



# 不可逆谐振子卡诺热机生态学优化

刘晓威<sup>①</sup>, 陈林根<sup>①\*</sup>, 吴锋<sup>①②</sup>, 孙丰瑞<sup>①</sup>

① 海军工程大学研究生院, 武汉 430033;

② 武汉工程大学理学院, 武汉 430033

\* 联系人, Email: [lingenchen@hotmail.com](mailto:lingenchen@hotmail.com), [lgchenna@yahoo.com](mailto:lgchenna@yahoo.com)

收稿日期: 2009-07-20; 接受日期: 2009-08-16

国家自然科学基金(批准号: 50846040)、教育部新世纪优秀人才支持计划项目(编号: NCET-04-1006)和全国优秀博士学位论文作者专项资金(编号: 200136)资助项目

**摘要** 建立了以无相互作用谐振子系统为工质, 包含热阻、内不可逆性和热漏的不可逆量子卡诺热机模型. 基于开放系统量子主方程和量子半群方法, 得到了该量子热机循环的输出功率、效率、熵损失率和生态学函数等重要性能参数的一般表达式, 给出了数值算例. 在经典极限下, 利用数值计算得到了热机循环最优生态学性能, 分析了内不可逆性和热漏对热机生态学性能的影响特点, 并比较分析了最大生态学函数和最大输出功率两种目标下的热机最优性能.

## 关键词

有限时间热力学  
谐振子系统  
量子热机循环  
生态学性能优化

自 20 世纪 70 年代以来, 许多学者用有限时间热力学理论分析研究了热力系统的性能优化问题<sup>[1~22]</sup>. 然而以唯象定律为基础的经典热力学和以平衡态统计为出发点的经典统计力学不是普适的, 对一些特殊领域和系统, 比如极低温领域、激光系统、磁性系统、超导系统等, 经典热力学理论不适用. 在这些领域或系统中, 物质服从量子统计规律, 在研究中需考虑物质的量子特性. 在考虑物质的量子特性的基础上, 一些学者将有限时间热力学的研究对象从经典热力系统扩展到量子热力系统. 1984 年, Kosloff<sup>[23]</sup>首次提出了一个以无相互作用谐振子系统为工质的“量子热机”模型, 并得到了其功率和效率的表达式. 1992 年, Geva 和 Kosloff<sup>[24]</sup>首次用有限时间热力学理论研究了以无相互作用 1/2 自旋系统为工质的量子卡诺热机性能. 之后, 大量文献研究了以无相互作用谐振子系统为工质的量子热机<sup>[25~32]</sup>、量子制冷机<sup>[32~34]</sup>、

量子热泵<sup>[32,35]</sup>和以无相互作用 1/2 自旋系统为工质的量子热机<sup>[36~40]</sup>、量子制冷机<sup>[41~43]</sup>、量子热泵<sup>[36,44,45]</sup>的有限时间热力学性能. 另有一些文献研究了激光制冷系统<sup>[46]</sup>、三能级系统量子热机<sup>[47]</sup>、多能级系统量子热机<sup>[48]</sup>热力学性能和量子热机能够做功的条件<sup>[49]</sup>. 1999 年, Şişman 和 Saygin<sup>[50]</sup>建立了以理想量子气体为工质的埃里克森循环模型, 研究了理想波色气体和理想费米气体量子简并性对循环性能的影响. 此后大量文献研究了理想量子气体为工质的量子热机<sup>[51~53]</sup>和量子制冷机<sup>[54,55]</sup>的性能. Bender 等人<sup>[56]</sup>则建立了以一维势阱中粒子为工质的量子卡诺热机模型, 并得到循环输出功、效率和熵产, 其中效率与经典卡诺热机效率形式类似.

以不同目标优化热力循环性能是有限时间热力学研究的一个重要方面. 除了功率、效率、熵产率等目标外, Angulo-Brown<sup>[57]</sup>在研究热机时, 以  $E' =$

**引用格式:** 刘晓威, 陈林根, 吴锋, 等. 不可逆谐振子卡诺热机生态学优化. 中国科学 G 辑, 2009, 39(12): 1687—1698

Liu X W, Chen L G, Wu F, et al. Ecological optimization of an irreversible harmonic oscillators Carnot heat engine. Sci China Ser G, 2009, 52(12): 1976—1988, doi: 10.1007/s11433-009-0300-1

$P-T_c\sigma$  (其中  $P$  为热机输出功率,  $T_c$  为低温热源温度,  $\sigma$  为熵产率) 为目标优化了热机的性能, 由于该目标在一定意义上与生态学的长期目标有相似性, 故称其为“生态学”最优性能. 因为没有注意到能量和熵的区别, 将功率(熵)和非熵损失放在一起比较是不完备的, 文献[58]对此做出了订正. 文献[59]基于熵分析的观点, 建立了各种循环统一的熵分析生态学目标函数  $E'' = A/\tau - T_0\Delta S/\tau = A/\tau - T_0\sigma$ , 其中  $A$  为循环输出熵,  $T_0$  为环境温度,  $\Delta S$  为循环熵产,  $\tau$  为循环周期. 对热机而言  $A/\tau = P$ , 故有  $E = P - T_0\sigma$ . 此后, 一些文献继续研究了经典热力循环的生态学优化问题<sup>[60-70]</sup>. 生态学目标也被用于量子热力循环性能优化, 文献[34]研究了无相互作用谐振子系统为工质的量子卡诺制冷机的生态学优化性能, 文献[44]研究了无相互作用 1/2 自旋系统量子卡诺热泵生态学优化性能, 文献[71]研究了 1/2 自旋系统为工质, 循环由两个等温过程、一个绝热过程和一个等磁场过程组成的量子热机的生态学性能, 文献[72]研究了理想费米气体为工质的不可逆量子奥托热机的生态学优化性能.

在分析量子热力循环时, 除热源与工质间传热损失外, 一些文献考虑了工质系统内部损耗和旁通热漏等不可逆损失. 文献[36]假设量子循环绝热过程存在内摩擦, 研究由两个绝热分支和两个等磁场分支组成的 1/2 自旋量子布雷顿热机和热泵循环的性能, 文献[30]考虑绝热过程中内摩擦, 研究了谐振子系统量子布雷顿热机性能, 文献[31]考虑内摩擦, 研究了不可逆谐振子奥托制冷机的循环性能特征. 文献[26]在分析谐振子卡诺热机熵经济最优性能时, 考虑高、低温热源之间弱耦联作用, 引入了旁通热漏. 一些文献建立了包含热阻、内部不可逆性和热漏的较完备的量子布雷顿热机<sup>[29]</sup>、制冷机<sup>[33]</sup>和量子卡诺热机<sup>[37]</sup>模型. 本文将在文献[26,29,34,36,44,71,72]的基础上, 建立以无相互作用谐振子系统为工质, 包含两个等温过程和两个绝热过程的不可逆量子卡诺热机循环模型, 考虑了热源与工质间热阻、绝热过程中量子“非绝热”现象导致的内摩擦和高、低温热源之间旁通热漏, 分析和优化该循环的生态学性能. 本文结果具有一定的普适性与包容性, 对实际量子热机的设计工作具有一定的理论指导意义.

## 1 谐振子系统中的热力学第一定律

根据量子力学理论, 无相互作用谐振子系统的 Hamilton 算符可以表示为<sup>[73]</sup>

$$\hat{H}_S = \hbar\omega\hat{N} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a}, \quad (1)$$

式中  $\omega$  为谐振子圆频率,  $\hat{a}^+$  和  $\hat{a}$  分别为谐振子占有数产生算符和湮灭算符, 满足对易关系  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ ,  $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$  为粒子数(占有数)算符,  $\hbar$  为 Planck 常数.

谐振子系统的能量为

$$E_S = \langle \hat{H}_S \rangle = \hbar\omega(t) \langle \hat{N} \rangle = \hbar\omega(t)n, \quad (2)$$

式中  $n = \langle \hat{N} \rangle$  为平均粒子数, 由量子统计力学, 谐振子系统的平均粒子数表达式为<sup>[74]</sup>

$$n = 1/(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1), \quad (3)$$

式中  $k_B$  为 Boltzmann 常数,  $T$  为绝对温度.

海森堡表象中, 任意算符  $\hat{X}$  的时间演化方程为<sup>[23]</sup>

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{X}] + \frac{\partial \hat{X}}{\partial t} + L_D \hat{X}, \quad (4)$$

式中  $L_D \hat{X}$  是逸散项, 取决于外热源和谐振子系统之间的耦联作用.

在(4)式中, 取  $\hat{X} = \hat{H}_S = \hbar\omega\hat{N}$ , 可得谐振子系统能量变化率:

$$\frac{dE_S}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \hat{H}_S \rangle = \hbar \frac{d\omega}{dt} \langle \hat{N} \rangle + \hbar\omega \langle L_D(\hat{N}) \rangle. \quad (5)$$

(5)式右侧第一项

$$\hbar \frac{d\omega}{dt} \langle \hat{N} \rangle = \hbar n \dot{\omega} = \frac{dW}{dt} \quad (6)$$

是粒子数分布不变而能级改变引起的内能变化, 对应于系统与外界单位时间内交换的功. 右侧第二项

$$\hbar\omega \langle L_D(\hat{N}) \rangle = \hbar\omega \dot{n} = \frac{dQ}{dt} \quad (7)$$

是能级不变而粒子数分布改变引起的内能变化, 对应于系统与外热源间的热流.

## 2 不可逆谐振子卡诺热机模型

不可逆谐振子卡诺热机工质为无相互作用谐振子系统, 图 1 为不可逆谐振子卡诺热机循环中平均粒子数和谐振子圆频率的关系示意图. 循环由两个等

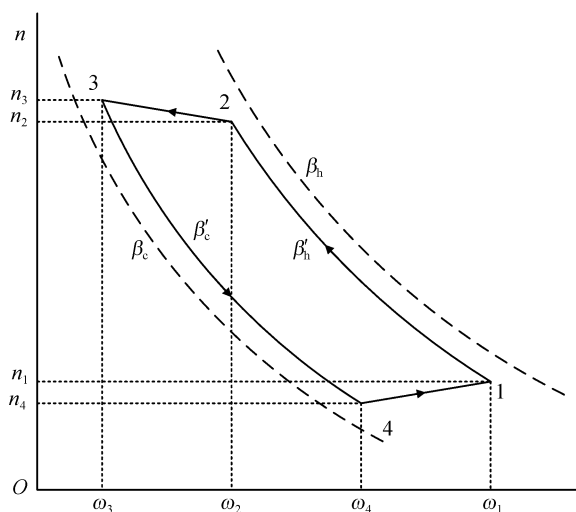


图 1 不可逆谐振子卡诺热机循环图

温过程和两个不可逆绝热过程组成. 热机工作于温度分别为  $T_h$  和  $T_c$  的两热源  $B_h$  和  $B_c$  间. 设热源热容很大, 内部弛豫很强, 工质对它们扰动可以忽略, 热源可近似作为平衡态. 在两个等温过程中, 工质内部温度分别为  $T'_h$  和  $T'_c$ . 为表述方便, 令  $\beta_i = 1/(k_B T_i)$ , 下文称  $\beta$  而不是  $T$  为“温度”. 则由热力学第二定律, 对于热机循环有:  $\beta_c > \beta'_c > \beta'_h > \beta_h$ , 其中  $\beta'_h$  和  $\beta'_c$  分别为等温过程  $1 \rightarrow 2$  和  $3 \rightarrow 4$  中工质系统的“温度”. 本文不考虑工质系统的玻色-爱因斯坦凝聚, 即设  $\beta'_c < \beta_c$ , 其中  $\beta_c = 1/(k_B T_c)$ ,  $T_c$  为临界温度. 也不考虑相对论效应.

在等温过程  $1 \rightarrow 2$  中, 工质系统与热源相耦联产生热量交换, 由(7)式可得传热过程中工质吸热量为

$$Q_h = \hbar \int_{n_1}^{n_2} \omega dn = \int_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\beta'_h} \ln \left( \frac{1}{n} + 1 \right) dn$$

$$= \frac{1}{\beta'_h} \left( n_2 \ln \frac{1+n_2}{n_2} - n_1 \ln \frac{1+n_1}{n_1} + \ln \frac{1+n_2}{1+n_1} \right), \quad (8)$$

式中  $n_1 = 1/(e^{\hbar\beta'_h\omega_1} - 1)$  和  $n_2 = 1/(e^{\hbar\beta'_h\omega_2} - 1)$  分别为工质系统在状态点 1 和 2 的粒子占有数. 由(6)式可得在该过程中系统对外界环境做功为

$$W_{12} = -\hbar \int_{\omega_1}^{\omega_2} n d\omega = \frac{1}{\beta'_h} \ln \frac{e^{\hbar\beta'_h\omega_1} - 1}{e^{\hbar\beta'_h\omega_2} - 1} + \hbar(\omega_2 - \omega_1). \quad (9)$$

对于绝热过程  $2 \rightarrow 3$  和  $4 \rightarrow 1$ , 工质系统与热源不相耦联, 为热力学绝热过程. 但根据量子绝热理论,

如果谐振子圆频率在此过程中随时间变化不是极为缓慢的, 不满足量子绝热近似条件<sup>[48,73]</sup>, 就会产生量子“非绝热”现象, 导致在绝热过程中工质系统粒子数的改变. 根据(7)式, 系统内部会产生热量, 而在此过程中, 系统和外界热源没有热量交换, 因此还称此过程为绝热过程. 这一量子“非绝热”现象对量子热机循环的影响类似于经典热机的内摩擦损耗, 因此假设在绝热过程中工质系统存在内摩擦; 但考虑到传热过程进行较绝热过程缓慢, 假设在传热过程中工质系统内部不存在内摩擦. 分别设绝热过程  $2 \rightarrow 3$  和  $4 \rightarrow 1$  所用时间为  $\tau_a$  和  $\tau_b$ , 设谐振子圆频率  $\omega$  随时间  $t$  线性变化:

$$\omega(t) = \omega(0) + \dot{\omega}t, \quad (10)$$

设绝热过程中谐振子系统的粒子数变化率为<sup>[36]</sup>

$$\dot{n} = \left( \frac{\mu}{t'} \right)^2, \quad (11)$$

式中  $\mu$  为内摩擦系数,  $t'$  为过程经历的时间. 则粒子数随时间的变化关系为

$$n(t) = n(0) + \left( \frac{\mu}{t'} \right)^2 t. \quad (12)$$

在(12)式中, 分别取  $t = \tau_a$  和  $t = \tau_b$  可得

$$n_2 = n_3 - \frac{\mu^2}{\tau_a}, \quad n_4 = n_1 - \frac{\mu^2}{\tau_b}, \quad (13)$$

式中  $n_3 = 1/(e^{\hbar\beta'_c\omega_3} - 1)$  和  $n_4 = 1/(e^{\hbar\beta'_c\omega_4} - 1)$  分别为工质系统在状态点 3 和 4 的粒子占有数.

联立(3)和(13)式可得

$$\omega_2 = \frac{1}{\hbar\beta'_h} \ln \frac{\tau_a e^{\hbar\beta'_c\omega_3} - \mu^2(e^{\hbar\beta'_c\omega_3} - 1)}{\tau_a - \mu^2(e^{\hbar\beta'_c\omega_3} - 1)}, \quad (14)$$

$$\omega_4 = \frac{1}{\hbar\beta'_c} \ln \frac{\tau_b e^{\hbar\beta'_h\omega_1} - \mu^2(e^{\hbar\beta'_h\omega_1} - 1)}{\tau_b - \mu^2(e^{\hbar\beta'_h\omega_1} - 1)}. \quad (15)$$

由(5), (10)和(12)式可得在  $2 \rightarrow 3$  过程中系统对外界环境做功为

$$W_{23} = -\hbar \int_0^{\tau_a} n d\omega - \hbar \int_0^{\tau_a} \omega dn$$

$$= \hbar(\omega_2 - \omega_3) \left( n_3 - \frac{\mu^2}{2\tau_a} \right) - \hbar \frac{\mu^2(\omega_3 + \omega_2)}{2\tau_a}, \quad (16)$$

$4 \rightarrow 1$  过程中系统对外界环境做功为

$$W_{41} = -\hbar \int_0^{\tau_b} n d\omega - \hbar \int_0^{\tau_b} \omega dn$$

$$= \hbar(\omega_4 - \omega_1) \left( n_1 - \frac{\mu^2}{2\tau_b} \right) - \hbar \frac{\mu^2(\omega_4 + \omega_1)}{2\tau_b}. \quad (17)$$

由上可知在绝热过程中系统对外界做功可分为两部分, 一是由于圆频率  $\omega$  的减少, 外界对系统做功, 另一部分是量子非绝热现象导致粒子数  $n$  的增加即克服摩擦力所做的功。

对等温过程  $3 \rightarrow 4$ , 由(7)式可有传热过程中工质放热量为

$$Q_c = -\hbar \int_{n_3}^{n_4} \omega dn = -\int_{n_3}^{n_4} \frac{1}{\beta'_c} \ln \left( \frac{1}{n} + 1 \right) dn$$

$$= \frac{1}{\beta'_c} \left( n_3 \ln \frac{1+n_3}{n_3} - n_4 \ln \frac{1+n_4}{n_4} + \ln \frac{1+n_3}{1+n_4} \right). \quad (18)$$

由(6)式可知在该过程中系统对外界环境做功为

$$W_{34} = -\hbar \int_{\omega_3}^{\omega_4} n d\omega = \frac{1}{\beta'_c} \ln \frac{e^{\hbar\beta'_c\omega_3} - 1}{e^{\hbar\beta'_c\omega_4} - 1} + \hbar(\omega_4 - \omega_3). \quad (19)$$

除了热阻和内摩擦外, 设高、低温热源间还存在直接的旁通热漏。

本文的模型类似于考虑热阻、热漏和内不可逆性的经典不可逆卡诺热机循环<sup>[5,63,75~78]</sup>。

### 3 循环周期

要得到传热过程进行的时间, 须解出粒子数随时间的演化方程。根据量子半群理论, (4)式中的逸散项可以写为

$$L_D \hat{X} = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left( \hat{Q}_{\alpha}^+ [\hat{X}, \hat{Q}_{\alpha}] + [\hat{Q}_{\alpha}^+, \hat{X}] \hat{Q}_{\alpha} \right), \quad (20)$$

式中  $\hat{Q}_{\alpha}^+$  和  $\hat{Q}_{\alpha}$  分别是定义在系统希尔伯特空间的算符和对应的厄米共轭算符,  $\gamma_{\alpha}$  是正的唯一象系数。

联立(4)和(20)式, 并取  $\hat{Q}_{\alpha}^+ = \hat{a}^+$ ,  $\hat{Q}_{\alpha} = \hat{a}$ , 有

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = i\omega [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{X}] + \frac{\partial \hat{X}}{\partial t} + \gamma_+ \left( \hat{a} [\hat{X}, \hat{a}^+] + [\hat{a}, \hat{X}] \hat{a}^+ \right) + \gamma_- \left( \hat{a}^+ [\hat{X}, \hat{a}] + [\hat{a}^+, \hat{X}] \hat{a} \right). \quad (21)$$

对(21)式取  $\hat{X} = \hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ , 利用对易关系  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ ,

$[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$ ,  $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ , 取平均值可得

$$\dot{n} = d\langle \hat{N} \rangle / dt = \langle L_D \hat{N} \rangle = -2(\gamma_- - \gamma_+)n + 2\gamma_+. \quad (22)$$

对(22)式积分可得

$$n = n_e + (n_0 - n_e)e^{-2(\gamma_- - \gamma_+)t}, \quad (23)$$

式中  $n_0$  是  $n$  的初始值,  $n_e = \gamma_+ / (\gamma_- - \gamma_+)$  是  $n$  的渐近稳定值(即  $t \rightarrow \infty$  时,  $n$  的值)。在等温过程中,  $n_e$  应满足热力学平衡态的统计分布规律。对于等温传热过程  $1 \rightarrow 2$  和  $3 \rightarrow 4$  分别有

$$n_e = \frac{1}{e^{\hbar\beta'_j\omega} - 1}, \quad (24)$$

式中  $j = h, c$  分别对应等温过程  $1 \rightarrow 2$  和  $3 \rightarrow 4$ 。与式  $n_e = \gamma_+ / (\gamma_- - \gamma_+)$  相比较可得

$$\gamma_+ = a e^{q\hbar\beta'_j\omega}, \quad (25)$$

$$\gamma_- = a e^{(1+q)\hbar\beta'_j\omega}, \quad (26)$$

式中  $a, q$  均为常数。因为  $\gamma_+, \gamma_- > 0$ , 要求  $a > 0$ ;  $\beta'_j\omega \rightarrow \infty$  时,  $\gamma_+ \rightarrow 0$ ,  $\gamma_- \rightarrow \infty$ , 要求  $0 > q > -1$ 。

将(25)和(26)式代入(22)式可得

$$\dot{n} = \frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = -2a e^{q\hbar\beta'_j\omega} [(e^{\hbar\beta'_j\omega} - 1)n - 1], \quad j = h, c. \quad (27)$$

因为

$$\dot{n} = \frac{dn}{d\omega} \times \frac{d\omega}{dt}, \quad (28)$$

可知等温传热过程  $1 \rightarrow 2$  和  $3 \rightarrow 4$  历经的时间分别为

$$\tau_h = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dn/d\omega}{\dot{n}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{\ln[(n_2+1)/n_2]}^{\ln[(n_1+1)/n_1]} \frac{dm}{e^{q\alpha_h m} (e^m - e^{\alpha_h m}) (1 - e^{-m})}, \quad (29)$$

$$\tau_c = \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{dn/d\omega}{\dot{n}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{\ln[(n_4+1)/n_4]}^{\ln[(n_3+1)/n_3]} \frac{dm'}{e^{q\alpha_c m'} (e^{\alpha_c m'} - e^{m'}) (1 - e^{-m'})}, \quad (30)$$

式中  $m = \hbar\beta'_h\omega$ ,  $m' = \hbar\beta'_c\omega$ ,  $\alpha_h = \beta_h / \beta'_h < 1$ ,  $\alpha_c = \beta_c / \beta'_c > 1$ 。

故有循环周期为

$$\tau = \tau_a + \tau_b + \tau_h + \tau_c$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{\hbar\beta'_h\omega_2}^{\hbar\beta'_h\omega_1} \frac{dm}{e^{q\alpha_h m} (e^{\alpha_h m} - e^m) (1 - e^{-m})}$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{\hbar\beta'_c\omega_4}^{\hbar\beta'_c\omega_3} \frac{dm'}{e^{q\alpha_c m'} (e^{\alpha_c m'} - e^{m'}) (1 - e^{-m'})} + \tau_a + \tau_b. \quad (31)$$

考虑高温热源与低温热源间的热漏。高、低温热源分别为热声子系统  $B_h$  和  $B_c$ , 热漏是两热源经热机的偶联而产生。设  $\omega_h(t)$  和  $\omega_c(t)$  分别为高、低温热源

的热声子频率,  $\hat{b}_h^+$ ,  $\hat{b}_h^-$ ,  $\hat{b}_c^+$  和  $\hat{b}_c^-$  分别为高、低温热源热声子的产生算符和湮灭算符,  $n_c = 1/(e^{\hbar\omega_c\beta_c} - 1)$  为低温热源的热声子占有数, 类似以上工质与热源耦合的计算, 在热扰动不大的假设下, 可得

$$\dot{n}_c = -2ce^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c}[(e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c - 1], \quad (32)$$

式中  $c$  和  $\lambda$  为常数. 联立(7)和(32)式可得高温热源流向低温热源的热流(即热漏率)为<sup>[6,26]</sup>

$$\dot{Q}_c = C_e \hbar \omega_c \dot{n}_c = 2C_e c \hbar \omega_c e^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c} [1 - (e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c], \quad (33)$$

式中  $C_e$  为描述热漏大小的无量纲系数. 根据热源模型的假设, 两热源均可看为近似平衡态, 即  $\omega_c$ ,  $\beta_h$  和  $\beta_c$  均可视为常数, 可知  $\dot{Q}_c$  为常数. 在一个周期中, 热漏量为

$$Q_c = \dot{Q}_c \tau = 2C_e c \hbar \omega_c e^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c} [1 - (e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c] \tau. \quad (34)$$

#### 4 不可逆谐振子卡诺热机一些重要的性能参数及分析

联立(9), (16), (17)和(19)式, 可得每循环热机对外界环境做功为

$$\begin{aligned} W &= \oint dW = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= \frac{1}{\beta'_h} \ln \frac{n_3 \tau_a - \mu^2}{n_1 \tau_a} + \frac{1}{\beta'_c} \ln \frac{n_1 \tau_b - \mu^2}{n_3 \tau_b} - \hbar(\omega_3 - \omega_2) \\ &\quad \times (1 + n_3) - \hbar(\omega_1 - \omega_4)(1 + n_1) - \hbar \mu^2 \left( \frac{\omega_2}{\tau_a} + \frac{\omega_4}{\tau_b} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

联立(31)和(35)式可得热机输出功率为

$$\begin{aligned} P &= W/\tau \\ &= \left[ \frac{1}{\beta'_h} \ln \frac{n_3 \tau_a - \mu^2}{n_1 \tau_a} + \frac{1}{\beta'_c} \ln \frac{n_1 \tau_b - \mu^2}{n_3 \tau_b} \right. \\ &\quad - \hbar(\omega_3 - \omega_2)(1 + n_3) - \hbar(\omega_1 - \omega_4)(1 + n_1) \\ &\quad \left. - \hbar \mu^2 \left( \frac{\omega_2}{\tau_a} + \frac{\omega_4}{\tau_b} \right) \right] \tau^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

(8), (34)式与(35)式联立可得热机效率为

$$\begin{aligned} \eta &= W/(Q_h + Q_c) \\ &= \left[ \frac{1}{\beta'_h} \ln \frac{n_3 \tau_a - \mu^2}{n_1 \tau_a} + \frac{1}{\beta'_c} \ln \frac{n_1 \tau_b - \mu^2}{n_3 \tau_b} \right. \\ &\quad \left. - \hbar(\omega_1 - \omega_4)(1 + n_1) - \hbar \mu^2 \left( \frac{\omega_2}{\tau_a} + \frac{\omega_4}{\tau_b} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. - \hbar(\omega_3 - \omega_2)(1 + n_3) \right] \\ &\times \left\{ \frac{1}{\beta'_h} \left( n_2 \ln \frac{1 + n_2}{n_2} - n_1 \ln \frac{1 + n_1}{n_1} + \ln \frac{1 + n_2}{1 + n_1} \right) \right. \\ &\left. + 2C_e c \hbar \omega_c e^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c} [1 - (e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c] \tau \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

热机的熵产率为

$$\begin{aligned} \sigma &= [Q_c \beta_c k_B - Q_h \beta_h k_B + Q_e k_B (\beta_c - \beta_h)]/\tau \\ &= \left[ \frac{\beta_c k_B}{\beta'_c} \left( n_3 \ln \frac{1 + n_3}{n_3} - n_4 \ln \frac{1 + n_4}{n_4} + \ln \frac{1 + n_3}{1 + n_4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_h k_B}{\beta'_h} \left( n_2 \ln \frac{1 + n_2}{n_2} - n_1 \ln \frac{1 + n_1}{n_1} + \ln \frac{1 + n_2}{1 + n_1} \right) \right] \tau^{-1} \\ &\quad + 2C_e c \hbar k_B \omega_c e^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c} [1 - (e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c] (\beta_c - \beta_h), \end{aligned} \quad (38)$$

则有生态学目标函数为

$$\begin{aligned} E &= P - \sigma/(k_B \beta_0) \\ &= \left[ \frac{\beta_h}{\beta_0 \beta'_h} \left( n_2 \ln \frac{1 + n_2}{n_2} - n_1 \ln \frac{1 + n_1}{n_1} + \ln \frac{1 + n_2}{1 + n_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_c}{\beta_0 \beta'_c} \left( n_3 \ln \frac{1 + n_3}{n_3} - n_4 \ln \frac{1 + n_4}{n_4} + \ln \frac{1 + n_3}{1 + n_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta'_h} \ln \frac{n_3 \tau_a - \mu^2}{n_1 \tau_a} + \frac{1}{\beta'_c} \ln \frac{n_1 \tau_b - \mu^2}{n_3 \tau_b} - \hbar \mu^2 \left( \frac{\omega_2}{\tau_a} + \frac{\omega_4}{\tau_b} \right) \right. \\ &\quad \left. - \hbar(\omega_3 - \omega_2)(1 + n_3) - \hbar(\omega_1 - \omega_4)(1 + n_1) \right] \tau^{-1} \\ &\quad - 2C_e c \hbar \omega_c e^{\lambda\hbar\beta_h\omega_c} [1 - (e^{\hbar\beta_h\omega_c} - 1)n_c] (\beta_c - \beta_h)/\beta_0, \end{aligned} \quad (39)$$

式中  $\beta_0 = 1/(k_B T_0)$ ,  $T_0$  为环境温度.

由(36), (37)和(39)式可知, 对于给定  $\beta_h$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_0$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_h$ ,  $C_e$ ,  $\mu$ , 热机输出功率、效率和生态学目标函数均是  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的函数, 但由于循环周期  $\tau$  的表达式中积分式无法给出解析式, (36)~(39)式均含有无解析式的积分式, 无法给出生态学目标函数与效率、功率间的最优关系式, 只能在给定一些参量条件下通过数值计算的方法求得输出功率、效率和生态学目标函数值的最大值. 图 2 是  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的三维关系, 其中  $E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  为内可逆情况下热机生态学函数最大值. 计算中取  $a = c = 2$ ,  $q = \lambda = -0.5$ ,  $\beta_h = 1/(2k_B)$ ,  $\beta_c = 1/k_B$ ,  $\beta_0 = 1/(0.5k_B)$ ,



$\tau_a = \tau_b = 0.01$ ,  $\omega_1 = 4 \times 10^{10}$ ,  $\omega_3 = 1.5 \times 10^{10}$ ,  $\omega_c = 1 \times 10^{10}$ ,  $\mu = 0.03$ ,  $C_e = 0.005$ . 从图2可以看出, 给定高、低温热源“温度”和其他参数时, 在热机循环两个等温过程中工质“温度” $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  存在唯一的一组最佳值, 使得生态学目标函数达到极大值, 对应热机最佳生态学性能. 另外从图2可以看出  $\beta'_h$  (或  $\beta'_c$ ) 给定时,  $\beta'_c$  (或  $\beta'_h$ ) 存在一个最佳值, 使得生态学目标函数达到极值, 且此时  $\beta'_c$  (或  $\beta'_h$ ) 较接近热源“温度” $\beta_c$  (或  $\beta_h$ ).

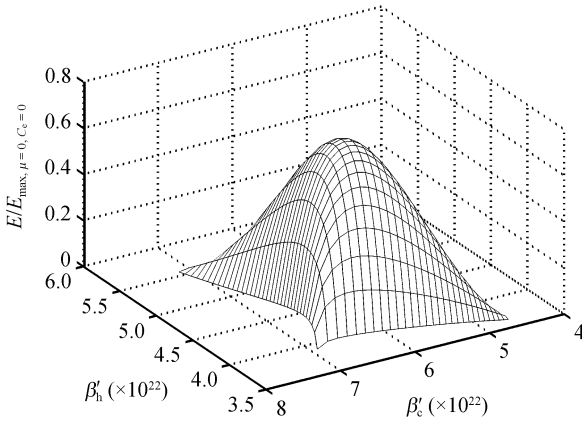


图2  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的三维关系

## 5 经典极限下不可逆谐振子卡诺热机生态学性能优化

当两热源的“温度”较高时, 对应经典极限, 此时有  $\hbar\beta\omega \ll 1$ . 利用(14)和(15)式取一级近似, 可以简化热机循环的特性参数, (8), (18), (35)和(34)式可以简化为

$$Q_h \approx [\ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) - \ln(\omega_3 / \omega_1)] / (xy), \quad (40)$$

$$Q_c \approx [\ln(\omega_1 / \omega_3) - \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b)] / y, \quad (41)$$

$$W = [\ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) + x \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b) - (1-x) \ln(\omega_3 / \omega_1)] (xy)^{-1}, \quad (42)$$

$$\dot{Q}_e \approx C_e [2\hbar\omega_c (1 + \lambda\hbar\beta_h\omega_c) / \beta_c] (\beta_c - \beta_h) = C_e \alpha (\beta_c - \beta_h), \quad (43)$$

以上各式中  $\alpha = 2\hbar\omega_c (1 + \lambda\hbar\beta_h\omega_c) / \beta_c$ ,  $x = \beta'_h / \beta'_c$ ,  $y = \beta'_c$ , 以下各式同.

在循环周期的计算中, 由(29)~(31)式在经典极限下取二级近似可得

$$\tau_h \approx (n_2 - n_1) / [2a(1 - \alpha_h)]$$

$$= \frac{1}{2a\hbar(xy - \beta_h)} \left( \frac{x}{\omega_3} - \frac{1}{\omega_1} - \frac{\hbar xy \mu^2}{\tau_a} \right), \quad (44)$$

$$\tau_c \approx (n_3 - n_4) / [2a(\alpha_c - 1)] = \frac{1}{2a\hbar(\beta_c - y)} \left( \frac{1}{\omega_3} - \frac{1}{x\omega_1} + \frac{\hbar y \mu^2}{\tau_b} \right), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \left[ \hbar x^2 y^2 \omega_3 \mu^2 (\tau_a + \tau_b) - \hbar x^2 y \beta_c \omega_3 \mu^2 \tau_b \right. \\ & + x^2 \beta_c \tau_a \tau_b - x \tau_a \tau_b (\beta_c (\omega_3 / \omega_1) + \beta_h) \\ & \left. - \hbar xy \beta_h \omega_3 \mu^2 \tau_a + \beta_h \tau_a \tau_b (\omega_3 / \omega_1) \right] \\ & \times [2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b x (xy - \beta_h) (\beta_c - y)]^{-1} + \tau_a + \tau_b. \end{aligned} \quad (46)$$

利用(40)~(43)和(46)式, 在经典极限下(36)~(39)式对应各热机性能参数可简化为

$$\begin{aligned} P = & \{ 2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b (xy - \beta_h) (\beta_c - y) [x \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b) + \ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) \\ & - (1-x) \ln(\omega_3 / \omega_1)] \} \times \{ \hbar x^2 y^3 \omega_3 (\tau_a + \tau_b) \\ & \times (\mu^2 - 2a\tau_a \tau_b) - \hbar x^2 y^2 \beta_c \omega_3 \tau_b [\mu^2 - 2a\tau_a (\tau_a + \tau_b)] + x^2 y \beta_c \tau_a \tau_b - \hbar xy^2 \beta_h \omega_3 \tau_a [\mu^2 \\ & - 2a\tau_b (\tau_a + \tau_b)] - xy \tau_a \tau_b [\beta_c (\omega_3 / \omega_1) + \beta_h \\ & + 2a\hbar \beta_h \beta_c \omega_3 (\tau_a + \tau_b)] + y \beta_h \tau_a \tau_b (\omega_3 / \omega_1) \}^{-1}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \eta = & 1 - [-x \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b) - x \ln(\omega_3 / \omega_1) \\ & + xy C_e \alpha (\beta_c - \beta_h) \tau] \times [\ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) \\ & - \ln(\omega_3 / \omega_1) + xy C_e \alpha (\beta_c - \beta_h) \tau]^{-1}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & [k_B (\beta_h - x \beta_c) \ln(\omega_3 / \omega_1) - \beta_h k_B \ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) \\ & - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a - x \beta_c k_B \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b)] (xy \tau)^{-1} + C_e \alpha k_B (\beta_c - \beta_h)^2, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} E = & \{ 2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b (xy - \beta_h) (\beta_c - y) [(1 + \beta_c / \beta_0) x \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1 / \tau_b) \\ & + (1 + \beta_h / \beta_0) \ln(x - \hbar xy \mu^2 \omega_3 / \tau_a) \\ & - (1 + \beta_h / \beta_0 - x - x \beta_c / \beta_0) \ln(\omega_3 / \omega_1)] \} \\ & \times \{ \hbar x^2 y^3 \omega_3 (\tau_a + \tau_b) (\mu^2 - 2a\tau_a \tau_b) \\ & - \hbar x^2 y^2 \beta_c \omega_3 \tau_b [\mu^2 - 2a\tau_a (\tau_a + \tau_b)] \\ & + x^2 y \beta_c \tau_a \tau_b - \hbar xy^2 \beta_h \omega_3 \tau_a [\mu^2 - 2a\tau_b (\tau_a + \tau_b)] \\ & - xy \tau_a \tau_b [\beta_c (\omega_3 / \omega_1) + \beta_h + 2a\hbar \beta_h \beta_c \omega_3 (\tau_a + \tau_b)] \\ & + y \beta_h \tau_a \tau_b (\omega_3 / \omega_1) \}^{-1} - C_e \alpha (\beta_c - \beta_h)^2 / \beta_0. \end{aligned} \quad (50)$$

在经典极限下, 对于(47)~(50)式, 仍难通过解析的方法分析各参数对热机生态学性能的影响和生态学目标函数与其他特性参数间的最优关系式, 故在以下的分析中采用数值计算的方法. 计算中取  $a=2$ ,  $c=2$ ,  $\lambda=-0.5$ ,  $\beta_h=1/(1000k_B)$ ,  $\beta_c=1/(320k_B)$ ,  $\beta_0=1/(300k_B)$ ,  $\tau_a=\tau_b=0.01$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\omega_1=1\times 10^{13}$ ,  $\omega_3=1.2\times 10^{12}$ ,  $\omega_c=1.1\times 10^{12}$ ,  $C_e=0.02$ , 可得  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的三维关系, 如图 3,  $E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  为内可逆情况下热机生态学函数最大值. 比较图 2 和图 3 可以看出, 经典极限下,  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的三维关系与未取经典时的关系类似. 高、低温热源“温度”和其他参数给定时, 工质“温度” $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  存在唯一的一组最佳值, 使得生态学目标函数达到极大值. 另外从图 3 可以看出给定  $\beta'_h$  (或  $\beta'_c$ ) 时,  $\beta'_c$  (或  $\beta'_h$ ) 存在一个最佳值, 使得生态学目标函数达到极值, 且此时  $\beta'_c$  (或  $\beta'_h$ ) 较接近热源“温度” $\beta_c$  (或  $\beta_h$ ).

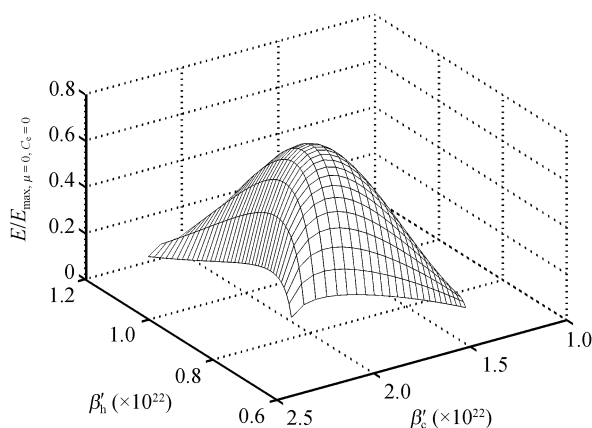


图 3  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\beta'_h$ ,  $\beta'_c$  的三维关系

根据(50)式和极值条件  $(\partial E/\partial x)_y = 0$  可得

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_y = \frac{E_1}{U^2} + \frac{E_2 + E_3}{U} = 0, \quad (51)$$

式中

$$\begin{aligned} U = & \hbar x^2 y^3 \omega_3 (\tau_a + \tau_b) (\mu^2 - 2a\tau_a \tau_b) \\ & - \hbar x^2 y^2 \beta_c \omega_3 \tau_b [\mu^2 - 2a\tau_a (\tau_a + \tau_b)] \\ & + x^2 y \beta_c \tau_a \tau_b - \hbar x y^2 \beta_h \omega_3 \tau_a [\mu^2 - 2a\tau_b (\tau_a + \tau_b)] \\ & + y \beta_h \tau_a \tau_b (\omega_3/\omega_1) - x y \tau_a \tau_b [\beta_h + \beta_c (\omega_3/\omega_1) \\ & + 2a\hbar \beta_h \beta_c \omega_3 (\tau_a + \tau_b)], \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} E_1 = & -2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b (xy - \beta_h) (\beta_c - y) [x(1 + \beta_c/\beta_0) \\ & \times \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1/\tau_b) + (1 + \beta_h/\beta_0) \ln(x \\ & - \hbar x y \mu^2 \omega_3/\tau_a) - \ln(\omega_3/\omega_1) (1 + \beta_h/\beta_0 - x \\ & - x \beta_c/\beta_0)] \times \{ 2\hbar x y^3 \omega_3 (\tau_a + \tau_b) (\mu^2 - 2a\tau_a \tau_b) \\ & - 2\hbar x y^2 \beta_c \omega_3 \tau_b [\mu^2 - 2a\tau_a (\tau_a + \tau_b)] + 2x y \beta_c \tau_a \tau_b \\ & - \hbar y^2 \beta_h \omega_3 \tau_a [\mu^2 - 2a\tau_b (\tau_a + \tau_b)] - y \tau_a \tau_b [\beta_h \\ & + \beta_c (\omega_3/\omega_1) + 2a\hbar \beta_h \beta_c \omega_3 (\tau_a + \tau_b)] \}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & 2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b y (\beta_c - y) \{ x(1 + \beta_c/\beta_0) \ln(1/x \\ & - \hbar y \mu^2 \omega_1/\tau_b) + (1 + \beta_h/\beta_0) \ln(x - \hbar x y \mu^2 \omega_3/\tau_a) \\ & - (1 + \beta_h/\beta_0 - x - x \beta_c/\beta_0) \ln(\omega_3/\omega_1) \}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} E_3 = & 2a\hbar \omega_3 \tau_a \tau_b (xy - \beta_h) (\beta_c - y) [(1 \\ & + \beta_c/\beta_0) \ln(1/x - \hbar y \mu^2 \omega_1/\tau_b) \\ & - (1 + \beta_c/\beta_0)/(1 - \hbar x y \mu^2 \omega_1/\tau_b) \\ & + (1 + \beta_h/\beta_0)/x + (1 + \beta_c/\beta_0) \ln(\omega_3/\omega_1)]. \end{aligned} \quad (55)$$

(51)式给出了热机循环低温侧等温过程中工质“温度” $y$  和两个传热过程中工质“温比” $x$  间的优化关系.

由数值计算方法求解(51)式, 由(47)和(50)式可得  $E$ - $P$  优化关系, 如图 4 和 5 所示, 计算中除了  $\mu$  和  $C_e$ , 其他参量取值与图 3 相同,  $P_{\max, \mu=0, C_e=0}$  为内可逆情况下热机的最大输出功率. 从图 4 可以看出,  $E$ - $P$  优化关系曲线为扭叶型, 存在一个生态学函数极大值点和一个输出功率极大值点. 另外随着内摩擦的增加, 热机的最大生态学函数值和最大输出功率都变小. 从图 5 可以看出, 热漏不影响热机的输出功率, 但使生态学函数值变小.

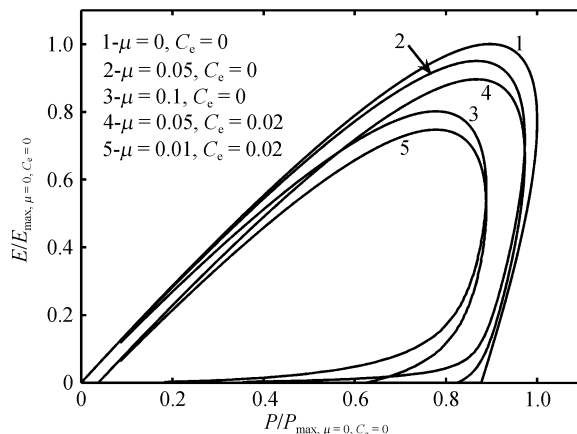


图 4 不同  $\mu$ ,  $C_e$  下  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $P/P_{\max, \mu=0, C_e=0}$  的优化关系

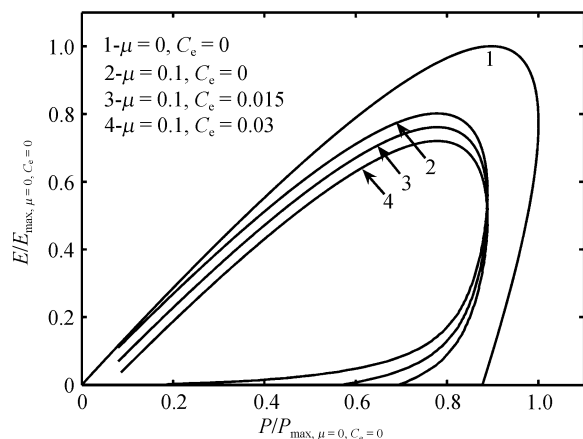


图5 不同 $\mu$ ,  $C_e$ 下  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $P/P_{\max, \mu=0, C_e=0}$  的优化关系

同样, 通过数值求解(51)式, 并根据(48)和(50)式可以得到  $E$ - $\eta$  优化关系曲线, 如图6和7所示, 计算中除了 $\mu$ 和 $C_e$ , 其他参量取值与图3相同. 从图6和7中可以看出  $C_e = 0$  时, 对不同的 $\mu$ 值,  $E$ - $\eta$  优化曲线的形状都为类抛物线型, 生态学函数对效率存在极大值, 且每一个生态学函数值(除极大值点外)对应两个效率取值, 显然, 要使热机工作效率对应较大的状态点.  $\mu$ 不改变曲线类型, 但随着 $\mu$ 的增大, 热机的生态学性能下降, 生态学函数所能达到的极大值变小; 当热机效率较低时,  $\mu$ 对生态学函数值的影响较小, 当热机效率较高时,  $\mu$ 的影响相对较大.  $C_e \neq 0$  时,  $E$ - $\eta$  优化曲线的形状为扭叶型, 存在一个生态学函数极大值点和一个效率极大值点, 内摩擦系数 $\mu$ 一定

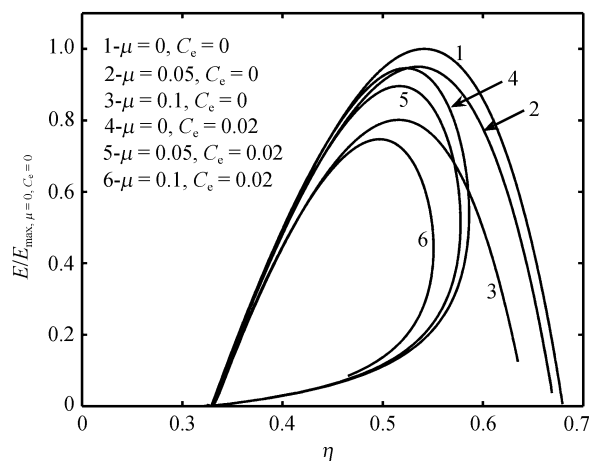


图6 不同 $\mu$ ,  $C_e$ 下  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\eta$  的优化关系

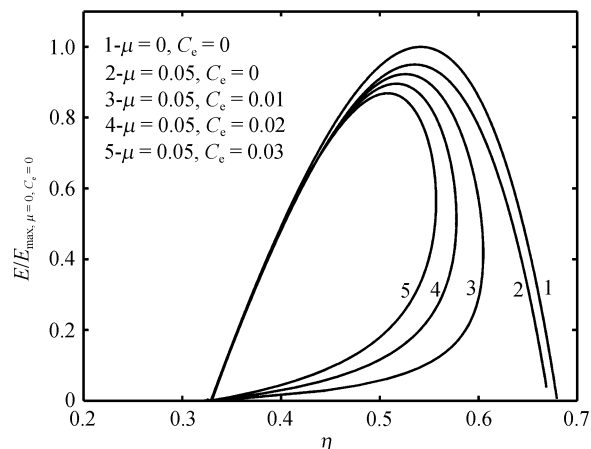


图7 不同 $\mu$ ,  $C_e$ 下  $E/E_{\max, \mu=0, C_e=0}$  与  $\eta$  的优化关系

时, 随 $C_e$ 的增大, 生态学函数和效率能达到的极大值变小.

利用(47)~(50)式, 可以得到  $P_E/P_{\max}$ ,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E/[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  和  $\eta_E/\eta_P$  随内摩擦系数 $\mu$ 的变化关系, 如图8~10所示, 其中  $P_E$ ,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E$  和  $\eta_E$  分别为生态学函数值最大时的热机输出功率、熵损损失率和效率;  $P_{\max}$ ,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  和  $\eta_P$  分别为热机的最大输出功率及相应的熵损损失率和效率. 计算中除了 $\mu$ 和 $C_e$ , 其他参量取值与图3相同. 从图8可以看出不同 $C_e$ 取值对应曲线相互重合, 即  $P_E/P_{\max}$  不受热漏影响, 随 $\mu$ 的增大而减小, 且值小于1, 即以 $E$ 为目标函数优化时的输出功率 $P_E$ 相对热机的最大输出功率 $P_{\max}$ 有所降低, 且内摩擦越大降低越多. 从图9

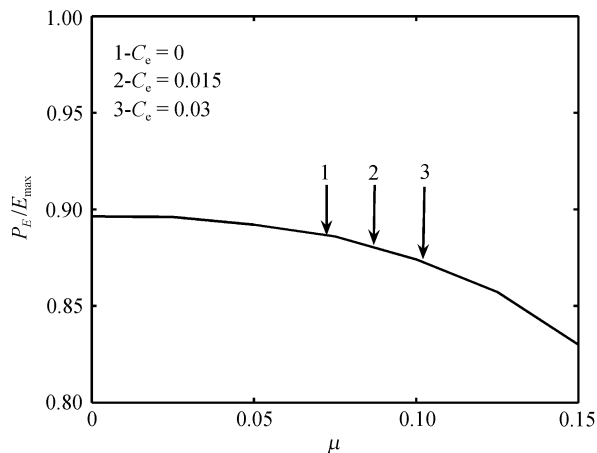
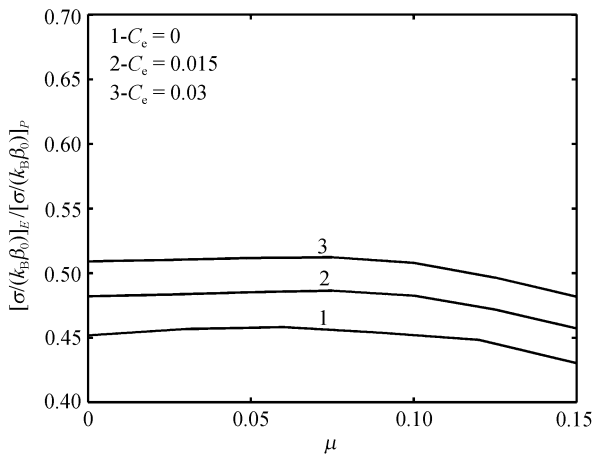
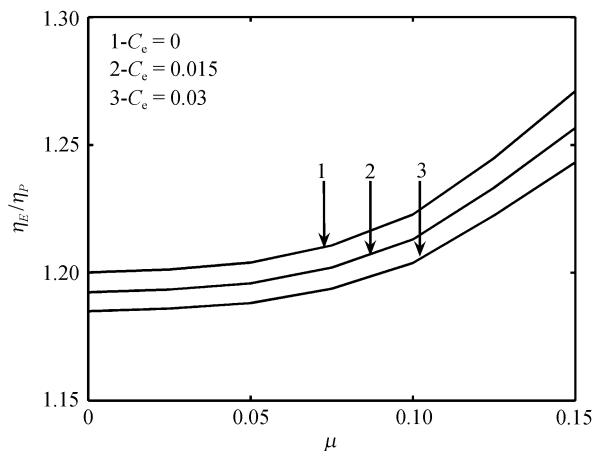


图8  $P_E/P_{\max}$  随 $\mu$ 的变化关系



图 9  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E/[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  随  $\mu$  的变化关系图 10  $\eta_E/\eta_P$  随  $\mu$  的变化关系

可看出,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E$  要比  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  小得多,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E/[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  受  $\mu$  的影响较小, 随着热漏  $C_e$  的增加,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E/[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  值变大,  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_E$  有接近于  $[\sigma/(k_B\beta_0)]_P$  的趋势. 从图 10 可以看出  $\eta_E$  大于  $\eta_P$ , 对给定  $C_e$ ,  $\eta_E/\eta_P$  随  $\mu$  的增大而增大, 但对于给定  $\mu$ ,  $\eta_E/\eta_P$  随  $C_e$  的增大而减小. 比较图 8~10 可知, 最大生态学函数值与最大输出功率

相比, 输出功率变小的量较小, 而熵损失率减小很多, 热机效率提升较大, 即以牺牲较小的输出功率, 降低了较多的熵损失率, 一定程度上提高了热机的效率. 因此生态学目标函数不仅反映了输出功率和熵产率之间的最佳折衷, 而且反映了输出功率和热效率之间的最佳折衷. 例如,  $\mu=0.1$ ,  $C_e=0.015$  时, 生态学函数值最大时输出功率相对热机最大输出功率减少了 12.6%, 效率提高了 21.3%, 而熵损失率减少了 51.7%.

## 6 结论

本文建立了以无相互作用谐振子系统为工质的不可逆量子卡诺热机循环模型. 该热机循环由两个等温过程和两个绝热过程组成; 考虑了两个绝热过程中不满足量子绝热近似条件时导致的量子“非绝热”现象, 类似经典热力学循环中的内摩擦损耗, 引入了内摩擦; 考虑了高、低温热源间的热漏. 根据量子主方程和量子半群方法, 分析了该量子热机的性能, 给出了输出功率、效率、熵产率和生态学函数, 并在经典极限下, 利用数值计算方法详细分析了热机生态学性能, 给出了生态学函数与输出功率、效率的优化关系, 并分析了热漏、内摩擦对热机生态学性能的影响. 在经典极限下比较了最大生态学函数值对应输出的功率、效率、熵损失率与最大输出功率及其对应的效率、熵损失率. 以生态学函数为优化目标时, 牺牲了小部分的功率, 较大的降低了循环的熵损失率, 一定程度上增加了循环的热效率, 反映出生态学目标是输出功率和熵损失率之间的折衷方案, 也是输出功率和循环热效率之间的一种折衷方案. 本文结果具有一定的普适性与包容性, 有助于加深理解谐振子系统量子热力学循环优化及其与经典热力学循环的区别和联系, 对经典热力学循环的分析和优化也有一定帮助和启发.

**致谢** 两位审稿人对本文提出了细心、无私和充满建设性的意见, 在此致以诚挚的谢意!

## 参考文献

- 1 Bejan A. Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes. J Appl Phys,

- 1996, 79(3): 1191—1218<sup>[DOI]</sup>
- 2 Berry R S, Kazakov V A, Sieniutycz S, et al. Thermodynamic Optimization of Finite Time processes. Chichester: Wiley, 1999
- 3 Chen L, Wu C, Sun F. Finite time thermodynamic optimization of entropy generation minimization of energy systems. J Non-Equilib Thermodyn, 1999, 24(4): 327—359<sup>[DOI]</sup>
- 4 Chen L, Sun F. Advances in Finite Time Thermodynamics: Analysis and Optimization. New York: Nova Science Publishers, 2004
- 5 陈林根. 不可逆过程和循环的有限时间热力学分析. 北京: 高等教育出版社, 2005
- 6 吴锋, 陈林根, 孙丰瑞, 等. 斯特林机的有限时间热力学优化. 北京: 化学工业出版社, 2008
- 7 伍文君, 陈林根, 孙丰瑞. 导热优化的“树网”构造法的改进. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2006, 36(7): 773—781
- 8 周圣兵, 陈林根, 孙丰瑞. 基于三角形单元体的气-固反应器构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2008, 38(5): 764—772
- 9 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 基于矩形单元体的以燃烧散最小为目标的“体点”导热构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(2): 278—285
- 10 魏曙寰, 陈林根, 孙丰瑞. 以燃烧散最小为目标的电磁体多学科构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(10): 1606—1613
- 11 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. 以燃烧散最小为目标的空腔几何构形优化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 待发表
- 12 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 液-固相变过程燃烧散最小化. 中国科学 E 辑: 技术科学, 待发表
- 13 宋汉江, 陈林根, 孙丰瑞. 辐射传热条件下一类内可逆热机最大效率时的最优构型. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 38(8): 1083—1096
- 14 李俊, 陈林根, 孙丰瑞. 复杂导热规律下有限高温热源热机循环的最优构型. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(2): 255—259
- 15 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下 Otto 循环热机活塞运动的最优路径. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(5): 698—708
- 16 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下具有非均匀工质的一类非回热不可逆热机最大输出功率. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(8): 1081—1089
- 17 夏丹, 陈林根, 孙丰瑞. 广义不可逆四源等温化学势变换器的最优性能. 中国科学 B 辑: 化学, 2008, 38(6): 492—503
- 18 舒礼伟, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热规律下热驱动二元分离过程的最小平均耗热量. 中国科学 B 辑: 化学, 2009, 39(2): 183—192
- 19 马康, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下光驱动发动机的最优路径. 中国科学 B 辑: 化学, 待发表
- 20 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 有限势库化学机最大输出功时循环最优构型. 中国科学 B 辑: 化学, 待发表
- 21 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 换热器燃烧散最小优化. 科学通报, 2009, 54(15): 2240—2246
- 22 谢志辉, 陈林根, 孙丰瑞. T 形腔燃烧散最小构形优化. 科学通报, 2009, 54(17): 2605—2612
- 23 Kosloff R. A quantum mechanical open system as a model of a heat engine. J Chem Phys, 1984, 80(4): 1625—1631<sup>[DOI]</sup>
- 24 Geva E, Kosloff R. A quantum-mechanical heat engine operating in finite time: a model consisting of spin-1/2 systems as the working fluid. J Chem Phys, 1992, 96(4): 3054—3067<sup>[DOI]</sup>
- 25 Geva E, Kosloff R. On the classical limit of quantum thermodynamics in finite time. J Chem Phys, 1992, 97(6): 4398—4412<sup>[DOI]</sup>
- 26 金晓昌, 吴锋, 孙丰瑞, 等. 经典极限下量子卡诺热机熵经济最优性能. 电站系统工程, 1996, 12(6): 42—45
- 27 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Finite-time exergoeconomic performance bound for a quantum Stirling engine. Int J Engng Sci, 2000, 38(2): 239—247<sup>[DOI]</sup>
- 28 Lin B, Chen J. Performance analysis of an irreversible quantum heat engine working with harmonic oscillators. Phys Rev E, 2003, 67(4): 046105<sup>[DOI]</sup>
- 29 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Optimization criteria for an irreversible quantum Brayton engine with an ideal Bose gas. J Appl Phys, 2006, 99(5): 054904<sup>[DOI]</sup>
- 30 王建辉, 何济洲, 毛之远. 谐振子系统量子热机循环性能. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2006, 36(6): 591—605
- 31 何济洲, 何弦, 唐威. 不可逆谐振子量子奥托制冷循环性能特征. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(8): 1046—1051
- 32 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Performance and optimization criteria of forward and reverse quantum Stirling cycles. Energy Convers Mgmt, 1998, 39(8): 733—739<sup>[DOI]</sup>
- 33 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Optimal performance of an irreversible quantum Brayton refrigerator with ideal Bose gases. Phys Scr, 2006, 73(5): 452—457<sup>[DOI]</sup>
- 34 吴锋, 陈林根, 孙丰瑞. 量子卡诺制冷机制冷率与制冷系数协调优化性能. 低温工程, 1996(1): 1—5

- 35 Lin B, Chen J. General performance characteristics of a quantum heat pump cycle using harmonic oscillators as the working substance. *Phys Scr*, 2005, 71(1): 12—19[DOI]
- 36 Feldmann T, Kosloff R. Performance of discrete heat engines and heat pumps in finite time. *Phys Rev E*, 2000, 61(5): 4774—4790[DOI]
- 37 Wu F, Chen L, Wu S, et al. Performance of an irreversible quantum Carnot engine with spin-1/2. *J Chem Phys*, 2006, 124(21): 214702[DOI]
- 38 Lin B, Chen J. Optimal analysis of the performance of an irreversible quantum heat engine with spin systems. *J Phys A-Math Gen*, 2005, 38(1): 69—79[DOI]
- 39 Wang J, He J, Xin Y. Performance analysis of a spin quantum heat engine cycle with internal friction. *Phys Scr*, 2007, 75(2): 227—234[DOI]
- 40 Zhang G F. Entangled quantum heat engines based on two two-spin systems with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction. *Eur Phys J D*, 2008, 49(1): 123—128[DOI]
- 41 Wu F, Chen L, Wu S, et al. Performance of an irreversible quantum Ericsson cooler at low temperature limit. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39(21): 4731—4737[DOI]
- 42 He J, Wu X, Ouyang W. Performance optimization of an irreversible quantum spin refrigeration cycle. *Int J Thermal Sci*, 2006, 45(9): 938—944[DOI]
- 43 He J, Xin Y, He X. Performance optimization of quantum Brayton refrigeration cycle working with spin systems. *Appl Energy*, 2007, 84(2): 176—186[DOI]
- 44 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Optimum performance parameters for a quantum Carnot heat pump with spin-1/2. *Energy Convers Mgmt*, 1998, 39(11): 1161—1167[DOI]
- 45 Lin B, Chen J. performance analysis of a quantum heat-pump using spin systems as the working substance. *Appl Energy*, 2004, 78(1): 75—93[DOI]
- 46 Wu F, Chen L, Wu S, et al. Thermodynamic performance of a laser cryocooler. *J Chem Phys*, 2007, 126(20): 204502[DOI]
- 47 Geva E, Kosloff R. Three-level quantum amplifier as a heat engine: A study in finite-time thermodynamics. *Phys Rev E*, 1993, 49(5): 3903—3918
- 48 Quan H, Zhang P, Sun C. Quantum heat engine with multilevel quantum systems. *Phys Rev E*, 2005, 72(5): 056110[DOI]
- 49 Kieu T D. The second law, Maxwell's demon, and work derivable from quantum heat engines. *Phys Rev Lett*, 2004, 93(14): 140403[DOI]
- 50 Şişman A, Saygı H. On the power cycles working with the ideal quantum gases-I: The Ericsson cycle. *J Phys D-Appl Phys*, 1999, 32(4): 664—670[DOI]
- 51 Şişman A, Saygı H. Re-optimization of Otto power cycles working with ideal quantum gases. *Phys Scr*, 2001, 64 (2): 108—112[DOI]
- 52 Hasan H, Şişman A. Quantum degeneracy effect on the work output from a Stirling cycle. *J Appl Phys*, 2001, 90(6): 3086—3089
- 53 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Quantum degeneracy effect on performance of irreversible Otto cycle with deal Bose gas. *Energy Convers Mgmt*, 2006, 47(18-19): 3008—3018[DOI]
- 54 Wang H, Liu S, He J. Optimum criteria of an irreversible quantum Brayton refrigeration cycle with an ideal Bose gas. *Physica B*, 2008, 403(21-22): 3867—3878[DOI]
- 55 Zhang Y, Lin B, Chen J. The performance characteristics of an irreversible regenerative quantum refrigeration cycle. *Phys Scr*, 2006, 73(1): 48—55[DOI]
- 56 Bender C M, Brody D C, Meister B D. Quantum mechanical Carnot engine. *J Phys A-Math Gen*, 2000, 33(24): 4427—4436[DOI]
- 57 Angulo-Brown F. An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *J Appl Phys*, 1991, 69(11): 7465—7469[DOI]
- 58 Yan Z. Comment on “ecological optimization criterion for finite-time heat engines”. *J Appl Phys*, 1993, 73(7): 3583[DOI]
- 59 陈林根, 孙丰瑞, 陈文振. 热力循环的生态学品质因素. *热能动力工程*, 1994, 9(6): 374—376
- 60 Arias-Hernandez L A, Angulo-Brown F. A general property of endoreversible thermal engines. *J Appl Phys*, 1997, 81(7): 2973—2979[DOI]
- 61 Angulo-Brown F, Arias-Hernandez L A, Paez-Hernandez R. A general property of non-endoreversible thermal cycles. *J Phys D-Appl Phys*, 1999, 32(12): 1415—1420[DOI]
- 62 Cheng C Y, Chen K. Ecological optimization of an endoreversible Brayton cycle. *Energy Convers Mgmt*, 1998, 39(1/2): 33—44[DOI]

- 63 Tyagi S K, Kaushik S C, Salhotra R. Ecological optimization and performance study of irreversible Stirling and Ericsson heat engines. *J Phys D-Appl Phys*, 2002, 35(20): 2668—2675 [\[DOI\]](#)
- 64 Chen L, Zhou J, Sun F, et al. Ecological optimization for generalized irreversible Carnot engines. *Appl Energy*, 2004, 77(3): 327—338 [\[DOI\]](#)
- 65 Tyagi S K, Chen J, Lin G, et al. Ecological optimization of an irreversible Ericsson cryogenic refrigerator cycle. *Int J Energy Res*, 2005, 29(13): 1191—1204 [\[DOI\]](#)
- 66 Chen L, Zhu X, Sun F, et al. Ecological optimization for generalized irreversible Carnot refrigerators. *J Phys D-Appl Phys*, 2005, 38(1): 113—118 [\[DOI\]](#)
- 67 Chen L, Zhu X, Sun F, et al. Exergy-based ecological optimization for a generalized irreversible Carnot heat pump. *Appl Energy*, 2007, 84(1): 78—88 [\[DOI\]](#)
- 68 Sogut O S, Ust Y, Sahin B. The effects of intercooling and regeneration on the thermo-ecological performance analysis of an irreversible-closed Brayton heat engine with variable-temperature thermal reservoirs. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39(21): 4713—4721 [\[DOI\]](#)
- 69 Barranco-Jiménez M A, Sánchez-Salas N. On thermodynamic optimization of solar collector model under maximum ecological conditions. *J Energy Inst*, 2008, 81(3): 164—167 [\[DOI\]](#)
- 70 Ust Y. Performance analysis and optimization of irreversible air refrigeration cycles based on ecological coefficient of performance criterion. *Appl Thermal Engng*, 2009, 29(1): 47—55 [\[DOI\]](#)
- 71 Chen T H. Ecological optimization of quantum spin-1/2 heat engine at the classical limit. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39(7): 1442—1450 [\[DOI\]](#)
- 72 Wu F, Chen L, Sun F, et al. Ecological optimization performance of an irreversible quantum Otto cycle working with an ideal Fermi gas. *Open Syst Inf Dyn*, 2006, 13(1): 55—66 [\[DOI\]](#)
- 73 曾谨言. 量子力学卷一. 第三版, 北京: 科学出版社, 2000
- 74 林宗涵. 热力学与统计物理. 北京: 北京大学出版社, 2007
- 75 Andresen B, Salamon P, Berry R S. Thermodynamics in finite time: Extremals for imperfect heat engines. *J Chem Phys*, 1977, 66(4): 1571—1577 [\[DOI\]](#)
- 76 陈林根, 孙丰瑞, 陈文振. 不可逆热机的功率、效率特性: 以内热漏为例. *科学通报*, 1993, 38(5): 480
- 77 Chen L, Sun F, Wu C. A generalized model of a real heat engine and its performance. *J Inst Energy*, 1996, 69(481): 214—222
- 78 Chen L, Sun F, Wu C. Effect of heat transfer law on the performance of a generalized irreversible Carnot engine. *J Phys D-Appl Phys*, 1999, 32(2): 99—105 [\[DOI\]](#)