临界增长的 1-Laplace 方程的非负解

李周欣^{①*}, 刘书茂^②, 贾瑞玲^③

① 中南大学数学与统计学院, 长沙 400083;

② 中央财经大学应用数学学院, 北京 100081;

③ 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: lzx@math.pku.edu.cn, lioushumao@163.com, jiarl09@163.com

收稿日期: 2011-12-13; 接受日期: 2012-04-07; * 通信作者

中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2012QNZT041) 和中央财经大学 121 青年博士发展基金 (批准号: QBJZH201009) 资助项目

摘要 在 BV 空间中研究如下含临界指数的 1-Laplace 方程非负解的存在性:

$$-\operatorname{Div}(Du/|Du|) = g(x, u) + |u|^{1^*-2}u, \quad x \in \Omega,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界光滑开区域, $1^* = N/(N-1)$, $g(x, u)$ 为 Carathéodory 函数.

关键词 1-Laplace 方程 BV 空间 临界指数

MSC (2010) 主题分类 58E05, 35J65

1 引言

设 Ω 为 $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ 中的有界光滑开区域, 我们在 $BV(\Omega)$ 空间中考虑如下含 1-Laplace 方程非负解的存在性:

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(Du/|Du|) = g(x, u) + |u|^{1^*-2}u, & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $g(x, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Carathéodory 函数, $1^* = N/(N-1)$ 为空间嵌入 $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ 的临界指数, Div 表示积分意义下的散度, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.

从方程 (1.1) 容易看到, 1-Laplace 算子 $-\operatorname{Div}(Du/|Du|)$ 是具有奇性的, 从而方程 (1.1) 的解一般不属于 $W^{1,1}$ 空间, 而属于 BV 空间, 而且, 方程所对应的泛函在 BV 空间中是不光滑的. 函数 $u \in L^1(\Omega)$ 在 Ω 上的全变差定义为

$$|Du|(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi : \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1, \text{ a.e. } x \in \Omega \right\}.$$

如果 $|Du|(\Omega) < \infty$, 则称 u 为 Ω 上的有界变差函数. 记 $L^1(\Omega)$ 中所有有界变差函数组成的空间为 $BV(\Omega)$. 在赋予范数 $\|u\|_{BV} = |Du|(\Omega) + \|u\|_{L^1}$ 下, $BV(\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 对于 $u \in BV(\Omega)$, Du

是 Ω 上的有限 Radon 测度, 并且 $|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} d|Du|$. 当 $1 \leq p \leq 1^*$ 时, 嵌入 $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 是连续的, 当 $1 \leq p < 1^*$ 时, 嵌入 $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 是紧的.

记 $L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) = \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) : \text{Div} z \in L^N(\Omega)\}$. 根据文献 [1], 求解方程 (1.1), 可寻找 $u \in BV(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} \text{存在 } z \in L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ 使得 } \|z\|_{L^\infty} \leq 1, \text{Div} z \in L^N(\Omega), \\ -\int_{\Omega} u \text{Div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}, \\ -z \cdot \nu u^{\partial\Omega} = |u^{\partial\Omega}| \text{ a.e. 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ -\text{Div} z = g(x, u) + |u|^{1^*-2}u \text{ a.e. 在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 ν 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $u^{\partial\Omega}$ 表示 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹, $\mathcal{H}^{N-1}$ 表示 $N-1$ 维的 Hausdorff 测度. 在这种意义下, 我们称 $u \in BV(\Omega)$ 是方程 (1.1) 的解, 如果它使得 (1.2) 成立.

一般地, 记

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega), \|u\|_{L^1} = 1} \int_{\Omega} |Du| dx,$$

λ_1 称为 1-Laplace 算子在 Ω 上的第一特征值. 并且有

$$\lambda_1 = \inf_{u \in BV(\Omega), \|u\|_{L^1} = 1} \left\{ \int_{\Omega} d|Du| + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} \right\}. \quad (1.3)$$

此极小在 $BV(\Omega)$ 中是可达的. 关于特征值问题, 有兴趣的读者可阅读文献 [1-5] 等及其相关参考文献. 此方面有许多尚待研究的内容.

最近, 文献 [2] 的作者研究了 1-Laplace 算子的特征值问题, 证明了在 Dirichlet 条件下, 算子存在一系列特征值 $\{c_k\}_1^\infty$, 并且每一特征值对应着一对特征函数 $\{\pm u_k\}_1^\infty$ (见 [2, 定理2.3]). 进一步, 当 $\Omega = (0, 1)$ 时, 通过计算全变差泛函的强斜率 (见 [2, 定义1.1]), 文献作者证明了此时算子的所有可能的强特征值 (见 [2, 定义1.2]) 为 $\{\lambda_k = 2k : k = 1, 2, \dots\}$. 对于每一个 λ_k , 相应的强特征函数为 $\pm \varphi_k = \pm \text{Sgn} \sin k\pi x$. 记 $\varphi_k^{(p)}$ 为 p -Laplace 算子在 Dirichlet 条件下对应于第 k 个特征值 λ_k 的特征函数, 即 (λ_k, φ_k) 满足

$$-\Delta_p u = -(|u'|^{p-2} u')' = \lambda |u|^{p-2} u, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

则有 $\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_k^{(p)} = 2k$ 以及 $\lim_{p \rightarrow 1^+} \varphi_k^{(p)}(x) = \varphi_k(x)$ (见 [2, 定理4.1]).

关于 1-Laplace 方程解的存在性, 可参考文献 [6-11] 等. 在临界增长方面, 假设 a, f 为 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数, 记 $1^* = N/(N-1)$. Demengel 在文献 [9] 中讨论了如下方程在 $BV(\Omega)$ 空间中解的存在性:

$$\begin{cases} -\text{div} \sigma + a(x) \text{sign}(u) = f(x) |u|^{1^*-2} u, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \sigma \cdot \nabla u = |\nabla u|, & \text{以及 } -\sigma \cdot \nu u = |u| \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

进一步, 假设 a, f, h 为 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数, f 为 $\bar{\Omega}$ 上的正函数且 a 满足下面的条件:

$$\int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} a|u| \geq C \int_{\Omega} |u|, \quad \forall u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

假设 $q \in (1, 1^*)$ 并定义泛函 $I : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} a|u| - \frac{1}{1^*} \int_{\Omega} f|u|^{1^*} - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h|u|^q.$$

同时记

$$K(N, 1) = \sup_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{1^*})^{1/1^*}}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|}.$$

Wigniolle 在文献 [11] 中证明了, 如果存在 $v_0 \in \text{BV}(\Omega)$, $v_0 \geq 0$, $v_0 \neq 0$ 使得

$$\sup_{t \geq 0} I(tv_0) < \frac{1}{NK(N, 1)^N (\sup_{\Omega} f(x))^{(N-1)}},$$

则如下方程存在非平凡解 $u \in \text{BV}(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\text{div} \sigma + a(x) \text{sign}(u) = f(x) |u|^{1^*-2} u + h(x) |u|^{q-2} u, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \sigma \cdot \nabla u = |\nabla u|, & \text{以及 } -\sigma \cdot \nu u = |u|, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

另一方面, Degiovanni 和 Magrone 在文献 [8] 中证明了一个下半连续泛函的环绕定理, 并利用此定理来讨论临界增长的 1-Laplace 方程解的存在性, 他们证明了, 当 $\lambda \geq \lambda_1$ 时, 如下方程存在非平凡解 $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$-\text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \lambda \frac{u}{|u|} + |u|^{1^*-2} u, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.4)$$

方程的解 u 满足:

$$\begin{cases} \text{存在 } z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ 和 } \gamma \in L^\infty(\Omega) \text{ 使得 } \|z\|_\infty \leq 1, \text{div} z \in L^N(\Omega), \\ -\int_{\Omega} u \text{div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u|^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1}, \| \gamma \|_\infty \leq 1, \gamma u = |u| \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}, \\ -\text{div} z = \lambda \gamma + |u|^{1^*-2} u \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中.} \end{cases} \quad (1.5)$$

对于方程 (1.1), 令 $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt$, 我们假设 g 满足以下的条件:

(g₁) 存在 $C > 0$ 和 $q \in (1, 1^*)$ 使得 $|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^{q-1})$;

(g₂) 对由 (1.3) 给定的 λ_1 , $\limsup_{u \rightarrow 0} G(x, u)/|u| < \lambda_1$;

(g₃) 存在 $\mu > 0$ 使得 $G(x, u) \geq \mu|u|$.

本文主要定理如下:

定理 1.1 设 (g₁)–(g₃) 成立, 则方程 (1.1) 至少存在一个非负解 $u \in \text{BV}(\Omega)$ 且满足 (1.2).

由于方程 (1.1) 的解是属于 $\text{BV}(\Omega)$ 空间的, 这使得对解的存在性的研究存在很多的困难. 尽管 $\text{BV}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间, 其对偶空间至今尚不是很清楚. 这对利用变分方法研究方程解的存在性是极大的困难. 克服这个困难的一个方法是把方程相应泛函的定义域由 $\text{BV}(\Omega)$ 空间延拓到 $L^q(\Omega)$ 空间 (例如文献 [1, 2]). 由于延拓之后的泛函在 $L^q(\Omega)$ 空间上只是下半连续的, 不是对 $L^q(\Omega)$ 空间的所有方向都是 Gâteaux 可微的, 从而经典的临界点理论不再适用, 而必须利用不光滑泛函的临界点理论. 为了避开验证不光滑泛函中抽象的 Palais-Smale 条件 (简记为 (PS) 条件), 我们在第 2 节中给出了没有 (PS) 条件的 (不光滑) 山路定理, 并在第 3 节中定义了 Concrete-Palais-Smale 条件 (简记为 (CPS) 条件, 见定义 3.3) 来辅助定理的证明.

记 $\Omega = B_R(0)$ 为中心在原点、半径为 R 的球, 并记 χ_R 为 $B_R(0)$ 上的示性函数. 通过直接的计算可以得到此时 (1.3) 相应的 $\lambda_1 = N/R$. 关于方程 (1.4), 即方程 (1.1) 中 $g(x, t) = \lambda u/|u|$, 我们有更具体的结果:

定理 1.2 设 $\Omega = B_R(0)$. 则

- (1) 如果 $0 < \lambda < \lambda_1$, 则 $u_\lambda = c\chi_R$ 是方程 (1.4) 的非负解, 其中 $c = (\lambda_1 - \lambda)^{N-1}$;
- (2) 如果 $\lambda_1 < \lambda$, 则对任意的 $R_1 \in (0, R)$, $u_\lambda = c_1\chi_{R_1}$ 是方程 (1.4) 的非负解, 其中 $c_1 = (\frac{N-\lambda R_1}{R_1})^{N-1}$.

定理 1.2 的证明利用到文献 [12] 的方法. 该方法被用于求解 Rudin-Osher-Fatemi 泛函

$$I_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \lambda \int_{\Omega} |u - f| dx, \quad u \in \text{BV}(\Omega)$$

的极小解, 其中假设了 $B_R(0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 以及 $f = \chi_R$. 泛函 I_1 被广泛应用于图像处理, 例如图像恢复、图像去噪等, 其应用可参考文献 [13] 及其相关参考文献.

本文安排如下: 在第 2 节, 我们回顾文献 [14] (也可参考文献 [15–18] 等) 中相关的不光滑泛函的临界点理论; 在第 3 节, 在 (CPS) 条件的辅助下, 我们证明了定理 1.1, 证明涉及到构造方程相应的泛函关于山路水平 c 的一个 (PS) 序列; 最后, 在第 4 节, 我们证明了定理 1.2.

2 不光滑泛函的临界点定理

在本节, 我们回顾文献 [14, 16, 18] 中由 Degiovanni 和 Marzocchi 等人发展起来的关于不光滑泛函的一些数学理论.

设 X 为完备的距离空间, 距离为 d , $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, $u \in X$. 记 $B(u; \delta)$ 为中心在 u 半径为 δ 的开球. 设存在 $\sigma \in [0, +\infty)$, $\delta \in (0, +\infty)$ 以及连续映射 $\mathcal{H} : B(u; \delta) \times [0, \delta] \rightarrow X$ 使得

$$d(\mathcal{H}(v, t), v) \leq t, \quad g(\mathcal{H}(v, t)) \leq g(v) - \sigma t, \quad \forall (v, t) \in B(u; \delta) \times [0, \delta].$$

定义 $|dg|(u)$ 为 σ 的上确界, 称为 g 在点 u 的弱斜率.

设 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数, 记 $\mathcal{D}(f) = \{u \in X : f(u) < +\infty\}$ 以及 $\text{epi}(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R} : f(u) \leq \xi\}$. 集合 $\text{epi}(f)$ 在赋予距离 $d((u, \xi), (v, \mu)) = (d(u, v)^2 + (\xi - \mu)^2)^{1/2}$ 下是闭的. 我们定义函数 $\mathcal{G}_f : \text{epi}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $\mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi$. 则 $\mathcal{G}_f$ 是 1-Lipschitz 连续的. 从而 $|d\mathcal{G}_f|$ 有定义. 由此, 对于下半连续函数 f , 其弱斜率可定义为

$$|df|(u) = \begin{cases} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u, f(u))}{\sqrt{1 - |d\mathcal{G}_f|(u, f(u))^2}}, & \text{当 } |d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) < 1; \\ +\infty, & \text{当 } |d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 1. \end{cases}$$

进一步, 我们称 $u \in \mathcal{D}(f)$ 为 f 的 (下) 临界点, 如果有 $|df|(u) = 0$, 称 $c \in \mathbb{R}$ 为 f 的 (下) 临界值, 如果存在 f 的临界点 $u \in \mathcal{D}(f)$ 使得 $f(u) = c$. 在此基础上, (PS) 条件以及形变引理都可相应地延拓到下半连续函数的情形. 我们称 f 在水平 c 满足 (PS) 条件 (简记为 $(\text{PS})_c$ 条件), 如果每一满足

$$f(u_n) \rightarrow c, \quad |df|(u_n) \rightarrow 0$$

的序列 $(u_n) \in \mathcal{D}(f)$ 在 X 中都存在收敛的子列 $(u_{n(k)})$.

根据定义, 如果 $u \in \mathcal{D}(f)$ 是 f 的临界点, 则 $(u, f(u))$ 是 $\mathcal{G}_f$ 的临界点. 而 $\mathcal{G}_f$ 可能在集 $\{(u, \xi) \in \text{epi}(f) : f(u) < \xi\}$ 中存在比 f 更多的临界点. 但是, 如果有

$$\forall (u, \xi) \in \text{epi}(f) : f(u) < \xi \Rightarrow |d\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1, \quad (2.1)$$

则这种可能性就可以避免.

我们将利用下面的不光滑的临界点定理来证明我们的主要结果.

定理 2.1 设 X 为 Banach 空间, $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数, 满足 (2.1). 设存在 $v_0, v_1 \in X$ 和 $r > 0$ 使得 $\|v_0 - v_1\|_X > r$ 以及

$$\inf\{f(u) : u \in X, \|u - v_0\|_X = r\} > \max\{f(v_0), f(v_1)\}.$$

令 $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}(f), \gamma \text{ 连续}, \gamma(0) = v_0 \text{ 且 } \gamma(1) = v_1\}$, 并假设

$$c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0, 1]} f(\gamma(t)) < +\infty.$$

则存在序列 $(u_n) \subset \mathcal{D}(f)$ 使得 $f(u_n) \rightarrow c_0$ 以及 $|df|(u_n) \rightarrow 0$.

证明 类似文献 [14] 中的证明可得定理结论. □

对于本文所研究的问题, 为了验证条件 (2.1), 我们需要用到文献 [16, 18] 中的两个定理.

定理 2.2 ^[18] 设 X 为距离空间, 距离为 d , $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数. 设 $(u, \xi) \in \text{epi}(f)$ 满足 $f(u) < \xi$. 假设对每一 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$ 以及一个连续映射

$$\mathcal{H} : \{v \in B(u; \delta) : f(v) < \xi + \delta\} \times [0, \delta] \rightarrow X,$$

使得当 $v \in B(u; \delta)$ 满足 $f(v) < \xi + \delta$ 时, 以及 $t \in [0, \delta]$ 时,

$$d(\mathcal{H}(v, t), v) \leq \rho t, \quad f(\mathcal{H}(v, t)) \leq (1 - t)f(v) + t(f(u) + \rho).$$

则有 $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1$.

定理 2.3 ^[16] 设 X 为距离空间, 距离为 d , $f_0 : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数, $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部 Lipschitz 连续函数. 令 $f = f_0 + f_1$. 则对每一 $(u, \xi) \in \text{epi}(f)$, $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1$ 当且仅当 $|d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi - f_1(u)) = 1$.

在下文中, 定义凸下半连续泛函 $f_0 : L^{1^*}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ 为

$$f_0(u) = \begin{cases} |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}, & u \in \text{BV}(\Omega), \\ +\infty, & u \in L^{1^*}(\Omega) \setminus \text{BV}(\Omega), \end{cases}$$

以及局部 Lipschitz 连续泛函 $\phi : L^{1^*}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\phi(u) = - \int_{\Omega} G(x, u) - \frac{1}{1^*} \int_{\Omega} |u|^{1^*}.$$

从现在开始, 令 $f = f_0 + \phi$. 易知 $\mathcal{D}(f) = \text{BV}(\Omega)$.

命题 2.4 对每一满足 $f_0(u) < \xi$ 的 $(u, \xi) \in \text{epi}(f_0)$, 有 $|d\mathcal{G}_{f_0}|(u, \xi) = 1$. 从而, 对任意的 $(u, \xi) \in \text{epi}(f)$, 有 $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1$.

证明 设 $(u, \xi) \in \text{epi}(f_0)$ 满足 $f_0(u) < \xi$, 且设 $\rho > 0$. 则存在 $\delta \in (0, 1]$, $\delta = \delta(\rho)$ 以及 $k \geq 1$, $k = k(\rho)$ 使得对每一 $v \in B(u; \delta) \subset \text{BV}(\Omega)$, 有

$$\|T_k(v) - v\|_{\text{BV}} < \rho, \tag{2.2}$$

其中 $T_k(v) = \max(-k, \min(k, v))$. 从而通过取适当的 δ , 下式成立,

$$\begin{aligned} f_0(T_k(v)) &= f_0(T_k(u) + T_k(v) - T_k(u)) \\ &\leq f_0(T_k(u)) + f_0(T_k(v) - T_k(u)) \\ &< f_0(T_k(u)) + \rho \leq f_0(u) + \rho. \end{aligned}$$

所以有,

$$f_0((1-t)v + tT_k(v)) \leq (1-t)f_0(v) + t(f_0(u) + \rho). \quad (2.3)$$

定义 $\mathcal{H} : \{v \in B(u; \delta) : f_0(v) < \xi + \delta\} \times [0, \delta] \rightarrow \text{BV}(\Omega)$ 为

$$\mathcal{H}(v, t) = (1-t)v + tT_k(v).$$

根据 (2.2) 和 (2.3), 对满足 $f_0(v) < \xi + \delta$ 的 $v \in B(u; \delta)$, 以及 $t \in [0, \delta]$, 有

$$d(\mathcal{H}(v, t), v) \leq \rho t, \quad f_0(\mathcal{H}(v, t)) \leq (1-t)f_0(v) + t(f_0(u) + \rho).$$

从而由定理 2.2 和 2.3 可得到结论. □

3 定理 1.1 的证明

本节将证明泛函 f 满足 $(\text{PS})_c$ 条件. 在本节开始, 我们先给出 f 的次微分的定义以及一些相关的结论, 这些结论的证明可参考文献 [16].

设 X 为 Banach 空间, A 为 X 的开子集, $f_0 : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数, X' 为 X 的对偶空间. 对每一 $u \in \mathcal{D}(f_0)$, 我们记 $\partial^- f_0(u)$ 为 X' 中满足

$$\liminf_{v \rightarrow u} \frac{f_0(v) - f_0(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{\|v - u\|} \geq 0$$

的 α 所组成的集合 (可能为空集). $\partial^- f_0(u)$ 中的元素称为 f_0 在 u 的次微分 (见 [16, 定义2.9]). 关于次微分, 我们有以下一些结论:

(a) 如果 $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ 在 u 处 Fréchet 可微, 则 (见 [16, 命题2.10])

$$\partial^-(f_0 + g)(u) = \{\alpha + dg(u) : \alpha \in \partial^- f_0(u)\};$$

(b) 如果 f_1 是 C^1 的, 并令 $f = f_0 + f_1$, 则对每一 $u \in \text{dom}(f)$ (见 [16, 定理2.11]), $|df|(u) < +\infty$ 当且仅当 $\partial^- f(u) \neq \emptyset$, 并且此时有

$$|df|(u) = \min\{\|\alpha\| : \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

我们回到关于泛函 f 的讨论, 由 (a) 和 (b) 可得

引理 3.1 设 $u \in \mathcal{D}(f)$ 满足 $|df|(u) < +\infty$, 则 $\partial^- f(u) \neq \emptyset$, $\partial^- f(u)$ 是闭凸的, 并且

$$|df|(u) = \min\{\|w + d\phi(u)\|_{L^N} : w \in \partial^- f_0(u)\}.$$

定理 3.2 设 $u \in \mathcal{D}(f)$ 满足 $|df|(u) < +\infty$. 则存在 $z \in L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 满足 $\|z\|_{L^\infty} \leq 1$, $-\int_\Omega u \operatorname{Div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}$, $-z \cdot \nu u^{\partial\Omega} = |u^{\partial\Omega}|$ 以及存在 $y \in L^N(\Omega)$ 使得

$$\langle y, \varphi \rangle = - \int_\Omega \varphi \operatorname{Div} z - \int_\Omega g(x, u) \varphi - \int_\Omega |u|^{1^*-2} u \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(f). \quad (3.1)$$

进一步, 有 $\|y\|_{L^N} \leq |df|(u)$.

证明 假设 $u \in \mathcal{D}(f)$ 满足 $|df|(u) < +\infty$. 由引理 3.1, 存在 $u^* \in \partial^- f_0(u)$ 使得 $\|u^* + d\phi(u)\|_{L^N} \leq |df|(u)$. 根据 [1, 命题 4.23], 存在 $z \in L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 满足 $\|z\|_{L^\infty} \leq 1$, $-\operatorname{Div} z = u^* \in \partial^- f_0(u)$, $-\int_\Omega u \operatorname{Div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}$ 和 $-z \cdot \nu u^{\partial\Omega} = |u^{\partial\Omega}|$. 令 $y = -\operatorname{Div} z - g(x, u) - |u|^{1^*-2} u$, 则 $y \in L^N(\Omega)$ 且

$$\langle y, \varphi \rangle = \langle w + d\phi(u), \varphi \rangle \leq |df|(u) \|\varphi\|_{L^{1^*}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(f).$$

这意味着 $\|y\|_{L^N} \leq |df|(u)$ 而且 (3.1) 成立. $\square$

定理 3.2 使得我们能够类似文献 [15] 一样定义 (CPS) 条件, 这一条件和 (PS) 条件稍有一些不同.

定义 3.3 设 $(u_n) \subset \mathcal{D}(f)$ 以及 $c \in \mathbb{R}$. 我们称序列 (u_n) 为 f 在水平 c 的一个 (CPS) 序列 (简称为 $(\text{CPS})_c$ 序列), 如果有

$$f(u_n) \rightarrow c, \quad (3.2)$$

并且存在 $(y_n) \subset L^N(\Omega)$, $y_n \rightarrow 0$ 于 $L^N(\Omega)$ 中, 以及存在 $(z_n) \subset L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|z_n\|_{L^\infty} \leq 1$, $-\int_\Omega u_n \operatorname{Div} z_n = |Du_n|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_n^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}$, $-z_n \cdot \nu u_n^{\partial\Omega} = |u_n^{\partial\Omega}|$ 使得

$$\langle y_n, \varphi \rangle = - \int_\Omega \varphi \operatorname{Div} z_n - \int_\Omega g(x, u_n) \varphi - \int_\Omega |u_n|^{1^*-2} u_n \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(f). \quad (3.3)$$

我们称 f 满足 $(\text{CPS})_c$ 条件, 如果 f 的每一 $(\text{CPS})_c$ 序列存在收敛子列.

注 3.4 由定义 3.3 和定理 3.2 易知, f 的每一 $(\text{PS})_c$ 序列也是 f 的 $(\text{CPS})_c$ 序列.

记 $u^+ = \max\{u, 0\}$ 和 $u^- = \min\{u, 0\}$. 我们首先考虑如下方程的解:

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(Du/|Du|) = g(x, u^+) + |u|^{1^*-2} u^+, & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

引理 3.5 方程 (3.4) 的每一非平凡解都是方程 (1.1) 的非负解.

证明 假设 $u \in \text{BV}(\Omega)$ 是方程 (3.4) 的解, 则存在 $z \in L_N^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 满足 $\|z\|_{L^\infty} \leq 1$, $-\operatorname{Div} z = u^* \in \partial^- f_0(u)$, $-\int_\Omega u \operatorname{Div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}$, $-z \cdot \nu u^{\partial\Omega} = |u^{\partial\Omega}|$ 和

$$-\operatorname{Div} z = g(x, u^+) + |u|^{1^*-2} u^+.$$

我们证明 $u \geq 0$, 则 u 是方程 (1.1) 的解. 实际上, 由 [19, 定理 3.99], 有 $|Du|(\Omega) = |Du^+|(\Omega) + |Du^-|(\Omega)$, 从而 $f_0(u) = f_0(u^+) + f_0(u^-)$. 由于 $-\operatorname{Div} z \in \partial^- f_0(u)$, 则

$$0 \geq -f_0(u^-) = f_0(u^+) - f_0(u) \geq \langle -\operatorname{Div} z, u^+ - u \rangle = \langle \phi'(u^+), u^- \rangle = 0.$$

从而在 $\bar{\Omega}$ 上, 有 $u \geq 0$. $\square$

有了引理 3.5 的辅助, 在下面我们分别替换方程 (1.1) 中的 $g(x, u)$ 和 $|u|^{1^*-2} u$ 为 $g(x, u^+)$ 和 $|u|^{1^*-2} u^+$, 并仍记为 $g(x, u)$ 和 $|u|^{1^*-2} u$.

对 $R, \varepsilon > 0$, 以及 $R_\varepsilon = (1 + \varepsilon)R/\varepsilon$, 定义 $\vartheta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为, 在 $0 \leq s \leq R$ 上, $\vartheta_\varepsilon(s) = 0$; 在 $R \leq s \leq R_\varepsilon$ 上, $\vartheta_\varepsilon(s) = (1 + \varepsilon)(s - R)$; 在 $R_\varepsilon \leq s$ 上, $\vartheta_\varepsilon(s) = s$; 在 $s \leq 0$ 上, $\vartheta_\varepsilon(s) = -\vartheta_\varepsilon(-s)$. 从定义容易看出, 对每一 $u \in \text{BV}(\Omega)$, $\vartheta_\varepsilon(u)$ 和 u 有相同的符号, 并且 $|\vartheta_\varepsilon(u)| \leq |u|$, $|D\vartheta_\varepsilon(u)| \leq (1 + \varepsilon)|Du|$.

引理 3.6 设 (g_1) – (g_3) 成立, 则 f 的每一 $(\text{PS})_c$ 序列 $(u_n) \subset \mathcal{D}(f)$ 在 $\text{BV}(\Omega)$ 中有界.

证明 假设 (u_n) 是 f 的 $(\text{PS})_c$ 序列, 由注 3.4, 它满足 (3.2) 和 (3.3). 由 (g_1) , 对 $\sigma \in [1, 1^*)$, 存在 $R > 0$ 使得对 $|s| > R$, 有

$$g(x, s)s + |s|^{1^*} \geq \sigma \left(G(x, s) + \frac{1}{1^*} |u|^{1^*} \right).$$

记 $A_{R,n} = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > R\}$ 和 $B_{R,n} = \Omega \setminus A_{R,n}$, 并在 (3.3) 中取 $\varphi = \vartheta_\varepsilon(u_n)$. 由于 $\langle y_n, \vartheta_\varepsilon(u_n) \rangle = o(1)\|u_n\|_{\text{BV}}$, 利用 Green-Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} \langle y_n, \vartheta_\varepsilon(u_n) \rangle &= - \int_{\Omega} \vartheta_\varepsilon(u_n) \text{Div} z_n - \int_{\Omega} g(x, u_n) \vartheta_\varepsilon(u_n) - \int_{\Omega} |u_n|^{1^*-2} u_n \vartheta_\varepsilon(u_n) \\ &\leq (1 + \varepsilon) |Du_n|(A_{R,n}) + \int_{\partial\Omega} |\vartheta_\varepsilon(u_n)|^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\quad - \int_{A_{R,n}} g(x, u_n) \vartheta_\varepsilon(u_n) - \int_{A_{R,n}} |u_n|^{1^*-2} u_n \vartheta_\varepsilon(u_n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

我们计算 $\sigma f(u_n) - \langle y_n, \vartheta_\varepsilon(u_n) \rangle$. 利用 (g_2) , 可由 (3.5) 推导出

$$\begin{aligned} \sigma c + o(1) + o(1)\|u_n\|_{\text{BV}} &\geq (\sigma - 1) \left(|Du_n|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_n^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &\quad - \varepsilon \left(|Du_n|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_n^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} \right) - \sigma \int_{B_{R,n}} \left(G(x, u_n) + \frac{1}{1^*} |u_n|^{1^*} \right) \\ &\quad - \int_{A_{R,n}} (g(x, u_n) + |u_n|^{1^*-2} u_n) (u_n - \vartheta_\varepsilon(u_n)). \end{aligned}$$

对于固定的 R 和 ε , 存在常数 $C(R)$ 和 $C(R, \varepsilon)$ 使得

$$\begin{aligned} \int_{B_{R,n}} \left(G(x, u_n) + \frac{1}{1^*} |u_n|^{1^*} \right) &\leq C(R), \\ \int_{A_{R,n}} (g(x, u_n) + |u_n|^{1^*-2} u_n) (u_n - \vartheta_\varepsilon(u_n)) &\leq C(R, \varepsilon), \end{aligned}$$

我们可选择 $\varepsilon = (\sigma - 1)/2$, 从而可得 (u_n) 是有界的. □

令 S 表示空间嵌入 $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{1^*}(\Omega)$ 的最佳常数, 即

$$S = \inf \{ \|u\|_{W_0^{1,1}} / \|u\|_{L^{1^*}} : u \in W_0^{1,1}(\Omega) \} > 0.$$

S 在 $W^{1,1}(\Omega)$ 中是不可达的, 而在 $\text{BV}(\Omega)$ 中达到. 我们将证明, 对于水平 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$, f 的每一 $(\text{PS})_c$ 序列 (u_n) 在 $\text{BV}(\Omega)$ 空间中弱收敛到函数 $u \neq 0$, 并且 u 是方程 (1.1) 的一个解.

引理 3.7 设 (g_1) – (g_3) 成立, 并设 $(u_n) \subset \mathcal{D}(f)$ 为 f 在水平 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$ 的一个 $(\text{PS})_c$ 序列, $u_n \rightharpoonup u$ 于 $\text{BV}(\Omega)$ 中, 则 $u \neq 0$.

证明 我们利用反证法证明. 假设 $u = 0$. 由引理 3.6 可知, 对 $1 \leq r < 1^*$, 有 $u_n \rightarrow u$ 于 $L^r(\Omega)$ 中. 从而 $\int_{\Omega} g(x, u_n) u_n \rightarrow 0$. 在 (3.3) 中取 $\varphi = u_n$, 可得

$$\begin{aligned} o(1)\|u_n\|_{\text{BV}} &= -\int_{\Omega} u_n \operatorname{Div} z_n - \int_{\Omega} g(x, u_n) u_n - \int_{\Omega} |u_n|^{1^*} \\ &= |Du_n|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u_n^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} g(x, u_n) u_n - \int_{\Omega} |u_n|^{1^*}. \end{aligned}$$

由嵌入定理以及 [19, 命题3.7], 有

$$o(1)\|u_n\|_{\text{BV}} = f_0(u_n) - \|u_n\|_{L^{1^*}}^{1^*} \geq f_0(u_n)(1 - S^{-1^*} f_0(u_n)^{1^*-1}).$$

如果 $f_0(u_n) \rightarrow 0$, 则 $f(u_n) \rightarrow 0$, 与 $c > 0$ 矛盾. 从而 $f_0(u_n)^{1^*-1} \geq S^{1^*}$, 即 $f_0(u_n) \geq S^N$. 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f(u_n) \geq \frac{1}{N} f_0(u_n) - \int_{\Omega} G(x, u_n) \geq \frac{1}{N} S^N + o(1).$$

这又与 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$ 相矛盾. 所以 $u \neq 0$. $\square$

引理 3.8 设 $(g_1)-(g_3)$ 成立, 且设 $(u_n) \subset \mathcal{D}(f)$ 为 f 在水平 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$ 的一个 $(\text{PS})_c$ 序列, 并且 $u_n \rightharpoonup u$ 于 $\text{BV}(\Omega)$ 中, 则 u 是方程 (1.1) 的一个解.

证明 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(f)$, 有 (3.3) 成立. 由于 $(z_n) \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, 从而存在 $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 且 $\|z\|_{L^\infty} \leq 1$ 使得 $z_n \rightarrow z$ 于 $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 中. 在 (3.3) 中令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$0 = -\int_{\Omega} \varphi \operatorname{Div} z - \int_{\Omega} g(x, u) \varphi - \int_{\Omega} |u|^{1^*-2} u \varphi.$$

我们证明 $-\int_{\Omega} u \operatorname{Div} z = |Du|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}$ 且 $-z \cdot \nu u^{\partial\Omega} = |u^{\partial\Omega}|$ a.e. 在 Ω 中, 则 u 是方程 (1.1) 的解. 实际上,

$$-\int_{\partial\Omega} z \cdot \nu u^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} z_n \cdot \nu u_n^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} |u_n^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} |u^{\partial\Omega}| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

再根据泛函的下半连续性和引理 3.6, 有

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Du_n|(\Omega) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\Omega} u_n \operatorname{Div} z_n + \int_{\partial\Omega} z_n \cdot \nu u_n^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \right\} \\ &= -\int_{\Omega} u \operatorname{Div} z + \int_{\partial\Omega} z \cdot \nu u^{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{N-1} \leq |Du|(\Omega). \end{aligned}$$

从而可知 u 是方程 (1.1) 的一个解. $\square$

定理 1.1 的证明 为了证明定理的结论, 我们需要构造 f 在水平 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$ 的一个 $(\text{PS})_c$ 序列.

首先, 我们证明 f 具有定理 2.1 中的山路几何结构, 并且 $c > 0$. 实际上, 由 (g_2) 可知 $f(0) = 0$ 并且存在 $\alpha, r > 0$ 使得对所有的 $u \in L^{1^*}(\Omega)$, 且 $\|u\|_{L^{1^*}} = r$, 有 $f(u) \geq \alpha$. 设 $\varphi_1 \in \text{BV}(\Omega)$ 为算子 $-\Delta_1$ 的第一特征函数, 即 φ_1 满足 (1.3). 更具体地, φ_1 可以选为 Cacciopoli 集 (见 [3, 命题2]) 的示性函数, 即 $\varphi_1 \geq 0$. 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $f(t\varphi_1) \rightarrow -\infty$, 从而 $c > 0$.

其次, 我们证明 $c < \frac{1}{N} S^N$. 设 $x_0 \in \Omega$ 以及 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$. 令 v_ε 为 $B(x_0, \varepsilon)$ 的示性函数且令

$$u_\varepsilon = \left(\frac{N}{\varepsilon} \right)^{N-1} v_\varepsilon.$$

则 $u_\varepsilon \in \text{BV}(\Omega)$ 且 $|Du_\varepsilon|(\Omega) = \|u_\varepsilon\|_{L^{1^*}}^{1^*} = S^N$. 假设 $t_\varepsilon > 0$ 使得

$$f(t_\varepsilon u_\varepsilon) = \sup_{t \geq 0} f(tu_\varepsilon).$$

由于当 $t \rightarrow 0$ 时, $f(tu_\varepsilon) \rightarrow 0$, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(tu_\varepsilon) \rightarrow -\infty$, 可知 t_ε 是上下有界的. 由于 t_ε 是 $f(tu_\varepsilon)$ 的一个临界点, 我们有

$$|Du_\varepsilon|(\Omega) - \int_{\Omega} g(x, t_\varepsilon u_\varepsilon) u_\varepsilon - t_\varepsilon^{1^*-1} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{1^*} = 0.$$

注意到 g 在无穷远处是次临界增长的, 我们有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} g(x, t_\varepsilon u_\varepsilon) u_\varepsilon \rightarrow 0$. 从而对于充分小的 ε , 有 $(1 - t_\varepsilon^{1^*-1})S^N + o(1) \geq 0$, 即 $t_\varepsilon \leq 1 + o(1)$. 由此可得 $|D(t_\varepsilon u_\varepsilon)|(\Omega) - \frac{1}{1^*} \|t_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^{1^*}}^{1^*} \leq \frac{1}{N} S^N$. 另一方面, 由 (g3), 有 $\int_{\Omega} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon) \geq \mu t_\varepsilon \int_{\Omega} |u_\varepsilon| \geq C_1 \varepsilon$, 其中 $C_1 > 0$ 为常数. 从而

$$f(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} S^N - C_1 \varepsilon < \frac{1}{N} S^N.$$

这就意味着 $c < \frac{1}{N} S^N$.

最后由定理 2.1, 我们可构造 f 在水平 $c \in (0, \frac{1}{N} S^N)$ 的一个 $(\text{PS})_c$ 序列, 结合引理 3.7 和引理 3.8, 序列收敛的弱极限是非负非平凡的, 并且是方程 (1.1) 的一个解. $\square$

4 定理 1.2 的证明

设 $u(x)$ 是轴对称函数, 并令 $r = |x|$. 对方程 (1.4) 进行轴对称化. 通过直接的计算可得

$$\text{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \left(\frac{u'_r}{|u'_r|} \right)' + \frac{N-1}{r} \left(\frac{u'_r}{|u'_r|} \right), \quad N \geq 2.$$

记 $v_1 = u'_r/|u'_r|$ 和 $s = u/|u|$, 则方程 (1.4) 可化为常微分方程:

$$-r^{1-N} (r^{N-1} v_1)' = \lambda s + |u|^{1^*-2} u. \quad (4.1)$$

定理 1.2 的证明 设 $0 < \lambda < \lambda_1$, $u_\lambda = c\chi_R$. 为了验证 u_λ 是方程 (1.4) 的解, 我们必须寻找 $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 和 $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ 使得 (1.5) 成立. 取 $s = \chi_{[0,R]}$, 即 $\gamma(x) = \chi_R$, 并把它代入到方程 (4.1), 可得

$$v_1 = -\frac{\lambda + c^{1^*-1}}{N} r, \quad r \in (0, R).$$

令 $z = v_1(r) \frac{\partial}{\partial r}$, 并记 w_N 为 N 维单位球的体积, 则

$$-\int_{\Omega} u_\lambda \text{div} z = \lambda \int_{\Omega} \gamma u_\lambda + \int_{\Omega} |u_\lambda|^{1^*} = \lambda \omega_N R^N c + \omega_N R^N c^{1^*} = N \omega_n R^{N-1} c.$$

这就证明了 z 和 γ 满足方程 (1.5), 其中 $c = (\lambda_1 - \lambda)^{N-1}$, 即 u_λ 是方程 (1.4) 的解. 这就证明了结论 (1).

设 $\lambda_1 < \lambda$, $u_\lambda = c_1 \chi_{R_1}$, $\forall R_1 \in (0, R)$. 类似地, 取 $s = \chi_{[0,R_1]}$, 即 $\gamma = \chi_{R_1}$, 并把它代入方程 (4.1), 可得

$$v_1 = \begin{cases} -\frac{r}{R_1}, & r \in (0, R_1); \\ -1, & r \in [R_1, R]. \end{cases}$$

令 $z = v_1(r) \frac{\partial}{\partial r}$, 则 z 和 γ 满足方程 (1.5), 其中 $c_1 = (\frac{N}{R_1} - \lambda)^{N-1}$, 即 u_λ 是方程 (1.4) 的解. 这就证明了结论 (2). $\square$

参考文献

- 1 Kawohl B, Schuricht F. Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eigenvalue problem. *Comm Contemp Math*, 2007, 9: 515–544
- 2 Chang K C. The spectrum of the 1-Laplace operator. *Commun Contemp Math*, 2009, 11: 865–894
- 3 Demengel F. Some existence results for partial differential equations involving the 1-Laplacian: Eigenvalues for $-\Delta_1$. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2002, 334: 1071–1076
- 4 Krařem M. On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian. *arXiv:0703497v1 [math.AP]*, 2007
- 5 Schuricht F. An alternative derivation of the eigenvalue equation for the 1-Laplace operator. *Arch Math*, 2006, 87: 572–577
- 6 Agueh M, Carlier G. A class of total variation minimization problems on the whole space. *Nonlinear Anal*, 2009, 70: 2356–2365
- 7 Bellettini G, Caselles V, Novaga M. Explicit solutions of the eigenvalue problem $-\operatorname{div}(Du/|Du|) = u$ in $\mathbb{R}^2$. *SIAM J Math Anal*, 2005, 36: 1095–1129
- 8 Degiovanni M, Magrone P. Linking solutions for quasilinear equations at critical growth involving the “1-Laplace” operator. *Calc Var*, 2009, 36: 591–609
- 9 Demengel F. On some nonlinear partial differential equations involving the “1”-Laplacian and critical Sobolev exponent. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 1999, 4: 667–686
- 10 Mercaldo A, Segura de León S, Trombetti C. On the solutions to 1-Laplacian equation with L^1 data. *J Funct Anal*, 2009, 256: 2387–2416
- 11 Wigniolle J. On some nonlinear equations involving the 1-Laplacian with critical Sobolev growth and perturbation terms. *Asymptotic Anal*, 2003, 35: 207–234
- 12 Jiang M Y. Minimizers of the Rudin-Osher-Fatemi functionals in bounded domains. Preprint, 2011
- 13 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys D*, 1992, 60: 259–268
- 14 Corvellec J N, Degiovanni M, Marzocchi M. Deformation properties for continuous functionals and critical point theory. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 1993, 1: 151–171
- 15 Canino A, Degiovanni M. Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations. In: Granas A, Frigon M, Sabidussi G, eds. *Topological Methods in Differential Equations and Inclusions*, Montreal, 1994, NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995, 1–50
- 16 Degiovanni M, Marzocchi M. A critical point theory for nonsmooth functional. *Ann Mat Pura Appl*, 1994, 167: 73–100
- 17 Marzocchi M. Multiple solutions of quasilinear equations involving an area-type term. *J Math Anal Appl*, 1995, 196: 1093–1104
- 18 Pellacci B, Squassina M. Unbounded critical points for a class of lower semicontinuous functionals. *J Differential Equations*, 2004, 201: 25–62
- 19 Ambrosio L, Fusco N, Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuous Problems*. Oxford: Clarendon Press, 2000

Nonnegative solutions to 1-Laplacian equations at critical growth

LI ZhouXin, LIU ShuMao & JIA RuiLing

Abstract We study the existence of nonnegative solutions in BV space to the following 1-Laplacian equation involving critical exponent

$$-\operatorname{Div}(Du/|Du|) = g(x, u) + |u|^{1^*-2}u$$

in an open bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, where $1^* = N/(N-1)$, and $g(x, u)$ is a Carathéodory function.

Keywords 1-Laplacian equation, BV space, critical exponent

MSC(2010) 58E05, 35J65

doi: 10.1360/012011-988