

超线性 Duffing 方程的 Mather 集

裴 明 亮

(中国科学院数学研究所, 北京 100080)

摘 要

本文把近年来出现的关于单调扭转映射的 Aubry-Mather 理论应用到超线性 Duffing 方程 $\ddot{x} + g(x) = p(t)$ 的研究, 这里 $p(t) \in C^0(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $g(x) \in C^0(\mathbb{R})$ 具有超线性增长性: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x)/x = +\infty$. 其结果可以对缺乏高阶光滑性的大量方程仍给出其整体行为, 特别是周期解和拟周期解的刻画.

关键词 Duffing 方程、Aubry-Mather 理论、Mather 集、无结周期解、拟周期解

1 引 言

人们已长久而广泛地研究了 Duffing 方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t), \quad (*)$$

其中 $p(t)$ 是以 1 为周期的连续周期函数, $g(x)$ 连续并满足: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) \cdot \operatorname{sgn}(x) = +\infty$.

这一方面是由于方程 (*) 熟知的物理意义, 另一方面是由于它还是一个最简单却又非平凡的 Hamilton 系统, 其动力行为和研究办法都将具有某些典型性. 这里, 大家感兴趣的动力行为主要有: 周期解、拟周期解, 所有解的有界性以及混沌现象. 在已有文献中, 大量的工作是证明周期解的存在性, 如文献 [1—3], Ding 和 Zanolin¹⁾ 及其所引进一步文献, 而对周期解的性态则知之甚少; 对于建立拟周期解的存在性, 唯一有效的工具是 KAM 理论中的 Moser 定理, 方程 (*) 所有解的有界性也是由此导出的, 但这必然要求 $g(x)$ 至少四次连续可微并满足其它很强条件而使 $g(x)$ 十分接近于一个多项式 (参见文献 [4—8] 等).

在缺乏高阶光滑性的情形, Moser 定理不再能用, 其动力行为如何尚不清楚. 另一方面, 最近几年发展的关于扭转映射的 Aubry-Mather 理论显示, 方程 (*) 可能至少还拥有广义的拟周期解以及好的周期解. 本文正是要实现这一点, 我们证明:

定理 A 设 $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$. 如果存在常数 $k_0 > 0, \delta > 0$ 和 $d_0 \geq 0$ 使得当 $|x| \geq d_0$ 时成立:

$$(D_1) \quad g'(x) - g(x)/x \geq \delta;$$

$$(D_2) \quad x^2 \cdot g'(x) \leq k_0 \cdot G(x), \quad |x^3 \cdot g''(x)| \leq k_0 \cdot G(x),$$

1991-10-31 收稿, 1992-04-11 收修稿稿.

1) Ding, T., Zanolin, F., Periodic solutions of Duffing's equations with superquadratic potential, to appear in J. Diff. Eqs., 1992.

这儿 $G(x) = \int_0^x g(x)dx$. 那么, 存在常数 $\omega_0 > 0$, 使得 $\forall \omega > \omega_0$, 方程(*)的 Poincaré 映射有一个以 ω 为旋转数的不变 Mather 集 M_ω . 从而

- (i) 方程(*)有无穷多个以任意整数 $m \geq 1$ 为最小周期的无结的 (Birkhoff 型) 周期解;
- (ii) 对任何无理数 $\omega > \omega_0$, 方程(*)有一个以 $(1, \omega)$ 为频率的拟周期解, 对应于 Mather 集 M_ω .

定理 B 在定理 A 假设下, 下列三条等价:

- (i) 方程(*)拥有无界解;
- (ii) 对任何充分大的有理数 p/q , 方程(*)既有一条无结的又有一条有结的周期解, 二者均以 p/q 为旋转数;
- (iii) 在扩张相空间 $(t, x, \dot{x})$ 中, 没有围绕 t 轴的大半径的流不变柱面存在.

注记 1 在弱的条件下, 方程(*)可能拥有无界解, 此时定理 B 说明, 它的动力行为将十分接近混沌, 它的周期解相互缠绕形成纽结, 拟周期解变为广义的, 对应到 Cantor 集.

注记 2 条件 (D_1) 有一定物理意义, 它表示振子的硬特征, 其振动频率随振幅一起增加.

注记 3 Aubry-Mather 理论到平面方程的实现, 作者仅知文献 [9, 10]. Moser^[9] 和 Denzler^[10] 用变分方法杰出地推广这个理论到一般正定 Lagrange 系统, 对应到标准坐标下平面 Hamilton 系统. 对于本文中直角坐标下的方程(*), 我们通过坐标变换, 仔细估计和映射扩张而直接用 Aubry-Mather 定理完成主要定理的证明. 事实上, 还可以结合其它许多拓扑化的定理而叙述更多结论, 在此不再一一列出.

2 Aubry-Mather 理论

设映射 f 为环域 $E = S^1 \times [a, b]$ 到自身的保向同胚, F 表示 f 在 E 的复迭空间 $\tilde{E} = \mathbb{R}^1 \times [a, b]$ 的提升, π_1 和 π_2 分别表示 $\tilde{E}$ 到坐标分量的投影.

定义 2.1 称 f 在环域 E 上是单调扭转的, 如果 $\forall x \in \mathbb{R}, \pi_1 \circ F(x, y)$ 关于 y 严格单调.

定义 2.2 称 f 在 E 上是一个正合辛映射, 如果对任何 E 中简单闭道路 C 成立:

$$\oint_C y dx = \oint_{\pi(C)} y dx.$$

可以看出, 正合辛映射为保面积的, 反之不然. 熟知, Hamilton 系统导出的 Poincaré 映射是正合的辛映射.

定义 2.3 设 $z \in E$, $\tilde{z}$ 为 z 点在 $\tilde{E}$ 的提升, 若 $\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1 \circ F^n(\tilde{z}) - \pi_1(\tilde{z}))/n$ 存在, 则称它为 z 的旋转数. $\rho(M) = \{\rho(z) | z \in M\}$ 称为集合 M 的旋转集. 当 $\rho(M)$ 为单个数时, 称为 M 的旋转数.

熟知, 如果 M 为 f 的一个不变圆, 则 $\rho(M)$ 为单个数.

定义 2.4 称 f 的不变集 $M_\omega \subset E$ 为具有旋转数 ω 的 Mather 集, 如果

- (i) M_ω 的提升 $\tilde{M}_\omega$ 可用参数表示: $x = u(\lambda), y = v(\lambda)$, 其中 $u(\lambda)$ 关于 λ 单调增加, $u(\lambda) - 1$ 和 $v(\lambda)$ 都以 1 为周期;
- (ii) F 限制在 $\tilde{M}_\omega$ 上相当于旋转 ω 角度, 即 $F(u(\lambda), v(\lambda)) = (u(\lambda + \omega), v(\lambda + \omega))$.

如果 $u(\lambda)$ 关于 λ 连续, M_ω 就是一个不变圆. 当 $\omega = p/q$ 时, 称 M_ω 所含轨道为 (p, q) 型 Birkhoff 周期轨道; 当 ω 为无理数时, 称 M_ω 所含轨道为频率为 $(1, \omega)$ 的拟周期轨道.

注记 当 M_ω 为不变圆时, 所含轨道为我们通常所指的拟周期轨道; 否则, M_ω 为一个 Cantor 集, 这个拟周期轨道是广义的.

定义 2.5 方程(*)的解 $(x(t), \dot{x}(t))$ 称为一条无结周期解和拟周期解, 如果其初始点 $(x(0), \dot{x}(0))$ 分别是它的 Poincaré 映射的 Birkhoff 型周期轨道和拟周期轨道.

注记 无结周期解的几何意义: 设 $z(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ 为周期为 q 的解, 则它产生的 q 条周期解 $z_i(t) = z(t+i)$, $0 \leq i \leq q-1$, 在空间 $(t, x, \dot{x})$ 中, 可以同伦地拉直成 q 条平行线, 互不缠绕.

定理 2.1^[11-14] 设 $f: S^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^1$ 为柱面上单调扭转的正合辛微分同胚, 它保持柱面两端不变且在两端无限扭转, 即

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \pi_2 \circ F(x, y) = \pm\infty, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \pi_1 \circ F(x, y) = \pm\infty.$$

那么, 对任何实数 ω 存在一个以 ω 为旋转数的 Mather 集.

注记 许多作者用拓扑方法和拓扑的条件发展了上述定理^[14, 15].

3 作用-角变量 (A, θ)

自治方程

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (3.1)$$

等价于

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x). \quad (3.2)$$

这个方程是可积的, 有第一积分 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$, $H(x, y) = h$ 形成的一簇闭曲线就是方程(3.2)的积分曲线. 熟知有作用-角变量 (A, θ) ^[16], 可将它化为简单形式

$$\dot{\theta} = \omega(A), \quad \dot{A} = 0. \quad (3.3)$$

下面给出 (A, θ) 的显式表达式^[8].

令 $T(h)$ 表示方程(3.2)沿积分曲线 $H(x, y) = h$ 一周所用时间, $A(h)$ 为 $H(x, y) = h$ 所围面积, 则

$$T(h) = 2 \int_{x_-}^{x_+} (2(h - G(x)))^{-\frac{1}{2}} dx, \quad A(h) = 2 \int_{x_-}^{x_+} (2(h - G(x)))^{\frac{1}{2}} dx,$$

且有

$$A'(h) = T(h),$$

这里 $(x_+, 0), (x_-, 0)$ 为 $\Gamma_h: H(x, y) = h$ 与 x 轴的两个交点, 或者说, $x_+(h) = G_+^{-1}(h)$, $x_-(h) = -G_-^{-1}(h)$ 分别为 $G(x) = h$ 的两个反函数分支.

对平面 $\mathbb{R}^2$ 中任一点 (x, y) , 令 $h = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$, 定义 $\tau(x, y)$ 为

$$\tau(x, y) = \begin{cases} \int_{x_-}^x (2(h - G(s)))^{-\frac{1}{2}} ds, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时,} \\ T(h) - \int_{x_-}^x (2(h - G(s)))^{-\frac{1}{2}} ds, & \text{当 } y < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.4)$$

令

$$\theta(x, y) = \tau(x, y)/T(h). \quad (3.5)$$

可以证明,上述坐标变换 $(x, y) \xrightarrow{\Phi} (\theta, A)$ 为正则变换, (x, y) 绕 Γ_h 一周时, θ 增加角度 1. 在这个坐标变换下, $\omega(A) = 1/T(h)$, 而方程(*)可等价于

$$\dot{\theta} = (1 - x_h(\theta, A(h)) \cdot p(t))/T(h), \quad \dot{A} = x_\theta(\theta, A) \cdot p(t), \quad (3.6)$$

这里以及以后,除非特别声明,我们总用下角标表示求偏导数.

4 坐标变换的性质

以下总假定条件 (D_1) 和 (D_2) 成立,除非特别指出,常数 C 表示一个普适常数. 这里不妨设 $d_0 = 0$, $g(0) = 0$, 并当 $x \approx 0$ 时, $x \cdot g(x) > 0$, 因为我们只关心 h 充分大时的彼此关系,对以下的证明稍作修改即可处理一般情形,而无本质困难. 这样,我们有

$$G(x) \leq x \cdot g(x) \leq x^2 \cdot g'(x) \leq k_0 \cdot G(x), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x)/x = +\infty, \quad (4.1)$$

令 (ϕ, r) 表示极坐标. 因为 Γ_h 为星形闭曲线, r 可看作 (ϕ, h) 的函数,那么,

$$H(\phi, r(\phi, h)) = h. \quad (4.2)$$

我们可以写出 $A(h)$ 的另一种表达式

$$A(h) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_h} r^2(\phi, h) d\phi. \quad (4.3)$$

易知, $rH_r = x \cdot g(x) + y^2$, $r^2H_{rr} = x^2 \cdot g'(x) + y^2$, $r^3 \cdot H_{rrr} = x^3 \cdot g''(x)$, 又从(4.2)式两边对 h 求偏导数得: $r_h = 1/H_r$, 代换 $T(h) = A'(h) = \oint_{\Gamma_h} r \cdot r_h d\phi = \oint_{\Gamma_h} \frac{r^2}{r \cdot H_r} d\phi$ 可得

$$T(h) = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{xg(x) + y^2} d\phi. \quad (4.4)$$

类似地,可以证明

$$T'(h) = \int_0^{2\pi} (x \cdot g(x) - x^2 g'(x)) / [xg(x) + y^2]^3 \cdot r^2 d\phi, \quad (4.5)$$

$$T''(h) = \int_0^{2\pi} \frac{3[x^2 \cdot g'(x) - x \cdot g(x)]^2 + [3x^2 g'(x) - 3x \cdot g(x) - x^3 \cdot g''(x)] \cdot (xg(x) + y^2)}{(xg(x) + y^2)^5} \cdot r^2 d\phi. \quad (4.6)$$

记 $T_+(h)$, $T_-(h)$ 分别表示方程(3.2)沿 Γ_h 走过第一、二象限所用时间, $A_\pm(h)$ 分别表示 Γ_h 所围在第一、二象限的面积,那么,与(4.3)–(4.6)式完全类似的公式成立, 仅需将积分上下限分别改为 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 与 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 即可.

$$\begin{aligned} & \text{引理 4.1} \quad \sqrt{h}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)) \leq A(h) \leq 4 \sqrt{h}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)); \quad \frac{\sqrt{2}}{2} G_+^{-1}(h) \\ & \leq A_+(h) \leq 2 \sqrt{h} \cdot G_+^{-1}(h), \quad \frac{\sqrt{h}}{2} \cdot G_-^{-1}(h) \leq A_-(h) \leq 2 \sqrt{h} \cdot G_-^{-1}(h). \end{aligned}$$

证 因为 Γ_h 为凸曲线, 与以 $\sqrt{2h}$ 和 $G_\pm^{-1}(h)$ 为直角边的三角形或矩形比较面积即

可.

引理 4.2 $k_0^{-1} \cdot h^{-1} \cdot A(h) \leq T(h) \leq 4 \cdot h^{-1} \cdot A(h)$; $k_0^{-1} \cdot h^{-1} \cdot A_+(h) \leq T_+(h) \leq 4 \cdot h^{-1} \cdot A_+(h)$, $k_0^{-1} \cdot h^{-1} \cdot A_-(h) \leq T_-(h) \leq 4 \cdot h^{-1} \cdot A_-(h)$.

证 用(4.4)式和条件(4.1)及 $h = G(x) + \frac{1}{2}y^2$ 即可证得.

引理 4.3 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $T(h) \rightarrow 0$.

证 $0 < T(h) < 4(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h))/\sqrt{h} \rightarrow 0$.

引理 4.4 $T'(h) < 0$.

证 由条件 (D₁) 和(4.5)式可得.

类似地, 由条件 (D₁) 和 (D₂) 及 $h = G(x) + \frac{1}{2}y^2$, 容易得到下列两个引理.

引理 4.5 $|T'(h)| \leq 2k_0 \cdot h^{-2} \cdot A(h)$,

$$|T'_+(h)| \leq 2k_0 \cdot h^{-2} \cdot A_+(h), \quad |T'_-(h)| \leq 2k_0 h^{-2} A_-(h).$$

引理 4.6 $|T''(h)| \leq C \cdot h^{-3} A(h)$,

$$|T''_+(h)| \leq C \cdot h^{-3} A_+(h), \quad |T''_-(h)| \leq C \cdot h^{-3} A_-(h).$$

引理 4.7 $G_+^{-1}(h)/G_+^{-1}(h/2) < 2$, $G_-^{-1}(h)/G_-^{-1}(h/2) < 2$.

证 $G_+^{-1}(h)/G_+^{-1}(h/2) = 1 + (G_+^{-1}(h) - G_+^{-1}(h/2))/G_+^{-1}(h/2)$

$$= 1 + \frac{h}{2} \left(G_+^{-1} \left(\frac{h}{2} + \xi \right) \right)' / G_+^{-1}(h/2)$$

$$= 1 + h/2 \cdot g \left(G_+^{-1} \left(\frac{h}{2} + \xi \right) \right) \cdot G_+^{-1}(h/2)$$

$$\leq 1 + h/2 \cdot g(G_+^{-1}(h/2)) \cdot G_+^{-1}(h/2)$$

$$\leq 1 + h/2 G(G_+^{-1}(h/2)) = 2.$$

后一式可类似证明.

引理 4.8 (i) $x_h \rightarrow 0$, $y_h \rightarrow 0$, 当 $h \rightarrow \infty$ 时;

(ii) $|x_{hh}| < C \cdot h^{-2} [G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)] \cdot (1 + G_-^{-1}(h)/G_+^{-1}(h))$, $x \geq 0$;

$|x_{hh}| < C \cdot h^{-2} [G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)] \cdot (1 + G_+^{-1}(h)/G_-^{-1}(h))$, $x < 0$.

证 我们只对第一象限 $x \geq 0$, $y = \sqrt{2(h - G(x))} > 0$ 的情形给出证明, 其它类似.

分为 2 种情形.

(I) $x \in [0, G_+^{-1}(h/2)]$. 我们有关系式

$$\int_0^{x(\theta, h)} (2(h - G(s)))^{-\frac{1}{2}} ds = \theta \cdot T(h) - T_-(h). \quad (4.7)$$

两边同时对 h 求偏导数可得:

$$x_h = \sqrt{2} (h - G(x))^{\frac{1}{2}} \cdot K_1(x, h), \quad (4.8)$$

其中 $K_1(x, h) = \theta \cdot T'(h) - T'_-(h) + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^x (h - G(s))^{-\frac{1}{2}} ds$. 由引理 4.5 有

$$|K_1(x, h)| \leq C \cdot h^{-\frac{3}{2}} (G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)). \quad (4.9)$$

从而

$$|x_h| \leq C \cdot h^{-1}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)) \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

由 $y = (2(h - G(x)))^{\frac{1}{2}}$ 有

$$y_h = \frac{\sqrt{2}}{2} (h - G(x))^{-\frac{1}{2}} - g(x) \cdot K_1(x, h). \quad (4.11)$$

由估计(4.9)式和 $g(x) \leq g(G_+^{-1}(h)) \leq k_0 \cdot G(G_+^{-1}(h))/G_+^{-1}(h) = k_0 \cdot h/G_+^{-1}(h)$ 可得

$$|y_h| \leq C \cdot h^{-\frac{1}{2}}(1 + G_-^{-1}(h)/G_+^{-1}(h)) \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

另一方面,由(4.8)式得

$$\begin{aligned} x_{hh} = & y_h \cdot K_1(x, h) + y \cdot \left(\theta \cdot T''(h) - T''(h) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}}{4} (h - G(x))^{-\frac{1}{2}} x_h - \frac{3\sqrt{2}}{8} \int_0^x (h - G(s))^{-\frac{3}{2}} ds \right). \end{aligned}$$

利用引理 4.1, 4.6 和估计(4.9), (4.10)及(4.12)式可表明

$$|x_{hh}| \leq C \cdot h^{-2}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h))(1 + G_-^{-1}(h)/G_+^{-1}(h)). \quad (4.13)$$

(II) $x \in [G_+^{-1}(h/2), G_+^{-1}(h)]$. 我们利用下列等式:

$$\int_x^{G_+^{-1}(h)} (2(h - G(s)))^{-\frac{1}{2}} ds = T_+(h) + T_-(h) - \theta \cdot T(h). \quad (4.14)$$

令 $L(x, h) = \int_x^{G_+^{-1}(h)} (h - G(s))^{-\frac{1}{2}} ds = \int_{G(x)}^h (h - s)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} G_+^{-1}(s) ds$. 分部积分得

$$L(x, h) = 2(h - G(x))^{\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} G_+^{-1}(s) \Big|_{s=G(x)} + 2 \int_{G(x)}^h (h - s)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{ds^2} G_+^{-1}(s) ds, \quad (4.15)$$

用 $L(x, h)$ 替换(4.14)式左边并对其两边求关于 h 的偏导数得

$$x_h = \frac{1}{g(x)} + \sqrt{2} (h - G(x))^{\frac{1}{2}} \cdot K_2(x, h), \quad (4.16)$$

其中

$$\begin{aligned} K_2(x, h) = & \sqrt{2} (h - G(x))^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2}{ds^2} G_+^{-1}(s) \Big|_{s=G(x)} \\ & + \sqrt{2} \int_{G(x)}^h (h - s)^{\frac{1}{2}} \frac{d^3}{ds^3} G_+^{-1}(s) ds - T'_+(h) - T'_-(h) + \theta \cdot T'(h). \end{aligned}$$

直接计算 $\frac{d^2}{ds^2} G_+^{-1}(s)$ 和 $\frac{d^3}{ds^3} G_+^{-1}(s)$, 并利用条件(4.1)估计有,当 $s > h/2$ 时成立:

$$\left| \frac{d^2}{ds^2} G_+^{-1}(s) \right| \leq C \cdot h^{-2} \cdot G_+^{-1}(h), \quad \left| \frac{d^3}{ds^3} G_+^{-1}(s) \right| \leq C \cdot h^{-3} \cdot G_+^{-1}(h).$$

又当 $x \geq G_+^{-1}(h/2)$ 时, $g(x) \geq g(G_+^{-1}(h/2)) \geq h/2G_+^{-1}(h)$. 综合引理 4.5 得

$$|K_2(x, h)| \leq C \cdot h^{-\frac{1}{2}}[G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)], \quad (4.17)$$

$$|x_h| \leq C \cdot h^{-1}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)) \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

由 $y_h = \frac{\sqrt{2}}{2} (h - G(x))^{-\frac{1}{2}}(1 - g(x) \cdot x_h) = -g(x) \cdot K_2(x, h)$ 可得

$$|y_h| \leq C \cdot g(G_+^{-1}(h)) \cdot h^{-\frac{1}{2}}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h)) \leq C \cdot h^{-\frac{1}{2}}(1 + G_-^{-1}(h)/G_+^{-1}(h)) \rightarrow 0.$$

这样便证明了 (i). 另一方面, 由 (4.16) 式可得

$$\begin{aligned} x_{hh} = & -\frac{g'(x)}{g^3(x)} - \frac{\sqrt{2} g'(x)}{g^2(x)} (h - G(x))^{\frac{1}{2}} \cdot K_2(x, h) \\ & + y_h \cdot K_2(x, h) + y \cdot \frac{\partial}{\partial h} K_2(x, h). \end{aligned}$$

与情况 (I) 类似, 经仔细估计可以表明

$$|x_{hh}| \leq C \cdot h^{-2}(G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h))(1 + G_-^{-1}(h)/G_+^{-1}(h)). \text{ 证毕.}$$

引理 4.9 取 $\delta_{\pm} = \arctg G_{\pm}^{-1}(h/2)/\sqrt{h}$, 并记

$$A(\delta_+) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta_+} r^2(\phi, h) d\phi, \quad A(\delta_-) = \int_{\frac{\pi}{2}+\delta_-}^{\pi} r^2(\phi, h) d\phi,$$

那么, $A(\delta_+) > \sqrt{h} \cdot G_+^{-1}(h)$, $A(\delta_-) > \sqrt{h} \cdot G_-^{-1}(h)$.

证 比较扇形和三角形的面积即可.

命题 $Q = x_{hh} \cdot T(h)/T'(h) \rightarrow 0$, 当 $h \rightarrow \infty$ 时.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad -T'(h) &= \int_0^{2\pi} \frac{x^2 \cdot g'(x) - x \cdot g(x)}{[x \cdot g(x) + y^2]^3} \cdot r^2 d\phi \\ &\geq C \cdot h^{-3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta_+} + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta_-}^{\pi} \right) \cdot \delta \cdot x^2 \cdot r^2 d\phi \\ &\geq C \cdot h^{-3} ((G_+^{-1}(h/2))^2 \cdot A(\delta_+) + (G_-^{-1}(h/2))^2 \cdot A(\delta_-)) \\ &\geq C \cdot h^{-3} \cdot h^{-\frac{1}{2}} ((G_+^{-1}(h))^3 + (G_-^{-1}(h))^3) \\ &\geq C \cdot h^{-\frac{7}{2}} (G_+^{-1}(h) + G_-^{-1}(h))^3. \end{aligned}$$

最后一式是因为 $(a+b)^3 \leq 4(a^3 + b^3)$. 结合引理 4.1, 4.2 及 4.8 得

$$|Q| \leq C/G_+^{-1}(h) \rightarrow 0.$$

引理 4.10 $x_{\theta} = T(h) \cdot y$, $y_{\theta} = -T(h) \cdot g(x)$.

证 $y = \dot{x} = x_{\theta} \cdot \theta + x_h \cdot \dot{h} = x_{\theta}/T(h)$,

$$-g(x) = \dot{y} = y_{\theta} \cdot \dot{\theta} + y_h \cdot \dot{h} = y_{\theta}/T(h),$$

从而引理得证.

5 单调扭转性质

本节证明方程 (3.6) 的 Poincaré 映射在 $h \gg 1$ 处单调扭转. 若记 $\theta = \theta(t; \theta_0, A_0)$, $A = A(t; \theta_0, A_0)$ 为方程 (3.6) 的以 (θ_0, A_0) 为初值的解, 则只须证明

$$\frac{\partial \theta(1; \theta_0, A_0)}{\partial A_0} > 0.$$

令

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{T'(h(t))}{T^3(h(t))} \left(1 - x_h \cdot p(t) + \frac{T(h) \cdot x_{hh} \cdot p(t)}{T'(h)} \right), \\ a_2(t) &= -\frac{x_{\theta h} \cdot p(t)}{T(h(t))}, \quad a_3(t) = x_{\theta \theta} \cdot p(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

从方程(3.6)可得

$$\theta_{A_0} = a_1(t) \cdot A_{A_0} + a_2(t) \cdot \theta_{A_0}, \quad \dot{A}_{A_0} = -a_2(t) A_{A_0} + a_3(t) \cdot \theta_{A_0}. \quad (5.2)$$

引理 5.1 $\lim_{A_0 \rightarrow +\infty} A(t; \theta_0, A_0) = \infty$ 对 t 一致地成立; 且 $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$ 成立:

$$\frac{h(t_1; \theta_0, A_0)}{h(t_2; \theta_0, A_0)} = 1 + o(1), \quad \frac{T(h(t_1))}{T(h(t_2))} < C, \quad \frac{A(h(t_1))}{A(h(t_2))} < C.$$

证 记 $\lambda = \sqrt{h}$. 由 $h(t) = y \cdot p(t)$ 得

$$\dot{\lambda} = y \cdot p(t) / 2\sqrt{h}.$$

由于 $|y| \leq \sqrt{2h}$ 及 $p(t)$ 的有界性知 $|\dot{\lambda}| \leq C$, 从而

$$|\lambda(t) - \lambda(0)| \leq C \quad \text{对 } t \in [0, 1] \text{ 成立.}$$

易知

$$h(t_1)/h(t_2) = 1 + o(1), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1].$$

由引理 4.2 知

$$T(h(t_1))/T(h(t_2)) \leq C \cdot \frac{A(h(t_1))}{A(h(t_2))} \cdot \frac{h(t_2)}{h(t_1)}.$$

(1) 若 $h(t_1) \leq h(t_2)$, 则 $A(h(t_1))/A(h(t_2)) \leq 1$, 进而

$$T(h(t_1))/T(h(t_2)) \leq C \cdot (1 + o(1)) \leq C_1.$$

(2) 若 $h(t_1) > h(t_2)$, 由 $T'(h) < 0$ 知

$$T(h(t_1))/T(h(t_2)) < 1,$$

由引理 4.2 还可导出

$$A(h(t_1))/A(h(t_2)) \leq C \cdot \frac{T(h(t_1))}{T(h(t_2))} \cdot \frac{h(t_2)}{h(t_1)} < C.$$

综合起来, 完成了引理的证明.

引理 5.2 (i) $a_1(t) > 0$, 当 $A_0 \gg 1$ 时;

(ii) $a_1(t) \rightarrow 0, a_2(t) \rightarrow 0, a_1(t_1) \cdot a_3(t_2) \rightarrow 0$.

当 $A_0 \rightarrow +\infty$ 时, $\forall t, t_1, t_2 \in [0, 1]$ 一致成立.

证 利用(5.1)式及前面引理易得, 略去.

引理 5.3 (i) $\theta_{A_0}(t; \theta_0, A_0) > 0, \forall t \in (0, 1], A_0 \gg 1$;

(ii) $\theta_{A_0}(t; \theta_0, A_0) \rightarrow 0$, 当 $t \in (0, 1], A_0 \rightarrow +\infty$ 时;

(iii) $A_{A_0}(t; \theta_0, A_0) = 1 + o(1), \forall t \in [0, 1], A_0 \gg 1$;

$$\theta_{\theta_0}(t; \theta_0, A_0) = 1 + o(1), \quad \forall t \in [0, 1], A_0 \gg 1.$$

证 由差分方程(5.2)知

$$\begin{aligned} \theta_{A_0}(t) &= e^{\int_0^t a_2(s) ds} \int_0^t e^{-\int_0^s a_2(r) dr} a_1(s) A_{A_0}(s) ds \\ &= (1 + o(1)) \int_0^t a_1(s) \cdot A_{A_0}(s) ds, \\ A_{A_0}(t) &= e^{-\int_0^t a_2(s) ds} \left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s a_2(r) dr} a_1(s) \cdot \theta_{A_0}(s) ds \right) \\ &= 1 + o(1) + (1 + o(1)) \int_0^t a_3(s) \int_0^s a_1(t) \cdot A_{A_0}(t) dt \end{aligned}$$

$$= 1 + o(1) + o(1) \int_0^t \int_0^t A_{A_0}(t) dt,$$

$$\Rightarrow A_{A_0}(t) = 1 + o(1), \theta_{A_0}(t) = (1 + o(1)) \int_0^t a_1(t) dt > 0 \text{ (及 } \rightarrow 0 \text{)}.$$

类似地, 利用关于 θ_0 的差分方程可证明 $\theta_{\theta_0}(t) = 1 + o(1)$.

6 定理的证明

由引理 5.3, 不妨设当 $A_0 > m > 0$ 时, 方程(3.6)的 Poincaré 映射 P 单调扭转. 下面先把 P 扩充为全柱面上单调扭转的正合辛映射.

记 $P(\theta_0, A_0) = (\theta_1, A_1)$.

令 $\Gamma_m = \mathbb{R}^1 \times \{m\}$, 由引理 5.3 (iii), P 将 Γ_m 映为一星形曲线, 换句话说, 有以 1 为周期的周期函数 $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 使得

$$P(\Gamma_m) = \text{graph}(g(\theta)).$$

令

$$P_1(\theta_0, A_0) = (\theta_0, A_0 - g(\theta_0) + m),$$

取 $P_2 = P_1 \circ P$, 则 P_2 映 Γ_m 到它自身, 并且保面积, 故为 $\tilde{E}[m, +\infty)$ 上正合辛同胚, 且单调扭转, 因为

$$\frac{\partial \pi_1 \circ P_2(\theta_0, A_0)}{\partial A_0} = \frac{\partial \pi_1 \circ P(\theta_0, A_0)}{\partial A_0} > 0.$$

将 P_2 关于 Γ_m 做对称扩张得 P_3 , 即

$$P_3(\theta_0, A_0) = P_2(\theta_0, A_0), A_0 \geq m; P_3(\theta_0, A_0) = (\pi_1 \circ P_2(\theta_0, -A_0 + 2m), 2m - \pi_2 \circ P_2(\theta_0, -A_0 + 2m)), A_0 < m \text{ 时}.$$

由于 $\frac{\partial \theta_1}{\partial A_0} \rightarrow 0$ (当 $A_0 \rightarrow \infty$ 时), 不妨设 m 充分大使得 $\left| \frac{\partial \theta_1}{\partial A_0} \right| < \frac{1}{2}$. 令

$$P_4(\theta_0, A_0) = \{\theta_0, A_0\}, A_0 \geq m; P_4(\theta_0, A_0) = (\theta_0 - m + A_0, A_0), A_0 < m; \\ P_5 = P_4 \circ P_3.$$

可以看出, 当 $A_0 < m$ 时, $\frac{\partial \pi_1 \circ P_5(\theta_0, A_0)}{\partial A_0} > \frac{1}{2} > 0$.

最后, 令 $P_6 = P_1^{-1} \circ P_5$, 则 P_6 就是所需的 P 的扩张. 而且由于 $\dot{\theta}(t) = \frac{1}{T(h)}(1 - x_h \cdot$

$p(t)) \geq C/T(h(A_0))$, 有 $\theta_1 - \theta_0 + \int_0^1 \dot{\theta} dt \geq \theta_0 + C/T(h(A_0)) \rightarrow +\infty$ ($A_0 \rightarrow +\infty$); 而当 $A_0 \rightarrow -\infty$ 时, $\pi_1 \circ P_6(\theta_0, A_0) \rightarrow -\infty$, 这样便证明了

引理 6.1 P_6 为全柱面单调扭转的正合辛同胚, 且保持两端不变并无限扭转.

定理 A 的证 利用 Bangert^[14] 对文献 [11, 12] 的统一处理形式, 说明对于任何 $\omega \in \mathbb{R}$, 有一个 P_6 的以 ω 为旋转数的 Mather 集 M_ω . 下面只需表明, 对充分大的 ω , M_ω 完全位于 $S^1 \times [m, +\infty)$ 即可.

令 $\omega_0 = \max_{\theta_0 \in [0, 1]} (\pi_1 \circ P(\theta_0, m) - \theta_0) + 2$, 则当 $A_0 < m$ 时, 对任何 θ_0 成立:

$$\pi_1 \circ P_6(\theta_0, A_0) - \theta_0 < \omega_0 - 2. \quad (6.1)$$

当 $\omega > \omega_0$ 时, 对于 M_ω 上任一点 z , 存在 $N > 0$ 使得 $z^* = P_\epsilon^N(z)$ 满足

$$\pi_1 \circ P_\epsilon(z^*) - \pi_1(z^*) > \omega_0. \quad (6.2)$$

否则, $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1 \circ P_\epsilon^n(z) - \pi_1(z))/n \leq \omega_0$, 将与 ω 选取矛盾. 又因为对 M_ω 上任一点 z_1 , 存在整数 j 使得

$$\pi_1(z^*) \leq \pi_1(z_1) - j \leq \pi_1(z^*) + 1. \quad (6.3)$$

又 P_ϵ 在 M_ω 上保序, 所以

$$\pi_1 \circ P_\epsilon(z^*) \leq \pi_1 \circ P_\epsilon(z_1) - j \leq \pi_1 \circ P_\epsilon(z^*) + 1. \quad (6.4)$$

结合(6.2), (6.3)及(6.4)式得 $\pi_1 \circ P_\epsilon(z_1) - \pi_1(z_1) \geq \omega_0 - 1$, 由(6.1)式得 $\pi_2(z_1) > m$, 从而证明了 $M_\omega \subset R^1 \times [m, +\infty)$.

定理 B 的证 这是文献[18, 19]的结果在前面已得到的性质下的直接推论, 注意到文献[19]虽然只对有限环域的情形给出不变圆的非存在性与非 Birkhoff 周期轨道存在性的等价性, 其方法结合文献[18]说明对无限环域也有上述结论.

致谢 作者对导师丁同仁教授的悉心指导和热情鼓励, 深表感谢; 并对钱定边和柳彬博士的极有帮助的阅读初稿亦表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Jacobiowitz, H., *J. Diff. Eqs.*, 1976, 20: 30—52.
- [2] Ding, W., *Acta. Math. Sinica*, 1984, 25: 227—235.
- [3] Mawhin, J., Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer, New York, 1989.
- [4] Littlewood, J. E., *Some Problems in Real and Complex Analysis*, Heath, Lexington, Mass, 1968.
- [5] Morris, G., *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1976, 14: 71—93.
- [6] Dieckerhoff, R., Zehnder, E., *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 1987, 14(4): 79—95.
- [7] Liu, B., *J. Diff. Eqs.*, 1989, 79: 304—315.
- [8] You, J., *Science Sinica, ser. A*, 1991, (8): 805—817.
- [9] Moser, J., *Erg. Th. and Dynam. Sys.*, 1986, (6): 325—333.
- [10] Denzler, J., *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1987, 38: 791—812.
- [11] Aubry, S., LeDaeron, P. Y., *Physica*, 1983, 8D: 3881—422.
- [12] Mather, J. N., *Topology*, 1982, 21: 457—467.
- [13] Mather, J. N., *Comm. Math. Helv.*, 1989, 64: 375—394.
- [14] Bangert, V., *Dynamics Reported*, 1988, 1: 1—56.
- [15] Moser, J., *SIAM Review* 1986, 28: 459—485.
- [16] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [17] Franks, J., *Ann. Math.*, 1988, 128: 139—151.
- [18] Le Calvez, P., *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 1987, 20: 4: 443—464.
- [19] Boyland, P. L., Hall, G. R., *Topology*, 1987, 26: 221—35.