



关于分数次导数的几点注记

献给李大潜教授 80 华诞

吴宗敏

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: zmwu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2016-08-30; 接受日期: 2016-11-24; 网络出版日期: 2017-01-24

国家自然科学基金 (批准号: 91330201 和 11461161006) 资助项目

摘要 本文对经典的分数次导数从定义开始进行了分析, 进而提出了一种基于 Minkowski 时空观的修正定义, 使得这个新定义的分数次导数保持了局部性、平移不变性、可以作为 Taylor 展开的系数和具备 Leibniz 法则等经典导数的性质, 以及可以通过局部分析的方法用于分数次微分方程建模. 进一步地, 进行了事件进程函数分析, 即通过现时的函数信息, 回溯由分数次截断多项式表示的事件进程函数的历史发展过程, 同时应用于预测将来的事件发展趋向, 得到了一些有趣的结果. 最后给出了新定义的分数次导数的数值计算公式及微分方程建模的例子.

关键词 分数次导数 事件进程函数分析 推广的 Taylor 展开 Minkowski 时空

MSC (2010) 主题分类 26A33

1 引言

根据 Minkowski 时空观, 时间轴上的度量是 ict . 这样 Minkowski 时空在各个方向上就有了一致的度量, 并且在时间上还体现了因果关系. Einstein 把四维时空上的事件记成 (x, y, z, ict) 的函数. 因此, 事件函数应该是一个复变函数, 而我们可以观察的只是这个复变函数的实数部分.

定义 1 称 $y = f(t)$ 是一个事件进程函数, 如果它是 Minkowski 时空中的事件在实空间的限制, 即有 $F: C \rightarrow C$, 使得当自变量取实数 t 时, 事件进程函数是 F 的实部 $y = f(t) = \operatorname{Re}(F(t))$. 而 $F(t)$ 可以是 Einstein 事件函数关于 (x, y, z) 的积分.

举例来说, $y = F(t) = \sqrt{t}$, 那么当 $t < 0$ 时, $y = f(t) = 0$; 而当 $t > 0$ 时, $y = f(t) = \sqrt{t}$. 生物种群规模随着时间变化的函数 $y = f(t)$ 在 Minkowski 时空的观点下是事件进程函数的一个简单例子.

考虑事件进程函数 $y = f(t)$, 我们来求其 $\alpha \in (0, 1)$ 次的分数次导数^[1-3]. 如果 $\alpha \in (k, k+1)$, 可以先求 k 次整数次导数, 再求 $\alpha - k$ 次分数次导数.

首先给出经典的 Riemann-Liouville 分数次导数定义如下:

$$D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)(t-s)^{-\alpha} \frac{ds}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

英文引用格式: Wu Z M. Fractional derivatives from the perspective of the Minkowski's space-time (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1335-1344, doi: 10.1360/N012016-00153

这个定义是先对函数作 $1 - \alpha$ 次积分, 然后再求一次导数. 这里, 分数次积分是由整数次积分满足

$$I_a^n f(t) = \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \cdots dt_1 = \int_a^t f(s)(t-s)^{n-1} \frac{ds}{\Gamma(n)}$$

所推广而成的:

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} \frac{ds}{\Gamma(\alpha)}.$$

因此, $\alpha \in (0, 1)$ 次的分数次导数就定义为

$$D^\alpha := \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}.$$

对一般的 α 值, 相应的分数次导数则定义为

$$D^\alpha := \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} I^{[\alpha]+1-\alpha},$$

其中 $[\alpha]$ 为 α 的整数部分.

对于这样定义的分数次导数, 有些现象是在求整数次导数时所没有的, 甚至是与通常对经典导数的认识相违背的:

- (1) 此定义与积分初始点 a 有关, 从而计算的结果就有不确定性, 而且 a 的物理意义不明确.
- (2) 此定义不是平移不变的. 一般地, $D^\alpha f(t+c) \neq D^\alpha f(t)|_{t=t+c}$.
- (3) 不具有通常的局部性质. 此定义与整个区间 (a, t) 上的函数值有关, 这与通常的导数或者微分应该是函数的一个局部性质不符.
- (4) 对任何满足 $a < c < b < t$ 的 c , 函数 $f(t) = (t-c)_+^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$ 的 $1+\alpha$ 次导数具有性质: 当 $t > b$ 时, $D^{1+\alpha} f(t) = 0$. 这是说算子 $D^{1+\alpha}$ 在 $t > b$ 时的零空间是无限维的, 而整数次导数的零空间总是有限维的.
- (5) 导数定义的一个基本应用是 Taylor 展式,

$$f(t+\Delta t) = \sum \frac{f^{(k)}(t)(\Delta t)^k}{k!} + \text{余项},$$

而 Riemann-Liouville 分数次导数不具备这个性质, 事实上, 这是上面提到的非局部性质的一个表现.

(6) Riemann-Liouville 分数次导数的数值计算需要数值化一个奇异积分, 非常不稳定, 给实际应用带来极大的困难.

本文将对上面 6 项进行逐项的分析与讨论.

2 事件进程函数的一些简单性质

经典介绍分数次导数 (或者涉及相对论和四维时空) 的文献中指出, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(t)$ 是截然不同的, 因为 t 是时间变量, 有因果顺序关系, 而对空间变量 x 则没有因果关系. 因此, 对于事件进程函数, 其分数次导数应该区分左导数 (前因导致现在的果) 与右导数 (现在的事件对后世的影响). 在绝大多数情形, 分数次左导数不等于分数次右导数. 本文主要讨论右导数.

对于分数次函数 $y = \sqrt{t}$, 当 $t < 0$ 时, 函数值是虚数, 而对生活在实空间的人类, 只能看到事件的实值表现, 只能对事件进程函数在实空间采样、分析和讨论. 因此, 可以认为在 $t = 0$ 点发生了一个新的事件. 如果 $y = \sqrt{t}$ 是关于生物种群的规模描述, 那么, 在 $t = 0$ 点可能是一个新的生物种群产生了.

如果 Minkowski 时空的事件函数 F 在讨论点 t_0 由分数次多项式构成, $F(t) = \sum c_j(t-t_0)^{\alpha_j}$, 那么, 事件进程函数 f 中的整数次项 (α_j 整数的情形) 是过去历史事件的影响在讨论点的解析延拓, 而分数次项 (α_j 非整数的情形) 则是新发生的事件 (或消亡的事件). 整数次项在实空间是有来源及去处的, 而非整数次项就只有去处 (或来源), 而没有来源 (或去处). 整数次项有相等的左右导数, 是通过惯性 (在实空间满足守恒率) 追溯其来源的. 而对于分数次项, 有些信息或者能量应该来源于复空间中的虚部. 在实空间我们看到的是发生了新事件或出现了新事物, 该项的分数次左右导数通常是不相等的.

对于积分的起始点或者说时间起点 a , 那是不能任意选择的. 这也是为什么在经典的分数次导数定义中, 对函数在 a 点有诸多限制的原因.

在经典的 Riesz 分数次导数的定义中, 建议

$$I^\alpha f(t) = \int_{-\infty}^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} \frac{ds}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

我们的早期文献 [4], 在讨论径向基函数的 Fourier 变换时, 导出了一种分数次积分及导数的定义, 那里也是将 $-\infty$ 视为时间的起点, 并且证明了分数次导数算子构成了一个半群. 如果函数在 $t \in (-\infty, a]$ 时为零, 即在这段时间没有发生任何事件, 那么, Riesz 分数次导数的定义与 Riemann-Liouville 的结果相同. 但是将积分开始点设在 $-\infty$ 还可以解释为什么定义中有 $1/\Gamma(\alpha)$ 项. 令 $s := t - s$, 则

$$I^\alpha f(t) = \int_0^\infty f(t-s)(s)^{\alpha-1} \frac{ds}{\Gamma(\alpha)} = e^t \int_0^\infty [e^{-(t-s)} f(t-s)] \cdot \left[\frac{e^{-s} s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] ds.$$

这样, 注意到 $\int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} ds / \Gamma(\alpha) = 1$ 是 Poisson 分布密度函数的积分. 所谓的 α 阶积分, 就是对函数 $f(t)e^{-t}$ 作 α 阶的 Poisson 平均, 然后再将 e^t 乘回. 对于 $\alpha \in (0, 1)$, 分数次导数意味着是函数值的加权平均, 而对近期发生的事件给与更大的权.

本文讨论事件进程函数 $f(t)$, 正如上面所述, 在时刻 t_0 附近, 函数表现为两种形式. 一种是现时发生了某事件 (本文主要讨论利用右导数描述的新事件的产生, 而左导数则可以描写事件的消亡), 由截断分数次多项式 $(t-t_0)_+^\alpha$ 表示. 一种是过去事件影响的延伸, 由整数次多项式 $(t-t_0)^n$ 表示. 我们讨论这样的事件进程函数, 它在过去的某些时刻发生了一系列对现在有影响的事件, 即

$$f(t) = \sum_{j=0}^N \frac{c_j(t-t_j)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)},$$

也就是说在时刻 t_j 发生了对后世影响为 $c_j(t-t_j)^{\alpha_j}/\Gamma(1+\alpha_j)$ 的事件, 而 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t$. 这个函数看上去有点像 Taylor 展式.

利用逼近论的样条理论, 任何函数都可以由这样形式的函数 (截断多项式) 逼近.

3 推广的 Taylor 展式, 认识历史与回溯历史

一个基本事实是, 如果 $f(t) = c(t-t_0)_+^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$, 其中 $\alpha > 0$, 那么利用 Riemann-Liouville 的定义, 当 $t \geq t_0$ 时, $D^\alpha f(t) = c(t-t_0)_+^0 \equiv D^\alpha f(t) |_{t \rightarrow t_0+} (t-t_0)_+^0 \equiv c$, 或者说, 当 $t \geq t_0$ 时, $D^\alpha f(t_{0+}) = c$ (注意这时 $D^\alpha f(t)$ 是一个跳跃函数, 其右导数恒为零). 所以,

$$f(t) = \frac{D^\alpha f(t_{0+})(t-t_0)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = I^{1+\alpha} D^{1+\alpha} f(t),$$

因为 $f(t) = c(t-t_0)_+^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$ 在 t_0 发生了以 c 为系数、级别为 α 的事件, 所以在 t_0 点函数的 α 阶导数为 c , 或者说这完整描述了在 t_0 处发生了 $D^\alpha f(t_{0+}) = c$ 的事件.

如果割裂历史, 假设在 t_0 前没有发生任何事件 $f(t) \equiv 0$, 那么上面的讨论也适用于整数次右导数. 但是, 如同上面已经指出的, α 是整数与 α 是分数的性质有着截然不同的性质. 在 t_0 时刻, α 是整数表示事件进程是一个多项式 (或解析函数) 的解析延拓, 是过去的事件对现在及往后的延续影响; 而当 α 是分数时, 则表示在 t_0 处发生了新事件.

首先考虑所有的事件都发生在 t_0 处, 且 $\alpha_j < \alpha_{j+1}$, $j = 0, \dots, \gamma$:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{c_j(t-t_0)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)}.$$

与 Taylor 展式比较, 我们希望形式上 $c_j = D^{\alpha_j} f(t_{0+})$, 从而可以得到一个推广的分数次 Taylor 展式.

定义 k 阶的分数次 Taylor 展式为

$$T_k f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j(t-t_0)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)},$$

那么

$$D^{\alpha_k}(f(t) - T_k f(t)) = c_k + \mathcal{O}(t-t_0)^{\alpha_{k+1}-\alpha_k}.$$

对函数 $c(t-t_0)_+^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$, 求其 $1+\alpha$ 的分数次 (右) 导数, 就有 $D^{1+\alpha}c(t-t_0)_+^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$ 恒为零, 这是一个消灭算子. 因此, 当我们已经知道了 α_j ($j \leq k-1$) 的值时, 令算子

$$k_k = I^{1+\alpha_{k-1}} D^{1+\alpha_{k-1}},$$

并定义消灭算子

$$K_k = \prod_{j=1}^k k_j = \prod_{j=1}^k I^{1+\alpha_{j-1}} D^{1+\alpha_{j-1}},$$

就有

$$K_k f(t) = f(t) - T_k f(t).$$

它消灭了函数的分数次 Taylor 展式的前 k 项, 而第 $k+1$ 项 (指标为 k) 可以通过下面的计算得到:

$$\alpha_k = \lim_{t \rightarrow t_0+} \frac{(t-t_0)(K_k f)'}{K_k f}, \quad c_k = \lim_{t \rightarrow t_0+} D^{\alpha_k} K_k f.$$

这样, 我们就可以通过求函数的一些经典导数来复原函数, 或者说写出函数的分数次 Taylor 展式

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{c_j(t-t_0)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)}.$$

这是一个含分数次项的 Taylor 展式, 而系数 c_j 是对函数 $f(t) - T_j f(t)$ 作 α_j 的 Riemann-Liouville 分数次导数在 t_j 点的值. 下一节将采用这个分数次 Taylor 展开项的系数 c_j 作为新的在 t_j 点的 α_j 次导数定义.

3.1 认识历史

如果 $t_j < t_{j+1}$, $\alpha_{jk} < \alpha_{j(k+1)}$, 对于多个事件发生点的情形, 我们有推广的 Taylor 展式

$$f(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{\gamma_j} c_{jk} (t - t_j)_+^{\alpha_{jk}}.$$

这个形式模拟了生物学中生物种类进化的间断平衡假说, 其中 t_j 是进化过程中基因发生突变的一个时间点. 对应的有个事件表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$, 它完整描述了在哪个时间点发生了什么样的事件.

关键的科学问题应该是, 如何根据函数的采样信息 (特别是近期的采样信息) 求得这个事件表, 从而获得相应的推广 Taylor 展式, 进而描述事件进程函数 $f(t)$ 的整个历史发展过程. 令

$$T_{lm} f(t) = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{\gamma_j} c_{jk} (t - t_j)_+^{\alpha_{jk}} + \sum_{k=0}^{m-1} c_{lk} (t - t_l)_+^{\alpha_{lk}}.$$

首先我们来认识历史, 也就是说, 如果函数有这样的表达形式, 我们如何来确定时间表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$. 利用上面的方法, 从 t_0 开始, 对 $f(t) - T_{jk} f(t)$ 发现剩余函数的开始点 t_j , 就可以逐个剥离事件, 并且计算得到事件表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$, 进而复原函数. 当 $t < t_j$ 时, $f(t) - T_{jk} f(t) = 0$, 所以可以容易地找到 t_j .

上述的函数复原过程需要计算或逐个发现事件表中的值, 特别需要找出事件的发生点 t_j , 并且在事件发生点附近进行计算. 形象地, 要跑到事件发生点去实地考察, 才能逐个描述时间表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$ 中的值. 而且, 要从远古开始按事件发生的时间顺序逐个地剥离事件.

上面的分析告诉我们, 经典的分数次导数在趋于事件的发生点时才具有更加重要的科学意义, 才真正刻画了函数的本质 (事件发生点、事件的大小和规模).

正如我们反复强调的, 一个事件过程由两部分组成, 一个是以前发生事件的惯性影响, 一个是现时发生了一个怎么样的新的事件. 例如, 对 $f(t) = c(t - t_0)_+^{1/2} / \Gamma(3/2)$, 当 $t \geq t_0$ 时, $D^{1/2} f(t) = c$, 这是一个跳跃函数, 其连续部分表示惯性影响, 而跳跃点 t_0 表示该时刻发生了新事件. 对于事件的描述或记忆来说, 重要的是发现并记录在哪些时间点发生了怎么样的新事件, 而惯性影响是可以通过解析函数的延拓计算得到的. 更为本质的是, 事件表才是函数的特征, 或者说是相关历史进程的最为简洁的表示.

3.2 回溯历史

这就引导了一个有趣并且更加重要的问题: 是否可以通过只观察一段近期历史 $f(t)$ ($t \in (t_N, b)$) 来复原重现整个历史呢? 这当然涉及因果关系, 有什么样的因, 就会造成什么样的果. 但反过来, 对同一的果, 却有可能是由不一样的因所造成的.

观察 $f(t) = c(t - t_0)_+^0 - c(t - t_1)_+^0$, 那么在 $t > t_1 > t_0$ 时, 不管 c 等于什么, 我们看到的都只是常数 0, 而无法知道过去是否曾经发生过什么事件及发生事件的大小、规模、时间和地点. 另一个例子是 $f(t) = c(t - t_0)_+^0$, 观察现时函数的行为, 无法判定事件发生的时间点 t_0 . 要确切描述该事件, 还是一定要跑到事件发生的时间点 t_0 去实地考察. 也就是说, 由果描述因通常是一个多解的反问题.

通过只观察近期历史, 哪些历史事件是可以恢复重现的呢?

下面从单一事件的发生开始分析. 对 $f(t) = c(t - t_0)_+^\alpha$, 它有三个自由度 (即 $\{t_0, \alpha, c\}$), 所以至少需要现时的三个信息, 才有可能复原事件. 显然,

$$\frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

所以,

$$\alpha = \left[1 - \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} \right]^{-1}.$$

而 $\frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{t-t_0}{\alpha}$, 所以 $t_0 = t - \alpha \frac{f(t)}{f'(t)}$. 再由 $f(t) = c(t-t_0)_+^\alpha$, 就得到 $c = \frac{f(t)}{(t-t_0)^\alpha}$.

当然在这里要求 α 为非整数, 且在观察点 t 有 $f'(t) \neq 0$. 因为 $F(t)$ 是分数次多项式, 所以 $f(t)$ 及其各阶导数的零点是孤立的, 从而可以在 $b < t$ 区域容易找到满足上述条件的时间点 t . 这里事件的发生点 t_0 是可以计算得到的, 进一步地, 还可以计算得到事件的大小和级别 $\{c, \alpha\}$. 这样, 我们通过事件现时的状态获得了事件的发生时间点及事件的大小和级别.

稍微复杂一点, 如果 $f(t) = \sum_{j=0}^N c_j(t-t_0)_+^{\alpha_j}$ (α_j 都不是整数), 即事件发生在同一个时间点 t_0 . 函数在 $t > t_0$ 处是解析的, 所以其在 t 点解析展式的收敛半径应该是 $R = t - t_0$. 这样, 由函数在点 t 的各阶导数计算解析半径就可以得到事件的发生点 t_0 .

如果

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\gamma} c_j(t-t_0)_+^{\alpha_j} = \sum_{j=0}^{\gamma} c_j R_+^{\alpha_j},$$

那么, 令

$$f_0(R) = f(t_0 + R), \quad f_j(R) = R \cdot \frac{d}{dR}(f_{j-1}(R))$$

(这些数据均可以在现时的观察点 t 测量得到), 就有

$$f_j(R) = \sum_{k=0}^{\gamma} c_k \alpha_k^j R^{\alpha_k}.$$

记向量 $F_j = (f_j, \dots, f_{j+\gamma})^T$, 矩阵 $(f_{j+k+l}) = (F_l, F_{l+1}, \dots, F_{l+\gamma})$, 则

$$F_{j+\gamma+1} = (\alpha_k^j) \cdot \text{Diag}(\alpha_k^\gamma) \cdot (\alpha_k^j)^{-1} F_j, \quad j, k = 0, \dots, \gamma,$$

而矩阵

$$(f_{j+k+\gamma+1}) = (\alpha_k^j) \cdot \text{Diag}(\alpha_k^\gamma) (\alpha_k^j)^{-1} (f_{j+k}).$$

所以, $\text{Diag}(\alpha_k)$ 的 γ 次方是矩阵 $(f_{j+k+\gamma+1})(f_{j+k})^{-1}$ 的特征值矩阵. 求得矩阵 $(f_{j+k+\gamma+1})(f_{j+k})^{-1}$ 的特征值, 就可以通过计算得到 $\{\alpha_k\}$, 而系数 c_k 是 $(\alpha_k^j R^{\alpha_k})(c_k) = F_0$ 的解. 这样, 我们有定理 1.

定理 1 如果历史只在一个时间点 t_0 发生了一些各种级别的事件, 且矩阵 (f_{j+k}) 可逆, 那么可以利用现时的信息及上述的算法, 回溯整个历史. 因为矩阵 (f_{j+k}) 的行列式零点是孤立的, 我们可以在现时观察点附近找到这样的时间点 t . $\square$

进一步地, 如果 $f(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{\gamma_j} c_{jk}(t-t_j)_+^{\alpha_{jk}}$, α_{jk} 均不为整数 (如果有整数, 如上讨论就可能有多解, 而总可以认为整数次项是由更前的历史事件的解析延拓而来的), 那么在 $t > t_N$ 时, $f(t) = \sum_{k=0}^{\gamma_N} c_{Nk}(t-t_N)_+^{\alpha_{Nk}} + A(t)$, 其中 $A(t)$ 是解析函数. 同理在 t 时刻点的解析收敛半径应该是 $t - t_N$. 如果事件是有限个, 那么利用上一定理的思想, 把整数与非整数项合并考虑, 问题就转化为求解 $\gamma \rightarrow \infty$ 时的特征值问题, 它在理论上是可解的. 实际应用时可以取较大的 γ , 求出矩阵 $\{(f_{j+k+\gamma+1})(f_{j+k})^{-1}\}^{-1} = (f_{j+k})(f_{j+k+\gamma+1})^{-1}$ 的特征值 (对应于那些分数次项及解析部分 Taylor 展式的前几项, 而且是数值较大的特征值 $1/\alpha_k$), 从中选取开 γ 次方后倒数为分数的项. 由于整数次项的级数是收敛的. 其余项的特征值表现为 $\sim \sum_{j=\gamma}^{\infty} 1/j^\gamma$, 所以这样的算法是收敛的, 这样从 N 开始倒退地逐个剥离事件的发生

点及在该点发生事件的大小和级别, 就可以获得推广的 Taylor 展式, 进而可以获得整个事件的历史发展过程, 即事件表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$.

定理 2 如果 $f(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{\gamma_j} c_{jk}(t-t_j)_+^{\alpha_{jk}}$, 其中 N 和 γ_j 有限 (事件为有限个), 那么可以从现时的信息 (或者说行为) $\{f^{(j)}(t)\}_{j=0}^\infty$ 来回溯历史得到事件表 $\{t_j, \alpha_{jk}, c_{jk}\}$.

推论 1 如果将时间 t 改为 $-t$, 右导数转化成为左导数, 就可以由现时的状态来预测那些会在什么时候并以怎样的形式消亡的部分.

注 1 我们无法预测现时之后什么时候会发生什么样的新事件. 通俗地讲, 我们可以预测某生物的正常消亡时间. 但不能预测该生物会在什么时候有个后代, 或在什么时候会有个基因突变, 生成一个新的物种, 也不能预测它的非正常死亡时间. 上述的数学分析有趣地验证了这个常识.

4 新的分数次导数定义

综合上面的讨论, 分数次导数在事件发生点 t_j 有更为明显的物理意义, 且与推广的 Taylor 展式紧密地联系在一起. 但是经典的 Riemann-Liouville 分数次导数定义没有注意到这一点, 没有将它们区别对待. 因此, 我们可以用下面的方式来给出函数 f 在 t_0 点新的 α_k 次导数 $D_{\text{New}}^{\alpha_k}$ 的定义.

定义 2

$$D_{\text{New}}^{\alpha_k} f(t_{0+}) := \lim_{t \rightarrow t_{0+}} D^{\alpha_k} (f(t) - T_k f(t)) = \lim_{t \rightarrow t_{0+}} D^{\alpha_k} K_k f(t).$$

注 2 这里消灭算子 K_k 的引进非常重要. 整数次的高阶导数会自然消灭低次多项式, 而分数次导数没有这样的性质. 在求 α_k 次导数时, $T_k f$ 的信息会混淆在后续事件的发展过程中, 这是经典的 Riemann-Liouville 定义所没有注意到的. 消灭算子 K_k 可以剥离出分数次 Taylor 展式及推广的分数次 Taylor 展式中的相应系数.

这个分数次导数的定义体现了经典的导数与 Taylor 展式的关系. 也就是说, 取 $\alpha_k = k$ 为整数, 那么其结果与经典整数次导数及 Taylor 展式一致. 对于经典的 Taylor 展开, 或者说多项式展开, 总是可以解析延拓的. 而现在是在每个事件的发生点上添加了一些新的事件, 而这些事件的进程函数在时间上只能向后延拓, 而不能向前延拓, 从而有定理 3.

定理 3 如果

$$f(t) = \sum \frac{c_j(t-t_j)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)},$$

那么就有 $D_{\text{New}}^{\alpha_j} f(t_{j+}) := c_j$, 或者说相应的事件进程函数可以表示为推广的 Taylor 展式

$$f(t) = \sum \frac{D_{\text{New}}^{\alpha_j} f(t_{j+})(t-t_j)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1+\alpha_j)}.$$

简单地, $D_{\text{New}}^{\alpha} f(t_{j+}) = c_j$ 的充分必要条件是, 函数 $f(t)$ 的推广的 Taylor 展式中有 $c_j(t-t_j)_+^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$ 的项, 即 $D_{\text{New}}^{\alpha} (t-t_j)_+^{\beta}/\Gamma(\beta+1)|_{t=t_{j+}} = \delta_{\alpha\beta}$ (这个公式对 $\{\alpha, \beta\}$ 取整数时也是对的). $\square$

注 3 我们把事件进程函数的每个时间点分成两类, 一类是解析的非奇点, 是过去历史事件影响的解析延拓; 一类是新发生事件的时间点, 表现为新的分数次的添加项. 而新定义的分数次导数就是用来描述那些解析奇点或者说新的事件. 当新定义的分数次右导数不为零时, 表示在这里发生了新事件; 而左导数不为零时, 表示事件在这里消亡了. 这样, 在解析点, 函数的分数次导数就应该为零.

这样定义的分数次导数有如下性质:

(1) 局部性. $D_{\text{New}}^{\alpha_j}$ 只与函数在 t_j 点是否发生了级别为 $\{c_j, \alpha_j\}$ 的事件有关.

- (2) 与经典分数次导数定义中的积分初始点无关, 或者说与时间坐标原点的选取无关.
 (3) 平移不变性, 即函数平移的分数次导数等于先求分数次导数后再进行平移.
 (4) 具备 Leibniz 求导法则. 如果 $\gamma = \alpha_j + \beta_k$, 那么,

$$D_{\text{New}}^\gamma u(t)v(t) = \sum \frac{\Gamma(1+\alpha_j)\Gamma(1+\beta_k)}{\Gamma(1+\gamma)} D_{\text{New}}^{\alpha_j} u(t) \cdot D_{\text{New}}^{\beta_k} v(t).$$

- (5) 在数值模拟时, 可以建立类似差商的局部的计算公式.
 (6) 如同对物理现象的经典微分方程建模, 可以由时间上的微分导出分数次的微分方程.
 (7) 解分数次微分方程就是要求得事件的发生点以及发生事件的规模或级别.

上述 (1)–(4) 条性质是明显的, 我们讨论第 (5) 条. 经典的分数次导数的计算涉及一个奇异积分, 其数值计算很不稳定, 给实际应用带来困惑. 对于新定义的分数次导数, 由于它的局部性, 可以有下面的数值计算公式. 首先要利用上面的消灭算子, 在 $\bar{t}$ 附近, 求得函数

$$\bar{f}(t) = K_\alpha f = \frac{c(t-\bar{t})_+^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + o((t-\bar{t})_+^\alpha),$$

根据上面的定义, 有

$$\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{\bar{s} \rightarrow 0} \frac{s \cdot (\bar{f}(\bar{t} + s + \bar{s}) - \bar{f}(\bar{t} + s))}{\bar{s} \cdot \bar{f}(\bar{t} + s)}.$$

用 s^2 模拟 $\bar{s}$ 得到

$$\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\bar{f}(\bar{t} + s + s^2) - \bar{f}(\bar{t} + s))}{s \cdot \bar{f}(\bar{t} + s)}.$$

从而获得了事件发生的级别及系数

$$c = D_{\text{New}}^\alpha \bar{f} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1+\alpha) \bar{f}(\bar{t} + s)}{(s)^\alpha}.$$

我们可以取 $s = \Delta t$ 来模拟数值的分数次向前差商, 从而数值模拟 $D_{\text{New}}^\alpha f(\bar{t})$.

新的分数次导数的向前差商公式 (对整数次导数也是对的) 令 $\bar{f} = K_\alpha f_{\bar{t}}$, 那么在 $\bar{t}$ 点,

$$D_{\text{New}}^\alpha f(\bar{t}) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha) \bar{f}(\bar{t} + \Delta t)}{(\Delta t)^\alpha},$$

其中

$$\alpha \sim \frac{(\bar{f}(\bar{t} + \Delta t + \Delta t^2) - \bar{f}(\bar{t} + \Delta t))}{\Delta t(\bar{f}(\bar{t} + \Delta t) - \bar{f}(\bar{t}))}.$$

由于新定义的分数次导数是对事件发生点的描述, 所以分数次微分方程也应该只是在这些点成立. 也就是说, 给定一些时间发生点 $\{t_j\}$, 在这些点上满足分数次微分方程. 分数次微分方程是对事件发生点处的新发生事件性质的描述, 所以为了讨论事件进程函数的非解析点的性质, 我们给定一些事件发生点 $\{t_j\}$, 那么在哪些点成立分数次微分方程为 $\delta_{t_j} P(D_{\text{New}}^\alpha) f(t) = 0$, 其中 δ_{t_j} 是 Dirac 取值算子.

下面是一些典型问题的简单例子:

例 1 (齐次线性方程) 分数次线性齐次微分方程, 事实上是在事件发生点对发生事件的限制或者说要满足的条件. 举例来说, 在 $t = t_j$ ($j = 0, \dots, N$) 满足 $D_{\text{New}}^\alpha f = D_{\text{New}}^\beta f$, 那么方程的解一定有形式

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \left[\frac{(t-t_j)_+^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{(t-t_j)_+^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \right].$$

一般地, 在 $t = t_j$ ($j = 0, \dots, N$) 满足 $\sum_{j=0}^J d_j D_{\text{New}}^{\alpha_j} f = 0$, 那么解有表达式

$$f(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^J \bar{d}_{jk} \frac{(t - t_k)_+^{\alpha_j}}{\Gamma(1 + \alpha_j)},$$

其中 $\sum d_j \bar{d}_{jk} = 0$, 或者说 $\bar{d}$ 在 d 的对偶空间. 方程的解空间取决于事件发生点的个数, 是 $J(N+1)$ 维的.

例 2 (特征方程) 在 $t = t_j$ ($j = 0, \dots, N$) 满足 $D_{\text{New}}^{\alpha} f = \lambda f$. 这是过去事件的影响导致发生新事件的描述 (新事件的特征), 或者说新事件的发生与由过去的事件造成的. 如果新事件发生在 $\{t_j\}$, 那么对于一个开始在 $t \leq t_0$ 由解析函数描述的事件 $f_0(t)$, 在 $t < t_0$ 时, $f(t) = f_0(t)$; 而在 $t_0 < t < t_1$ 时, $f(t) = f_1(t) = f_0(t) + \lambda f_0(t_0)(t - t_0)_+^{\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)$. 一般地, 在 $t_j < t < t_{j+1}$ 时, $f(t) = f_{j+1}(t) = f_j(t) + \lambda f_j(t_j)(t - t_j)_+^{\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)$, 也就是说有表达式

$$f(t) = f_0(t) + \sum \frac{c_j(t - t_j)_+^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)},$$

其中 $c_j = \lambda[f_0(t_j) + \sum_{k=0}^{j-1} c_k(t_j - t_k)_+^{\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)]$, 而 $c_0 = \lambda f_0(t_0)$. 这可能对生物种群规模描述的一个很好的数学模型, 其中 λ 应该是负数. 而事件的发生点 t_j 可以这样来决定: 当种群规模达到某一数量 $f(t_j) = V$ 时, 种群就会受到灾难性的打击, 出现一个使得种群规模急剧下降的新事件.

注 4 在众多的关于分数次微分方程的讨论文献中, 人们将目标函数在某种基下进行展开, 而选择的基大多数为无限次连续函数 (核方法), 或整数次连续函数 (样条、有限元), 所以讨论的对象往往是只在 a 点有分数次连续行为的函数, 得到的解往往缺乏物理意义. 简单地, Riemann-Liouville 的分数次导数主要的关注点是, 在积分初始点 a 有分数次连续行为的函数; 而我们上述的定义则可以处理随时有可能发生分数次连续行为的函数.

如同解析函数中奇点是孤立的一样, 以上讨论的事件发生点均为孤立点, 这也满足生物遗传的间断平衡假说. 上面对事件进程函数讨论的手段, 也是采用找解析函数的孤立奇点来作为事件发生点的办法. 如果对于任何时间点 s , 事件 $(t - s)_+^{\alpha}$ 均可以发生, 则函数 $f(t)$ 可以是

$$f(t) = \lim_{\Delta_j \rightarrow 0} \sum \frac{g(s_j)(t - s_j)_+^{\alpha} \Delta s_j}{\Gamma(1 + \alpha)} = \int g(s)(t - s)_+^{\alpha} ds$$

这样一个 Riemann 和的极限, 其中 $g(s)$ 可以是连续函数, 而通常是一个广义函数. 可以这么说, 对于任何的 $f(t)$, 总可以找到 $g(s)$, 使得上式成立. 也就是上面所说的, 由 $(t - s)_+^{\alpha}$ 张成的函数空间是无限维的, 并且在连续函数空间稠密, 甚至在更广泛的函数空间 (只要在 $-\infty$ 处速降) 中稠密.

注 5 这意味着我们可以把事件的级别统一化, 例如, 可以只取 $\alpha = 1/2$. 任何的事件进程函数总可以写成 $f(t) = \int g(s)(t - s)_+^{1/2} ds$, 而这样的广义函数 $g(s)$ 总是存在的.

最后还要指出, 经典的分数次导数只是针对在时间开始点 a 分数次连续的函数, 而我们上述的方法则推广到可以处理有多个 $\{t_j\}$ 分数次连续点的情形. 经典的分数次微分方程通常是利用谱方法求解, 采用所谓好函数 (如解析函数) 作为基函数来处理问题. 而对于分数次连续的函数, 更为合理的是采用分数次连续的函数作为基, 这才能更为深刻地描写事件进程函数的事件发生点及事件的规模这些事件特征. 这个特征是由推广的 Taylor 展式表示的, 而新定义的分数次导数完整、简洁地刻画了包括事件表及推广的 Taylor 展式在内的事件发展的整个过程.

致谢 感谢李大潜先生多次阅读本文草稿, 并提出了许多建设性的意见.

参考文献

- 1 Hermann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists. Singapore: World Scientific Publishing, 2014
- 2 Mille K S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley, 1993
- 3 Saniko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993
- 4 Schaback R, Wu Z M. Operators on radial functions. J Comput Appl Math, 1996, 73: 257–270

Fractional derivatives from the perspective of the Minkowski's space-time

WU ZongMin

Abstract This paper deals with the fractional derivatives from the beginning of the definition. Based on the conception of the Minkowski's space-time, a revised version of the definition is given. The new version of the definition possesses the properties of locality, shift invariant, served as the coefficients of the Taylor's expansions, Leibnitz's rule etc., which the classical derivative have. The new fractional derivatives can be got by local differential analysis and to model the fractional differential equations, too. Moreover, we take the fractional derivative to analyze the functions of time processes, which are expressed by generalized Taylor's expansions, and to look back upon the histories based on the information of nowadays. The theory is applied to the prediction and gets some interesting results, too. Finally, numerical formula for calculating the fractional derivatives and some examples of the mathematical modeling for fractional differential equation are given.

Keywords fractional derivatives, analysis of time function, generalized Taylor's expansions, Minkowski's space-time

MSC(2010) 26A33

doi: 10.1360/N012016-00153