

非微扰量子场论

麦 鹏 里

(美国纽约州立大学)

吴 大 峻

(美国哈佛大学)

摘 要

格点重正化是构造量子场论的有用方法,本文试图把从非微扰量子场论(包括 Ising, ϕ^4 , 和“纯”杨-Mills 场论等)得到的各种最新结果,综合成一种可能的观点,所讨论的课题有: Wess-Zumino 模型中超对称的重要性,场论的稳定性,和四维中费米子的必要性. 文中指出,当耦合常数到达一临界值时,在无质量 Thirring 模型中有质量的自发生成.

一、引 言

量子场论是有限个自由度的量子力学和无限个自由度的经典场论互相结合而导致的物理理论. 在量子力学发明后不久,即二十年代末期,就有了这个结合的初步尝试^[1]. 这个初步尝试是很有成效的^[2],但是立即就遇到微扰级数中积分发散的困难.

四十年代的重正化微扰论^[3]的发明,成功地克服了这个困难. 根据这个理论对电子磁矩和 Lamb 移动所作的壮观的计算,是现代理论物理的两个最大胜利.

但是,后来逐渐知道不是一切都好. 重正化的微扰级数不仅时常发散,而且甚至可能不是一个渐近的或可 Borel 求和的展开^[4,5]. 因此,我们现已不期望把重正化的微扰论,用来为我们所理解的量子场论提供一个有用的定义. 我们正逐渐地认识到,同一时空点处算符值分布的乘积之类的数学问题,并非单纯的技术性问题,而是我们要了解这个理论所研究的物理现象全貌所必须克服的问题.

本文将着重讨论非微扰量子场论研究的格点重正化途径,其要点是萃取通常重正化手续的精髓,同时使我们能够看到微扰级数所不能显示的许多可能性. 在第二节中,我们定义格点重正化程序. 在第三节中,用人们都已熟悉的非平庸的场论,即二维的 Ising 场论,来说明这个程序. 这里可以看到,同一个拉氏函数可以定义多个量子场论. 在第四节中,我们讨论了 ϕ^4 场论的重正化. 此外,对于在四维时空中,这个理论是平庸的,也就是说对没有碰撞^[6,7]的这一个最新的说法,也将予以讨论. 所谓没有碰撞,照我们的理解,不仅非唯 S 矩阵是 1,而且所有 Green 函数都是自由场的 Green 函数. 第五节讨论较复杂的超对称模型,以便考察具有汤川作用的费米子的存在,是怎样解除四维 ϕ^4 理论的平庸性的. 在第六节中,用以上的例子讨论了一些非微扰性现象,例如构造“非稳定区”中的场论和不存在有用的经典路径. 最后,在附录

中考虑了 Minkowski 时空中的格点重正化, 并用它讨论无质量的 Thirring 模型^[8]中的质量生成。

二、格点重正

为了表述非微扰的重正化方案, 我们把所研究的量子系统置于格点上, 这样可以避免可能发生的混淆^[9]。有了这样的出发点, 下述步骤可以用来定义量子场论:

1. 一个欧氏格点上的拉氏函数, 它的场算符乘积的期望值, 可以通过对可数无限个变数作平均而得到;

2. 通过一个适当极限过程把格子距离缩小, 使之趋向于零, 以形成一个旋转不变的场论;

3. 用 Wick 旋转来得出一个 Lorentz 不变的场论。

第三个步骤已由 Osterwalder 和 Schrader 严格地作出^[10,11]。

在第二个步骤中, 取格点距离 Δ 趋向于零时, 拉氏函数中各种参量, 例如裸耦合常数, 依赖于 Δ 并且其极限可能是无界的。但重要的是, 适当改换标度后, Green 函数趋向于有限的非零的极限值。我们称这一步骤为格点重正化。这和通常的微扰重正化不同。应该指出, 在格点重正化中, 没有预先假定所得到的量子场论有粒子解释。特别是量子场论的粒子内容, 一般从拉氏函数中不容易看出。

另一个重要点是: 同一拉氏函数可以给出不同的重正化场论。这要看格点重正化是怎样来决定的。这是量子场论中不同相的来源。

由于在微扰论中不出现这一类性质, 所以需要至少有一个显式可解的非平庸的模型。二维的 Ising 模型就是这样的一个例子^[12], 这一模型并可解释为是具有无限大裸耦合常数的二维 ϕ^4 理论。

三、二维 Ising 场论

二维 Ising 场论的作用量是

$$S = \frac{1}{2} K \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\{\delta\}} \sigma(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x} + \delta). \quad (3.1)$$

这里 $\mathbf{x}$ 取值在距离为 Δ 的方格点阵上, $\sum_{\{\delta\}}$ 是关于最近邻的格点作和, $\sigma(\mathbf{x})$ 只取数值 ± 1 。关联函数可以用

$$\langle \sigma(\mathbf{x}_1) \cdots \sigma(\mathbf{x}_n) \rangle = Z^{-1} \sum_{\{\sigma\}} \sigma(\mathbf{x}_1) \cdots \sigma(\mathbf{x}_n) e^S \quad (3.2)$$

计算。这里

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^S. \quad (3.3)$$

早就知道, 作为 K 的函数, 二阶相变^[13]发生在

$$K = K_c = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

当 $K > K_c$ 时, 有以下意义的长程序^[14]: 对固定的 Δ 及 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ (或对固定的 $\mathbf{x}$ 及 $\Delta \rightarrow 0$)

$$M_{<}^2(K) = \lim \langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{x}) \rangle = [1 - (\sinh 2K)^{-4}]^{1/4}. \quad (3.4)$$

更具体地, 当 $\mathbf{x}$ 固定及 $\Delta \rightarrow 0$ 时^[15], 如 $K > K_c$, 则有

$$\langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{x}) \rangle \sim M_{<}^2(K) [1 + C_{1<}(\theta, K) (\kappa_{>}(\theta, K) |\mathbf{x}| / \Delta)^{-2} e^{-|\mathbf{x}| \kappa_{<}(\theta, K) / \Delta}]; \quad (3.5)$$

如果 $K < K_c$, 则

$$\langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{x}) \rangle \sim M_{>}^2(K) C_{1>}(\theta, K) (\kappa_{>}(\theta, K) |\mathbf{x}| / \Delta)^{-1/2} e^{-|\mathbf{x}| \kappa_{>}(\theta, K) / \Delta}. \quad (3.6)$$

这里

$$M_{>}(K) = [(\sinh 2K)^{-4} - 1]^{1/8}, \quad (3.7)$$

而 θ 是 $\mathbf{x}$ 和晶格轴的夹角.

为了构造场论, 我们用 $Z_3(\Delta)$ 的一个幂次来乘关联函数 (3.2) 式, 然后令 $\Delta \rightarrow 0$:

$$\langle \sigma(\mathbf{x}_1) \cdots \sigma(\mathbf{x}_n) \rangle_{\text{ren}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} Z_3(\Delta)^{-n/2} \langle \sigma(\mathbf{x}_1) \cdots \sigma(\mathbf{x}_n) \rangle. \quad (3.8)$$

这里 $Z_3(\Delta)$ 取得使 (3.8) 式存在且不为零. 函数 $Z_3(\Delta)$ 称为波函数重正化常数.

从 (3.6) 式显然可见, 对于固定的 $K < K_c$, 不可能找到 $Z_3(\Delta)$, 使 (3.8) 式为有限且非零. 由 (3.5) 式, 对固定的 $K > K_c$, 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时 Green 函数成为和 $\mathbf{x}$ 无关. 因此对固定的 $K \approx K_c$, 二维的 Ising 模型并不导出量子场论.

为了得出量子场论, 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时必须同时令 $K \rightarrow K_c$. 这样就有两种可能性: $K \rightarrow K_c +$ 和 $K \rightarrow K_c -$. 它们导出不同的场论, 在这两种极限下,

$$M_{>,<}(K) \sim 2^{7/16} |K - K_c|^{1/8}, \quad (3.9)$$

$$\kappa_{>,<}(\theta, K) \sim C_{>,<} |K - K_c|, \quad (3.10)$$

并且 $C_{1>}(\theta, K)$ 和 $C_{1<}(\theta, K)$ 都趋向于和 θ 无关的常数. 这里 $C_{>,<}$ 也是两个和 θ 无关的常数. 因此, 我们选取 K 对 Δ 的依赖关系为:

$$C_{>,<} |K(\Delta) - K_c| \Delta^{-1} = m, \quad (3.11)$$

并且令

$$Z_3(\Delta) = 2^{7/16} |K(\Delta) - K_c|^{1/8}. \quad (3.12)$$

这里 m 是一个和 Δ 无关的常数. 这样, 重正后的两点函数存在且非平庸. 进一步, 新近已经证明^[12], 使两点函数重正的 $Z_3(\Delta)$ 同时也能重正 n 点函数 (3.8), 并且所得到的重正化 Green 函数是旋转不变的. 因此从二维 Ising 模型已能构造出两个 Lorentz 不变的量子场论.

因为这两种情形都以 $K = K_c$ 为极限, 所以它们有同一拉氏函数. 这样, 具有同一拉氏函数的不同的格点重正化, 会产生不同的场论. 有时这也说成是同一场论的不同的相.

这两个相的差别, 能够从两点函数清晰地看到. 作两点函数的 Fourier 变换, 对于相 $K_c > K$, Green 函数有一个极点, 作为和实 p 轴最接近的奇点. 这是理论中粒子存在的标志, 并在表达式 (3.6) 中产生前因子 $|\mathbf{x}|^{-1/2}$. 但是, 对于相 $K_c < K$, $G_c < (p)$ 的领头奇异性不是极点, 而是一个支点, 这是由 (3.5) 式中的前因子 $|\mathbf{x}|^{-2}$ 所反映出来的. 因此, 对于这个相, 平常的粒子解释无效, 这里存在有新的物理现象. 这些现象可以用一种新的对象 (不定质量粒子) 来解释, 这在别处已经唯象地讨论过^[16].

四、 ϕ^4 场 论

在 d 维中, 格点 ϕ^4 场论的作用量是^[7]

$$S = -\frac{1}{2} \Delta^d \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{\{\delta\}} \left[\frac{\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x} + \delta)}{\Delta} \right]^2 + m_0^2 \phi^2(\mathbf{x}) + 2g_0 \phi^4(\mathbf{x}) \right\}. \quad (4.1)$$

因此, 我们能把 Ising 场论推广到 ϕ^4 场论。这里 g_0 是裸耦合常数。 m_0 有时称为裸质量, 但是 m_0^2 可以而且往往是负的, 这个术语有时会引起误解。

未重正的 Green 函数, 仍然依据 (3.2) 式来计算, 只是按 $\sigma = \pm 1$ 作和必须改为从 $-\infty$ 到 ∞ 积分, 且 S 是由 (4.1) 式给出。

为了清楚地看出和 Ising 场论的关系, 我们对场变量 ϕ 作如下的标度改变

$$\phi(\mathbf{x}) = (2\Delta^{d-2}/K)^{-1/2} \sigma(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

于是作用量 (4.1) 式变为:

$$S = - \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{4} K \sum_{\{\delta\}} [\sigma(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x} + \delta)]^2 + \tilde{m}_0^2 \sigma^2(\mathbf{x}) + \tilde{g}_0 \sigma^4(\mathbf{x}) \right\}, \quad (4.3)$$

这里

$$\tilde{g}_0 = \frac{1}{4} g_0 K^2 \Delta^{4-d} \quad (4.4)$$

称为裸的无量纲耦合常数,

$$\tilde{m}_0^2 = \frac{1}{4} K \Delta^2 m_0^2, \quad (4.5)$$

而重正化的 Green 函数是

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle_{\text{ren}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [2\Delta^{d-2} Z_3(\Delta)/K]^{-n/2} \langle \sigma(\mathbf{x}_1) \cdots \sigma(\mathbf{x}_n) \rangle. \quad (4.6)$$

在作此标度变换时, 引进 K 使标度明白地表达出来。因此, 不失一般性, 我们可以在 $\tilde{m}_0^2$ 和 $\tilde{g}_0$ 之间添上如下式

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-\tilde{g}_0 y^4 - \tilde{m}_0^2 y^2} / \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\tilde{g}_0 y^4 - \tilde{m}_0^2 y^2} \quad (4.7)$$

这样的关系。用了这种标度, 对任何的 K 和 Δ , 令 $\tilde{g}_0 \rightarrow \infty$ 就得出 Ising 作用量 (3.1) 式。

对 g_0 的一般值, ϕ^4 理论并没有像二维 Ising 模型那样精确地解出。但是, 小 K (高温) 级数展开方法和 Padé 近似外推技术, 最近已被应用^[7]。这就使得对任何维数和任何 g_0 都可研究极限 $\Delta \rightarrow 0$ 。已经发现, 在这更一般的情况下, 仍然存在一个有限的 $K_c > 0$, 使得当 $K \rightarrow K_c$ 一时, 能构造出一个场论。这个相有几项突出的性质:

1. 在二维时, 极限 $g_0 \rightarrow \infty$ 和 $\Delta \rightarrow 0$ 可交换, 所以 ϕ^4 理论的强耦合极限和 Ising 场论相同;

2. 在三维时, 这两个极限不可交换, 所以虽然 ϕ^4 理论存在且非平庸, 但是 Ising 模型并不定义一个场论;

3. 在四维时, ϕ^4 场论没有碰撞, 在这个意义下它是平庸的。

以前已有人建议在四维时重正后的耦合常数为零^[6]。这是一个突出的例子, 它表明格点重正化远远超出重正微扰论。这和新近发现的“重正子”(renormalon) 现象^[5]相一致: 四维的重正微扰级数, 不仅是发散的, 而且还不能作 Borel 求和。

对 $K > K_c$, ϕ^4 的相可能存在, 但还没有什么已知的结果。可以设想有一个或几个 K 的值, 对于它们是可以构造场论的。甚至还可设想这种 K 可取一整个区间内的数值。但是, 我们

在这里只评论最简单的可能情形,即 ϕ^4 只有两个相,第二个相可由极限 $K \rightarrow K_c^+$ 造出.

第二个(低温)相,不能从对 g_0 的微扰论得到. 这只要考虑 $g_0 = 0$ 的情形(Gauss 模型)就能知道^[17]. 这时所有的积分都容易求出,且对任何维数 Green 函数都能在格子上作出. 而且存在一个有限而非零的 K_c , 极限 $K \rightarrow K_c^-$, $\Delta \rightarrow 0$ 也可以显式地写出来. 这样得到的重正化 Green 函数是自由场的 Green 函数. 但是,当 $K > K_c$ 时,所有积分发散,因此理论不存在. 换言之,在 Gauss 模型中,没有一个相和二维 Ising 模型中的 K_c^+ 相对应.

二维情形中 $g_0 = \infty$ 的 K_c^+ (破缺对称)相是存在的. 这促使我们相信,至少在 g_0 充分大时,或许对一切正的 g_0 , 这种相一般都存在. 在二维时,这新的相可以从 $g_0 = \infty$ 时已知的结果用微扰方法进行研究. 或许可以期望,在 Ising 场论中所发现的不定质量粒子现象,对有限的 g_0 也能照样出现.

五、超对称场论

四维 ϕ^4 理论的平庸性,对于既有费米子又有玻色子的场论,引起了一系列有趣的可能性. 先假定玻色子没有自相互作用,但玻色子和费米子之间有汤川耦合 $\phi\bar{\psi}\psi$. 这理论本身在四维时几乎没有意义. 首先,在微扰论中,通过单费米子圈的玻色子-玻色子碰撞是发散的. 其次,如果两个费米子的位势用单玻色子交换近似地计算,那这一位势到处是吸引的. 在三维或四维的情形,具有完全吸引位势的费米子系统,是要坍缩的. 为了使相互作用稳定,需要有一些斥力.

这类稳定化的一种,是通过下述的拉氏函数实现的^[18]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ & - \frac{1}{2}m^2A^2 - \frac{1}{2}m^2B^2 - \frac{1}{2}im\bar{\psi}\psi \\ & - g_BmA(A^2 + B^2) - \frac{1}{2}g_B^2(A^2 + B^2)^2 \\ & - ig_F\bar{\psi}(A - \gamma_5B)\psi.\end{aligned}\quad (5.1)$$

这里 A 和 B 是两个玻色子场, ψ 是一个 Majorana 费米子场. Wess-Zumino 超对称点 $g_B = g_F$ 相应于稳定性的边界,因为坍缩会在 $g_B < g_F$ 时发生^[19]. 根据四维中单分量 ϕ^4 模型的平庸性,我们猜测: 如果 $g_B > g_F$, 以 (5.1) 式为拉氏函数的理论将没有碰撞. 换言之,超对称点既是稳定性的边界,又是平庸性的边界. 因此,对于有意义的物理理论,这是唯一可能的点.

如果 (5.1) 式中只有一种,而不是两种玻色子,情况又将如何? 当 g_B/g_F 充分小时,系统又会坍缩. 如 g_B/g_F 充分大时,系统是平庸的. 以 R_c 和 R_t 记坍缩和平庸性的边界. 既然在这一情况下没有超对称点,那么,要弄清下述这样一个问题,将是很有意思的: 即在 R_c 和 R_t 之间是否有一个区域,在其中量子场论存在且非平庸,或者是否是 $R_c = R_t$? 此外,如果 $R_c = R_t$, 情况又将如何: 是坍缩,平庸,还是碰撞?

六、非微扰量子场论

虽然我们对非微扰量子场论所知道的还很少,但是,已知的事项已经启示出一定的观点.

在这一节中我们将仔细讨论它的某些方面。

(1) 场论的稳定性. 从上述汤川相互作用和超对称理论的例子可以见到, 存在有这样的拉氏函数, 对于耦合常数的某些数值范围, 是不能构造场论的. 这至少有两种方式: 第一, 它们可能完全没有碰撞. 第二, 如果相互作用吸引太强, 就可能有太多的束缚态, 以致格点距离是重要的, 因而不能在极限情况下达到旋转不变性. 这就是吸引坍塌的情况. 另一方面, 即使没有束缚态, 一个系统也可能是是不稳定的. 已知在 Thirring 模型中就有这种不稳定性发生.

但是, 即使 g_0 处在这种不稳定区域中, 如果给 g_0 以适当的标度使当 $\Delta \rightarrow 0$ 时使它处于稳定性的边界, 那末还是可能构造出场论. 在附录中用 Thirring 模型说明了这种构造办法.

(2) 耦合常数间的关系. 在四维的情形, 旋转不变性和非平庸性这两项要求对可能的耦合常数加了很严的约束. 这种约束以前在微扰不可重正的位势模型中已经看到了^[20], 但这里的情况是: 对于场论这种约束也能出现, 也许形式更强. 在四维时这种约束能否决定所有的耦合常数? 这是很有趣的问题.

(3) 费米子的必要性. 在上一节中已经讨论了 ϕ^4 理论中可能需要有费米子. 这一提法同样可用于规范理论(可换的或不可换的). 在原来杨和 Mills^[21] 的经典非可换规范理论中, 费米子和玻色子有密切的关系. 但是, 在量子杨-Mills 理论的微扰处理中, 似乎完全可能只考虑玻色子, 把它作为一种“纯”规范理论. 从第四节中讨论过的 ϕ^4 理论的平庸性, 我们注意到: 在四维的 ϕ^4 理论和“纯”杨-Mills 理论中, β 函数的 Borel 变换在正实轴上都有奇点^[22]. 这些奇点使这两项理论都不能 Borel 求和. 因此我们猜想, 四维的“纯”杨-Mills 理论也是平庸的, 这当然也是指没有碰撞. 如果对于构造四维非平庸的量子场论, 玻色子和费米子都是必要的话, 那就更值得注意了.

(4) 没有经典路径. 为了有一个有意义的量子场论, 必须有一个和格点距离相比为无限大的尺度. 要实现这一情况至少可有两种不同的方式, 它们相应于统计力学中 $T \rightarrow 0+$ 和 $T \rightarrow T_c \pm$ 两种情形, 这里 T_c 是二阶或高阶相变的临界温度. 例如, 令 $T = \text{常数}/K$, 一维的 ϕ^4 场论属于前者, 二维(1+1维)的 ϕ^4 场论属于后者. 这两种情况最突出的差别, 一般地表现如下. 前者 $T \rightarrow 0+$ 时存在一个或若干个经典路径, 和统计力学中的基态相对应. 后者, $T_c > 0$, 不存在有用的经典路径, 这是因为在临界温度附近有很大的涨落. 前一情况显示出半经典的特性, 而后一情形可以看成是真正的量子力学. 对 $T \rightarrow T_c \pm > 0$ 的量子场论, 并非所有经典的量必定有量子力学上的重要性.

另有一个值得注意的情况: 如第三节中二维 Ising 模型的例子所表现的那样, 破缺相中场算符 σ (只能取值 $+1$ 或 -1) 的真空期望值既非 $+1$ 也非 -1 . 这不符合于通常应用 Higgs 机制^[23] 的天真方法.

(5) 质量的自发生成. Higgs 机制的一个主要用途是在具有零裸质量的规范粒子理论中产生物理质量. 但是, 不用 Higgs 机制, 动力生成物理质量则更为自然. 我们在附录中说明, 在 1+1 维无质量的 Thirring 模型中出现质量的动力生成, 这是在耦合常数到达一个临界值的时候才发生的.

附 录

在正文中我们讨论了欧氏空间中的格点重正化. 另有一种可以直接应用于 Minkowski 空间的格点重正

化。这里时间保持连续,但空间坐标置于格点上。我们用 Thirring 模型说明这一重正化手续。特别是,我们将说明,从无质量的 Thirring 模型能够自发生成质量。

对 Minkowski 格点重正化,哈氏函数比拉氏函数有用。在 1 + 1 维时, Thirring 哈氏函数在格点上可写成为^[2,4]:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-N+1}^N \left\{ \frac{i}{2\Delta} V(G) (\psi_n^+ \psi_{n+1} - \psi_{n+1}^+ \psi_n) + (-1)^n \frac{1}{2} m_0 (\psi_n^+ \psi_{n+1}^+ + \psi_{n+1} \psi_n) - \frac{G}{2\Delta} \left(\psi_n^+ \psi_n - \frac{1}{2} \right) \left(\psi_{n+1}^+ \psi_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (\text{A.1})$$

这里用无质量 Thirring 模型的耦合常数 g 表达 (假定 $g \geq -\pi/2$), 有

$$G = -\frac{4g}{\pi} \cot g, \quad (\text{A.2})$$

$$V = \frac{2g}{\pi \sin g}, \quad (\text{A.3})$$

和

$$g = \frac{\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{\pi} \right)}{1 + \frac{g}{\pi}}. \quad (\text{A.4})$$

如果 $G > -4/\pi$ (它相当于 $g < -\pi/2$) 为固定, Coleman^[2,5] 已证明, $m_0 > 0$ 时不能构成场论。

如果进行 Jordan-Wigner 变换

$$\psi_n^+ = e^{i\frac{\pi}{4}(2N+1)} \sigma_n^+ \prod_{k=-N+1}^{n-1} (i\sigma_k^z), \quad (\text{A.5})$$

我们看到,除边界项外,还有

$$\mathcal{H} = H_{xyz} = -\frac{1}{2} \sum_{n=-N+1}^N (J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + J_z \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z), \quad (\text{A.6})$$

这里

$$J_x = \frac{V}{2\Delta} + \frac{m_0}{2}; \quad J_y = \frac{V}{2\Delta} - \frac{m_0}{2}; \quad J_z = \frac{G}{4\Delta}. \quad (\text{A.7})$$

并且 σ^i 是普通的 Pauli 阵。因为对 H_{xyz} 的谱已经知道很多^[2,6], 所以现在可以讨论格点重正化过程了。

就某种意义来说, H_{xyz} 的第一激发态和基态之间的能隙 ΔE 是系统中出现的最轻粒子或激发的质量。如果 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 这个能隙仍不为零, 那末就不会有 Lorentz 不变性。现在已经知道, 如果^[27, 28]

$$J_x = J_y \geq |J_z| \geq 0, \quad (\text{A.8})$$

H_{xyz} 的谱没有隙。在

$$J_x \approx J_y, \quad (\text{A.9})$$

或

$$0 < J_x = J_y < |J_z| \quad (\text{A.10})$$

的情况下, 是有隙的。

因此至少有两种方法构成量子场论, 这要看我们用 (A.9) 还是 (A.10) 式。首先考虑用 (A.9) 式, 这在 $g \geq -\pi/2$ 时可以做。我们能够证明这一情况: 如果 m_0 选为:

$$m_0(\Delta) = \frac{8g \sin g}{\pi \Delta} \left(\frac{\Delta M^2}{4} \right)^{2g/\pi}, \quad (\text{A.11})$$

这里 M 是任意常数, 那末可取极限 $\Delta \rightarrow 0$, 并可以得到质量谱。用 xyz 模型的已知结果可以发现, 存在质量为 M 的粒子和质量为:

$$M_n = 2M \sin \frac{n\pi}{2} \left(\frac{\pi}{\varepsilon} - 1 \right) \quad (\text{A.12})$$

的束缚态。这里

$$n < \left(\frac{\pi}{\varepsilon} - 1 \right)^{-1}. \quad (\text{A.13})$$

如果 $g < -\pi/2$, 我们就不能用这个方式重正这一理论; 这是因为它是一个不稳定区。但是, 如果 $m_0 = 0$ (举例来说), 我们可以用 (A.10) 来重正并进行标度变换, 使有极限

$$-J_z \rightarrow J_x = J_y. \quad (\text{A.14})$$

这样从无质量 Thirring 模型得出的场论就将包含质量。这样, 我们便有了自发地动力生成质量的显式例子。

还有一点需要说明一下。所有以上这些考虑都限于质量谱。如果没有进一步研究 Green 函数, 我们不能证明这场论是 Lorentz 不变的。但是, 如果我们承认在 $g \geq -\frac{\pi}{2}$ 时无质量 Thirring 模型的 Lorentz 不变性, 那末 $g \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 有质量的相也一定是 Lorentz 不变的。其理由是: 有质量相的重正化 Green 函数和 $g = -\frac{\pi}{2}$ 时, 无质量相的 Green 函数在短距离上是一致的。既然短距离行为是 Lorentz 不变的, 那末长距离行为(比格点距离的尺度更大)就必须是 Lorentz 不变的。此外, 由于短距离行为和自由场的行为不一样, 所以有质量相不是平庸的。

以前对无质量 Thirring 模型^[19]的研究, 并未看出有质量相。其原因是那些计算都是在 g 接近于零时进行的。有一些 Green 函数计算出来了; 这些 Green 函数被解析延拓到一切 $g > -\pi$ 。但是我们知道, Heisenberg-Ising 系统 $J_x = J_y \neq J_z$ 的基态能量在 $J_z = -J_x$ 有一个无限可微分的本性奇点^[27]。这使整个场论不能解析延拓到 $g = -\frac{\pi}{2}$ 以外。

致谢: 我们很高兴地感谢 P. van Nieuwenhuizen, A. White, 杨振宁和谷超豪等教授和我们所作的有益的讨论。我们特别感激 G. Baker 和 J. Kincaid 二教授, 我们和他们作了富有成效的讨论, 并使我们了解到他们尚未发表成果。这项研究部分地得到美国国家科学基金会(经费编号 DMR-770786 3A 01)和美国能源部(合同编号 EY-76-S-02-3227)的资助。

参 考 文 献

- [1] Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, A114(1927), 243; 126(1930), 360; 133(1931), 61.
Proc. Camb. Phil. Soc., 30(1934), 150.
Heisenberg, W. & Pauli, W., *Zeit. f. Phys.*, 56(1929), 1; 59(1930), 168.
Fermi, E., *Rev. Mod. Phys.*, 4(1932), 87.
- [2] Klein, O. & Nishina, Y., *Z. f. Phys.*, 52(1929), 853; Møller, C., *Ann. Phys.*, 14(1932), 531; Delbrück, M., *Z. f. Phys.*, 84(1933), 144; Bethe, H. & Heitler, W., *Proc. Roy. Soc.*, A146(1934), 83; Bhabha, H. J., *Proc. Roy. Soc.*, A152(1935), 559.
- [3] Tomonaga, S., *Prog. Theor. Phys.*, 1(1946), 27; *Phys. Rev.*, 74(1948), 224. Schwinger, J., *Phys. Rev.*, 73(1948), 416; 74(1948), 1439.
Feynman, R. P., *Rev. Mod. Phys.*, 20(1948), 367; *Phys. Rev.*, 74(1948), 939, 1430; Dyson, F., *Phys. Rev.*, 75(1949), 486.
- [4] Lautrup, B., *Phys. Lett.*, 69B(1977), 109; Olesen, P., *Phys. Lett.*, 73B(1977), 327.
- [5] Paresr, G., *Nuclear Physics*, B150(1979), 163.
- [6] 以统计力学为背景的资料见 Wilson, K. G., Fisher, M. E., *Phys. Rev. Lett.*, 28(1972), 240; Wilson, K. G., Kogut, J., *Phys. Reports*, 12c(1974), 75; Fisher, M. E., *Rev. Mod. Phys.*, 46(1974), 597.
- [7] Baker, G. A., Kincaid, J., 给出了极有说服力的数值论证(将发表)。
- [8] Thirring, W., *Ann. Phys.*, 3(1958), 91.

- [9] 引进格点等价于紫外截断, 并且自场论出现以来一直采用 Schwinger, J., *Phys. Rev. Lett.*, **3** (1959), 296 的点分裂技术是最早的这一类的非微扰计算; Wilson, K. G., *Phys. Rev.*, **D10** (1975), 2445. 广泛地运用格点方法. Glimm, J., Jaffe, A., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **21** (1974), 27; **22** (1975), 109. 广泛讨论了和临界点的联系.
- [10] Osterwalder, K. & Schrader, R., *Comm. Math. Phys.*, **31**(1973), 83; **42**(1975), 281.
- [11] Schwinger, J., *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **44**(1958), 956; *Phys. Rev.*, **115**(1959), 721; Symanzik, K., *J. Math. Phys.*, **7**(1966), 510; in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Varenna Course XLV (ed. R. Jost), New York, Academic Press, 1969; Nelson, E., *J. Funct. Anal.*, **12**(1973), 97.
- [12] McCoy, B. M., Tracy, C. A. & Wu, T. T., *Phys. Rev. Letts.*, **38**(1977), 793.
- [13] Kramers, H. A. & Wannier, G. H., *Phys. Rev.*, **60**(1941), 252 and 263; Onsager, L., *Phys. Rev.*, **65**(1944), 117.
- [14] Yang, C. N., *Phys. Rev.*, **85**(1952), 808.
- [15] Wu, T. T., *Phys. Rev.*, **149**(1966), 380; Cheng, H. & Wu, T. T., *Phys. Rev.*, **164**(1967), 719.
- [16] McCoy, B. M. & Wu, T. T., *Physics Letters*, **72B**(1977), 219.
- [17] Berlin, T. H. & Kac, M., *Phys. Rev.*, **86**(1952), 821.
- [18] Wess, J. & Zumino, B., *Physics Letters*, **49B**(1974), 52.
- [19] Curtright, T. L. & Ghandour, G. I., *Phys. Letts.*, **59B**(1975), 387.
- [20] Cheng, H. & Wu, T. T., *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 2978.
- [21] Yang, C. N. & Mills, R. L., *Phys. Rev.*, **96**(1954), 191.
- [22] Parisi, G. (preprint).
- [23] Higgs, P. W., *Phys. Lett.*, **12**(1964), 132; *Phys. Rev. Lett.*, **13**(1964), 508; Englert, F. & Brout, R., *Phys. Rev. Letts.*, **13**(1964), 32; Guralnik, G. S., Hagen, C. R. & Kibble, T. W., *Phys. Rev. Letts.*, **13**(1964), 585.
- [24] Luther, A., *Phys. Rev.*, **B14**(1976), 2153; see also Lüscher, M., *Nuclear Physics*, **B117**(1976), 475.
- [25] Coleman, S., *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 2088.
- [26] Baxter, R., *Phys. Rev. Lett.*, **26**(1971), 834; *Annals of Phys.*, **70**(1972), 323; Johnson, J. D., Krinsky, S. & McCoy, B. M., *Phys. Rev.*, **A8**(1973), 2526.
- [27] Yang, C. N. & Yang, C. P., *Phys. Rev.*, **150** (1966), 321, 327; **151**(1966), 258.
- [28] Des Cloizeaux J. & Gaudin, M., *J. Math. Phys.*, **7**(1966), 1384.
- [29] Glaser, V., *Nuovo Cimento*, **9**(1958), 990; Johnson, K., *Nuovo Cimento*, **20**(1961), 733; Sommerfield, C., *Ann. Phys.*, **26**(1963), 1; and Klaiber, B., in *Lectures in Theoretical Physics* (ed. Barut, A., Britten W. G. & Breach, N. Y.), 1968, vol. XA.