad (20)$$

首先, 先对 $\frac{1}{e^{n\pi\omega} - e^{-n\pi\omega}}$ 进行 Fourier 反变换, 然后应用卷积定理, 有

$$FT^{-1}\left[\frac{1}{e^{n\pi\omega} - e^{-n\pi\omega}}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{n\pi\omega} - e^{-n\pi\omega}} e^{\omega\gamma} d\omega = \frac{j}{4n\pi} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2n}, \quad (21)$$

$$l(\gamma) = FT^{-1}\left[\frac{1}{e^{n\pi\omega} - e^{-n\pi\omega}} FT\left(\frac{1}{\cos\gamma}\right)\right] = \frac{j}{4n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{u}{2n} \frac{1}{\cos(\gamma - u)} du. \quad (22)$$

最后考虑到 Fourier 反变换的性质 (20) 式, 且考虑到 $g(\gamma) = d[\ln\psi^e(\gamma)]/d\gamma$, 得

$$\begin{aligned} \psi^e(\gamma) = & A \exp \int_0^\gamma l\left(\gamma' + \frac{n\pi}{2} + \theta_0^e + \frac{\pi}{2}\right) d\gamma' \cdot \exp \int_0^\gamma l\left(\gamma' + \frac{n\pi}{2} - \theta_0^e - \frac{\pi}{2}\right) d\gamma' \\ & \cdot \exp \int_0^\gamma l\left(\gamma' - \frac{n\pi}{2} + \theta_0^e + \frac{\pi}{2}\right) d\gamma' \cdot \exp \int_0^\gamma l\left(\gamma' - \frac{n\pi}{2} - \theta_0^e - \frac{\pi}{2}\right) d\gamma', \end{aligned} \quad (23)$$

其中 A 是常数. 利用 Maliuzhinets 函数的定义,

$$\psi_n(\gamma) = \exp \frac{j}{4n\pi} \int_0^\gamma dv \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{u}{2n} \frac{1}{\cos(v-u)} du. \quad (24)$$

(23) 式可写成为

$$\psi^e(\gamma) = A' \psi_n\left(\gamma + \frac{n\pi}{2} + \theta_0^e + \frac{\pi}{2}\right) \psi_n\left(\gamma + \frac{n\pi}{2} - \theta_0^e - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\psi_n\left(\gamma - \frac{n\pi}{2} + \theta_n^e + \frac{\pi}{2}\right) \psi_n\left(\gamma - \frac{n\pi}{2} - \theta_0^e - \frac{\pi}{2}\right), \quad (25)$$

其中 A' 为一常数, 由于散射场在后面要对入射场进行归一, 所以 A' 在以后要被消去, 不失一般性, 这里可令 $A'=1$. 这样, $\psi^e(\gamma)$ 的解便求出了.

下面求 $\sigma(\gamma)$ 的解. 从 (13) 式很容易看出, 该方程有一个特解为

$$\sigma_1(\gamma) = \sin \frac{\gamma}{n}, \quad (26)$$

且以 $\sigma_1(\gamma)$ 为变量的任何函数 $f[\sigma_1(\gamma)]$ 都是 (13) 式的解. 为了唯一确定 (13) 式的解, 必须结合物理概念, 考虑下列两条要求:

(1) 波谱函数具有渐近行为 $\lim_{|\operatorname{Im}(\gamma)| \rightarrow \infty} F_z(\gamma) = \text{常数}$,

(2) 入射波的存在使得 (8) 式 F_z 在 $\gamma = \varphi - \varphi'$ 处有一个一阶奇点.

考虑到上述两条要求, 把 $f[\sigma_1(\gamma)]$ 用 Laurent 级数展开, 则满足上述两条要求的级数系数除一阶奇点外, 其余系数全为零, 即

$$f[\sigma_1(\gamma)] = \frac{C_{-1}}{\sigma_1(\gamma) - \sigma_1\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} = \sigma(\gamma). \quad (27)$$

由于 $\gamma = \varphi - \varphi'$ 时 (8) 式的 $F_z\left(\gamma - \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$ 的留数就是入射波振幅 E_{α} , 所以

$$\frac{\psi^e\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right) C_{-1}}{\sigma_1'\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} = E_{\alpha}, \quad C_{-1} = E_{\alpha} \frac{\sigma_1'\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)}{\psi^e\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)}. \quad (28)$$

最后谱函数 $F_z(\gamma)$ 的解为

$$F_z(\gamma) = \frac{\psi^e(\gamma)}{\psi^e\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\varphi'}{n}}{\sin \frac{\gamma}{n} - \cos \frac{\varphi'}{n}} E_{\alpha}. \quad (29)$$

将 (29) 式代入 (8) 式便得到阻抗劈的辐射场的解.

2 绕射场一致性绕射系数

从 (8) 式中可分离出绕射场的积分表达式为

$$E^d(\rho, \varphi) = \int_{r_1, r_2} E_{\alpha} e^{-jk\rho \cos \gamma} \frac{\psi\left(\gamma + \frac{n\pi}{2} - \varphi\right)}{\psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{\varphi'}{n}}{\cos \frac{\gamma - \varphi}{n} - \cos \frac{\varphi'}{n}} d\gamma, \quad (30)$$

其中, γ_1, γ_2 分别为经过鞍点 π 和 $-\pi$ 的最陡下降路径(见图 2). 利用改进的 Paulicpemmow 最陡下降法, 经过推导¹⁾, 得 $k\rho$ 较大时的一致性绕射解为

$$E_{\pm}^d(\rho, \varphi) = E_{o\pm} D^e(\varphi', \varphi, \theta_0^e, \theta_n^e, k\rho) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (31)$$

其中 D^e 为绕射系数.

$$D^e(\varphi', \varphi, \theta_0^e, \theta_n^e, k\rho) = -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2k\pi}} \left[\frac{\tilde{\psi}^e\left(\pi + \frac{n\pi}{2} - \varphi\right)}{\tilde{\psi}^e\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} L_n^-(\varphi', \varphi, \theta_0^e) + \frac{\tilde{\psi}^e\left(-\pi + \frac{n\pi}{2} - \varphi\right)}{\tilde{\psi}^e\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi'\right)} L_n^+(\varphi', \varphi, \theta_n^e) \right], \quad (32)$$

$$\tilde{\psi}^e(\alpha) = \frac{\psi^e(\alpha)}{\cos \frac{\alpha}{n} + \sin \frac{\theta_0^e}{n}}, \quad \tilde{\psi}^e(\alpha) = \frac{\psi^e(\alpha)}{\cos \frac{\alpha}{n} + \sin \frac{\theta_n^e}{n}}, \quad (33)$$

$$L_n^{\pm}(\varphi', \varphi, \theta) = \operatorname{ctg} \frac{\pi \pm (\varphi - \varphi')}{2n} F[-k\rho a^{\pm}(\varphi - \varphi')] + \frac{\sin \frac{\varphi'}{n} - \sin \frac{\theta}{n}}{\sin \frac{\varphi'}{n} + \sin \frac{\theta}{n}} \operatorname{ctg} \frac{\pi \pm (\varphi + \varphi')}{2n} F[-k\rho a^{\pm}(\varphi + \varphi')], \quad (34)$$

其中 $F(x)$ 为过渡函数^[7], 是一个特殊函数. $a^{\pm}(\varphi \pm \varphi')$ 的定义参见文献[7].

参 考 文 献

- [1] Maliuzhinets, *Soviet Phys. Doklad*, 1958, 3: 52—56.
- [2] Vaccaro, V. G., *AEU*, 1980, 34: 493—500.
- [3] Rojas, R. G., *IEEE Trans. on AP*, 1988, 36(7): 956—970.
- [4] Rojas, R. G., *IEEE Trans. on AP*, 1988, 36(1): 71—83.
- [5] Leontovich, M. B., *Investigations of Propagation of Radio Waves*, Part II., Academy Sciences, Moscow, 1948.
- [6] Senior, T. B., *IEEE Trans. on AP*, 1981, 29(5): 826—829.
- [7] Kouyoumjian, R. G., Pathak, P. H., *Pro. IEEE*, 1974, 62(11): 1448—1467.

1) 吴良超、汪茂光. 阻抗劈一致性绕射系数的一种简洁表达式, 电波科学学报.