



双月旁转向周期轨道的解集域分析

罗宗富*, 孟云鹤, 汤国建

国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073

* E-mail: luozongfu200@163.com

收稿日期: 2009-09-16; 接受日期: 2009-10-29

国家自然科学基金(批准号: 10702078)和国防科技大学校预研基金(批准号: JC08-01-05)资助项目

摘要 双月旁转向周期轨道是限制性三体问题框架下的一类大尺度周期轨道. 首先, 分析了双月旁转向周期轨道的形成机理, 采用了圆锥曲线拼接法进行轨道的初步设计; 其次, 深入剖析了双月旁转向周期轨道的解集域空间, 并结合数值仿真, 绘制了解集域内轨道参数的分布图; 最后, 比较了不同地心拱线旋转角速度下的轨道参数, 并给出了两条典型轨道在各种坐标系下的轨道图形. 结果表明: 采用圆锥曲线拼接法进行双月旁转向周期轨道的解集分析是可行的, 计算数据和结论能够为进一步轨道设计提供参考.

关键词

双月旁转向
圆锥曲线拼接
解集分析
轨道设计
周期轨道

人造地球卫星与卫星应用技术、载人航天以及深空探测是人类进行航天活动的三大领域. 深空探测主要是指对月球、太阳系行星及其卫星以及日-地-月空间环境的探测.

随着人类视野从近地空间拓展到地月与日地系统空间乃至行星际空间, 三体问题和多体问题替代二体问题成为了航天动力学中亟需深入研究的理论问题. 在三体轨道中, 有两类非线性轨道概念值得引起特别的重视: 一类是三体平动点局部空间的晕轨道概念; 另一类则是地月大尺度空间的双月旁转向周期轨道概念. 其中, 三体平动点晕轨道在国内外都得到了重视和较多研究, 而对双月旁转向周期轨道的研究在国内尚属空白.

双月旁转向(double lunar-swingby)^[1]周期轨道是限制性三体问题框架下的一类大尺度周期轨道, 其突出特点在于每个周期中两次利用月球近旁转向技术, 一次加速而提高远地点, 一次减速而降低远地点, 从而形成白道面上大小不同的内圈和外圈两部分轨道, 该轨道相对于地月连线对称, 在惯性空间来看,

其拱线(即近、远地点连线)可随日地连线而旋转. 该轨道覆盖范围包括日地 L_1 , L_2 平动点以及地月系统空间, 在深空探测中具有很大的应用价值.

本文研究了双月旁转向周期轨道的形成机理, 采用了圆锥曲线拼接法进行轨道设计, 重点分析了双月旁转向周期轨道的解空间, 结合数值计算对轨道参数分布情况进行了仿真, 并对不同地心拱线旋转角速度下的轨道参数进行了对比, 给出了两条典型轨道在各坐标系下的图形.

1 双月旁转向周期轨道概述

双月旁转向周期轨道技术是 1980 年美国航天专家 Farquhar W 首先提出的, 为了解决国际日地探险者 3 号 (ISEE-3) 的扩展任务轨道设计问题^[1,2]. 在此后一系列航天任务中, 包括 Hiten(MUSES-A)^[3], Geotail^[4], WIND^[5]以及 Genesis^[6]和 MMS^[7]的扩展任务设计, 双月旁转向轨道技术均作为一项关键技术得到了广泛应用. 总而言之, 这一技术丰富了轨道设

计的形式, 形成了一系列具有前沿性和创新性的轨道设计方案.

假设太阳、地球、月球以及航天器都运行在白道面内, 月球绕地球的公转和地球绕太阳的公转均为匀速圆周运动, 选取地心白道惯性坐标系为参考坐标系, 如图 1 所示. 初始时刻, 不妨设航天器处于地心椭圆轨道的远地点 A_1 , 而月球处于航天器相对地球的另一侧; 接下来的一段时间, 航天器飞行的地心轨道处于内圈(inner loop)^[1,2]轨道; 到 T_1 时刻, 与月球(S_1 位置)相遇, 航天器在月旁转向作用下, 进入尺寸更大的地心椭圆轨道, 不妨称为外圈(outer loop)^[1,2]轨道; 经过 T_2 时段, 航天器再次与月球(S_2 位置)相遇, 航天器减速进入尺寸相同的内圈轨道; 再经过 T_1 时间段, 航天器相对月球和地球的运动状态回归初始值; 以上过程不断重复, 就形成了周期性的双月旁转向轨道.

定义. M_{in} 和 N_{in} 表示 T_1 时段内月球和航天器飞行的整圈数, M_{out} 和 N_{out} 表示 T_2 时段内月球和航天器飞行的整圈数^[1,2]; f_1, f_2 表示第一次与月球相遇时航天器在内圈和外圈轨道上的真近点角; ω_E 为地球绕日公转的平均角速度, R_{EL} 为地月平均距离, μ_E 为地心引力系数; V_M 为月球绕地球公转的速度, T_m 为月球公转周期, δ 为月心速度偏转角.

显然, 双月旁转向轨道的周期 $T_{DLS} = 2T_1 + T_2$. 这一时间段内, 航天器的拱线旋转了 $\Delta\theta = 2(f_1 - f_2)$, 拱线旋转的平均角速度为 $\omega = \Delta\theta / T_{DLS}$. 若使 $\omega = \omega_E$, 航天器地心轨道的拱线就能始终与日地连线一致^[8]. 给定 ω , $[M_{in}, N_{in}, M_{out}, N_{out}]$ 以及初始时刻航天器和月球的相对位置关系等约束, 双月旁转向周期轨道

就能够完全确定.

2 双月旁转向周期轨道的初步设计

从图 1 中不难发现: 月球影响球相对整个轨道的尺度很小, 航天器月心轨道段的飞行时间也很短, 初步设计时可以将月球影响球近似压缩成一点, 认为月球近旁作用使航天器获得瞬时速度增量. 因此可以采用圆锥曲线拼接法对双月旁转向周期轨道进行初步设计.

不妨假设:

- 1) 忽略太阳等地-月系统外天体对航天器的引力等摄动作用;
- 2) 地心轨道均为顺行轨道;
- 3) 限定 $M_{out} \leq 4$ (当 $M_{out} > 4$ 时, 航天器的远地距远超出地球影响球半径, 考虑太阳引力作用时航天器将脱离地球引力作用, 成为日心轨道飞行器);
- 4) 第一次近旁转向发生在航天器内圈轨道与白道第一个交点处, 即图 1 中的 S_1 位置;
- 5) 内圈轨道的近地点处于 $+X$ 轴上;
- 6) 航天器初始时刻处于内圈轨道的远地点或近地点;
- 7) 初始时刻月球处于与航天器同侧或异侧的 X 轴方向.

基于假设 6) 和 7), 可以采用参数 σ_c 和 σ_m 来描述初始时刻航天器和月球的相对位置关系, 如下

$$\sigma_c = \begin{cases} 1 & (\text{航天器位于远地点}), \\ 0 & (\text{航天器位于近地点}), \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1 & (\text{月球处于}-X \text{ 轴}), \\ 0 & (\text{月球处于}+X \text{ 轴}). \end{cases} \quad (2)$$

由此可以将轨道分为图 2 中(a), (b), (c), (d)四种类型, 其中 S/C 代表航天器(spacecraft)初始时刻的位置.

图 2 所示四种情况的轨道可以统一表达为如下三个约束方程形式^[8].

约束 1. 拱线旋转平均角速度等于给定的旋转角速度 ω_0 , 表达为

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\Delta\theta}{T_{DLS}} - \omega_0 = 0. \quad (3)$$

约束 2. 航天器内圈轨道满足与月球相遇的条件, 等式为

$$\Delta T_1 = N_{in} \cdot T_{in} + \sigma_c \cdot T_{in} / 2 + \frac{E_1 - e_1 \sin E_1}{2\pi} T_{in} - T_{lm} = 0. \quad (4)$$

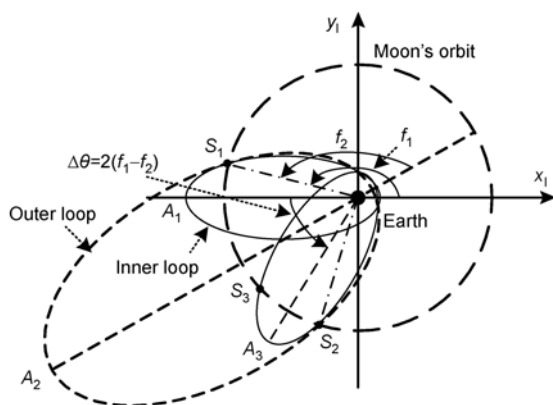


图 1 双月旁转向轨道的飞行过程

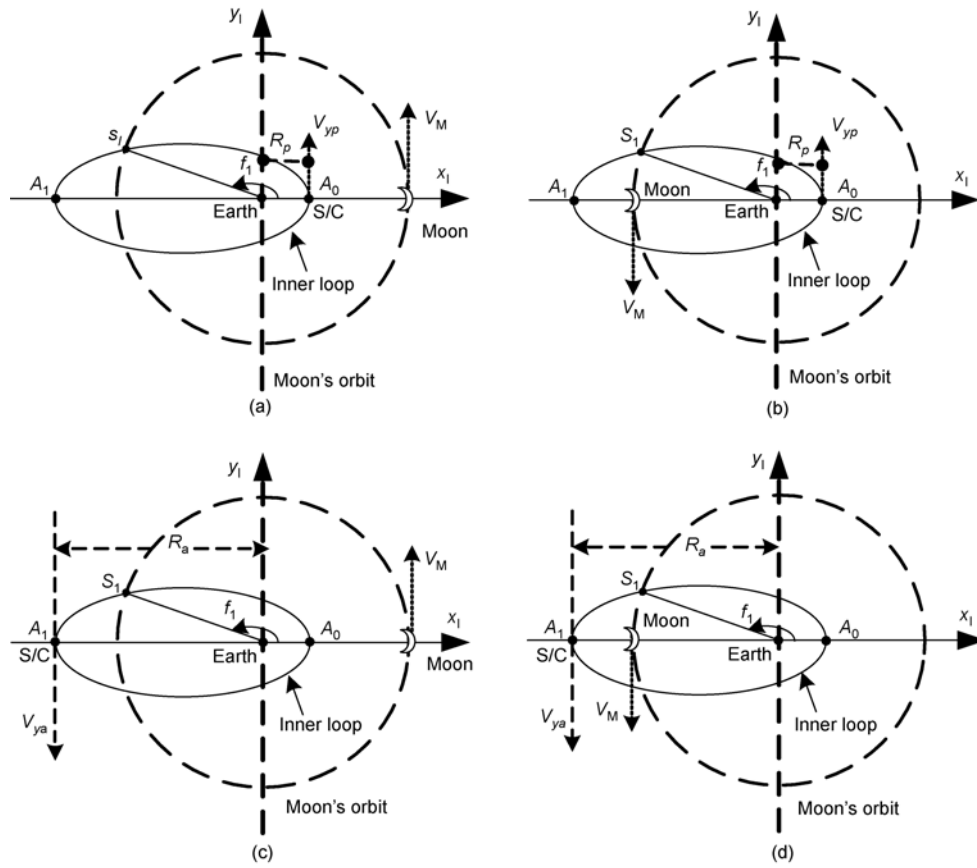


图2 初始时刻航天器和月球相对位置关系

约束 3. 航天器外圈轨道满足与月球相遇的条件, 等式为

$$\Delta T_2 = N_{\text{out}} \cdot T_{\text{out}} + 2 \left(\frac{T_{\text{out}}}{2} - \frac{E_2 - e_2 \sin E_2}{2\pi} T_{\text{out}} \right) - T_{2m} = 0, \quad (5)$$

其中: E_1, e_1, E_2, e_2 分别为内、外圈的偏近点角和偏心率, T_{in} 和 T_{out} 分别为内、外圈椭圆轨道的周期. 航天器在内圈和外圈飞行过程中月球运动时间 T_{1m}, T_{2m} 可以表达为

$$T_{1m} = (M_{\text{in}} + \sigma_m / 2 + f_1 / 2\pi) \cdot T_m, \quad (6)$$

$$T_{2m} = (M_{\text{out}} + 1 - f_2 / \pi) \cdot T_m. \quad (7)$$

选取初始时刻内圈轨道的远地距 R_a 、近地距 R_p 和月球近旁的月心速度偏转角 δ 为优化变量^[8], 取 $\Delta\omega$, ΔT_1 和 ΔT_2 为目标方程 $\mathbf{F}(\mathbf{X})=0$ 的约束分量, 约束条件可以表达成如下非线性方程组形式

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\delta, R_a, R_p) \\ f_2(\delta, R_a, R_p) \\ f_3(\delta, R_a, R_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{X} = [\delta \ R_a \ R_p]^T$.

求解此非线性方程组就能得到基于圆锥曲线拼接法的双月旁转向周期轨道设计参数.

3 双月旁转向周期轨道的解集域分析

上文中 M_{in} 表示 T_1 时段内月球飞行的整圈数, 整个周期内内圈轨道飞行时间为 $2T_1$, 考虑到内圈飞行时间超过 4 个月不具有实际意义, 不妨假设 $M_{\text{in}} \leq 2, M_{\text{out}} \leq 4$.

设 N_{apos} 为航天器两次月球近旁 $S_1 S_2$ 之间经过地心轨道远地点的次数, N_{mos} 为这一时间段内航天器飞行的近似月份数^[9].

对于航天器内圈和外圈轨道, N_{apos} 的极限取值和 N_{mos} 存在如下关系^[9]

$$\begin{cases} N_{\text{apos}} < (2\sqrt{2}N_{\text{mos}} - 1), & (\text{内圈}), \\ N_{\text{apos}} < (2\sqrt{2}N_{\text{mos}} + 1), & (\text{外圈}), \end{cases} \quad (9)$$

如图 3 所示.

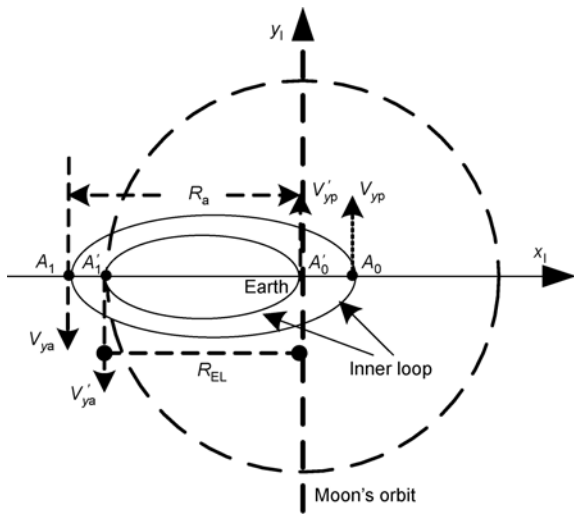


图 3 极限情况示意图

而内圈轨道过远地点数目 N_{apos} 和 N_{in} 之间存在如下关系

$$N_{\text{apos}} = \begin{cases} 2N_{\text{in}}, & \text{若 } N_{\text{apos}} \text{ 为偶数,} \\ 2N_{\text{in}} - 1, & \text{若 } N_{\text{apos}} \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (10)$$

考虑到 M_{mos} 和 M_{in} 之间存在如下关系

$$2M_{\text{in}} \leq N_{\text{mos}} \leq 2(M_{\text{in}} + 1). \quad (11)$$

由(9)~(11)式可以得到

$$N_{\text{in}} \begin{cases} < 2\sqrt{2}(M_{\text{in}} + 1) - 1/2, & \text{若 } N_{\text{apos}} \text{ 为偶数,} \\ < 2\sqrt{2}(M_{\text{in}} + 1), & \text{若 } N_{\text{apos}} \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (12)$$

M_{in} 的具体取值由初始时刻月球和航天器的位置以及内外圈轨道形状共同决定.

同样可得外圈参数 N_{out} 和 M_{out} 的关系

$$N_{\text{out}} < 2\sqrt{2}(M_{\text{out}} + 1). \quad (13)$$

同时, M_{out} 的取值还需要依赖从 S_1 到 S_2 之间的月球轨道弧度大小.

当 M_{out} 增加时, 两次月旁作用之间的时间增加, 从第一次月球近旁 S_1 位置到第二次近旁 S_1 位置之间地心弧度增大, 以航天器地心拱线旋转的平均角速度等于地球公转角速度 ω_E 为例.

图 4 为航天器在地心惯性坐标系中的轨道示意图.

设 S_1 到 S_2 的地心夹角为 θ_s (逆时针旋转), 那么 θ_s 可以近似为一个双月旁转向轨道周期内拱线旋转的角度 $\Delta\theta$, 即

$$\theta_s \approx \Delta\theta = 2(f_1 - f_2). \quad (14)$$

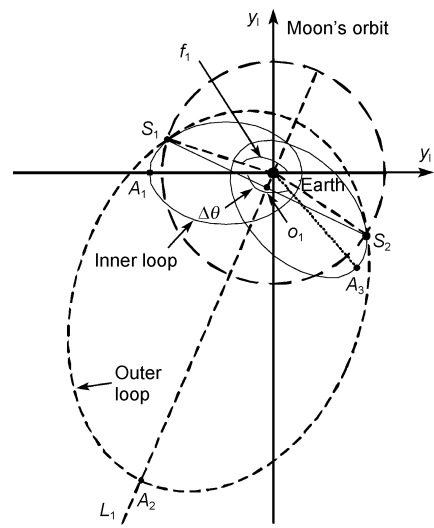


图 4 地心惯性系中的轨道示意图

当 $f_1 \rightarrow \pi$ 时, 近似程度越高. 当 $\omega = \omega_E$ 时, $\Delta\theta = \omega \cdot T_{\text{DLS}}$.

由开普勒定理知: 过 S_1, S_2 两点的地心椭圆轨道中, 长半轴越小的轨道, 周期越小, 外圈轨道的数目越多. 所以求解最大外圈轨道数问题可以转化为一个求解 Lambert 飞行时间定理问题.

当 $\theta_s < \pi$ 时, 由 Lambert 飞行时间定理得到: 椭圆的另外一个焦点位于 $S_1 S_2$ 连线上时, 椭圆的长半轴最小, 设 $S_1 S_2$ 连线的距离为 l_s , 此时外圈轨道的长半轴 a_2 为

$$a_2 = (2R_{\text{EL}} + l_s) / 4. \quad (15)$$

以 $\sigma_c=1, \sigma_m=0$ 情况下的 $[0, 0, 4, 0]$ 类型轨道为例, 外圈的飞行时间 $T_{\text{DLS}} \approx 4T_m$, 则最小能量轨道的周期(单位: d)为

$$T_{\text{out}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{\mu_E}} = 23.57. \quad (16)$$

故

$$N_{\text{out}} < (M_{\text{out}} + \frac{\Delta\theta}{2\pi}) \cdot T_m / T_{\text{out}} - \frac{\Delta\theta}{2\pi}, \quad (17)$$

计算得到 $N_{\text{out}} < 4.67$.

当内圈轨道飞行时间增加时, θ_s 将大于 π , 如 $M_{\text{in}}=2, M_{\text{out}}=4$ 时, $T_{\text{DLS}} > (2M_{\text{in}} + M_{\text{out}})T_m = 8T_m$, 显然 $\Delta\theta > \pi$. 由于外圈椭圆轨道的焦点必然位于图 4 中地球和 A_2 之间的 L_1 线上, 此时的最小能量轨道为外圈轨

道的两个焦点重合于地球, 即

$$N_{out} = M_{out} \cdot \tag{18}$$

基于以上分析可以得到: 航天器外圈整圈数目 $N_{out} < M_{out}$, 即 $N_{out} \in \{0, 1, 2, 3\}$. 这一分析过程同样适合 $M_{out}=1, 2, 3$ 的情况.

值得注意的是以上分析均是基于极限情况进行, 具体的轨道类型不一定能达到上限, 需要针对具体的双月旁转向轨道类型进行讨论.

上文采用了假设 $\omega=\omega_E$, 在实际的轨道设计中, 拱线旋转平均角速度 ω 可以根据不同的任务要求进行调节, 计算过程和 $\omega=\omega_E$ 相同.

4 双月旁转向周期轨道的仿真和分析

本文的计算参数和天文常数选取如下: 地月距 $R_{EL}=3.844\times10^5$ km, 地球半径 $R_E=6378$ km, 地球公转角速度 $\omega_E=1.99108\times10^{-7}$ rad/s, $0 \leq M_{in} \leq 2$, $1 \leq M_{out} \leq 4$.

当给定参数 ω , M_{in} , N_{in} , M_{out} , N_{out} , σ_c , σ_m 的取值, 双月旁转向周期轨道就能够完全确定, 在约束的解集范围内选取任意组合进行求解, 得到解空间内双月旁转向周期轨道的内圈轨道参数, 如图 5 所示, 其中 $\omega=\omega_E$.

根据实际情况, 航天器的内圈轨道远地距大于地月距离, 即 $R_{a1}>R_{EL}$, 内圈轨道的近地距大于地球半径, 即 $R_{p1}>R_E$, 如图 5 所示.

从图 5 可以看出: $\sigma_m=1$ 时存在的双月旁转向周期轨道解较 $\sigma_m=0$ 多. 图中 $R_{a1}=R_{EL}$ 线附近的解较为集中, 这主要是由于内圈轨道数目增加时, 航天器的远地距压缩到地月距附近. 伴随长半轴的增加, 近地距呈增加趋势.

表 1 圆锥曲线拼接法计算结果

Case	Orbit type	$\delta(^{\circ})$	$R_a(R_E)$	$R_p(R_E)$	$r_m(R_E)$	$R_{out}(R_E)$
1	$\sigma_c=1, \sigma_m=0, [0,0,3,0]$	33.851	82.400	7.035	2.468	257.256
2	$\sigma_c=1, \sigma_m=1, [0,1,1,0]$	30.609	75.030	5.959	3.119	140.731
3	$\sigma_c=0, \sigma_m=0, [1,2,2,0]$	41.819	74.403	1.452	3.523	197.554
4	$\sigma_c=0, \sigma_m=1, [1,4,1,0]$	57.241	63.794	7.109	2.093	138.619

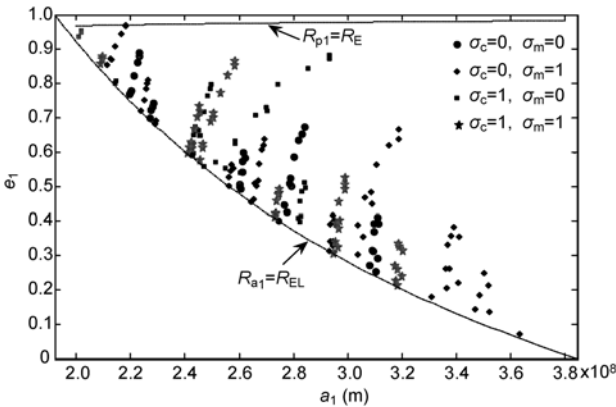


图 5 解空间内圈轨道的长半轴和偏心率对应关系

表 1 给出了四类典型轨道的初步设计结果, 其中 r_m 表示近月距. R_{out} 表示外圈轨道远地距.

图 5 和表 1 均是针对 $\omega=\omega_E$ 时不同轨道类型进行的仿真. 下面针对不同的拱线旋转角速度进行分析, 图 6~9 是拱线旋转角速度变化时不同参数的变化情况. 其中 A 代表 $\sigma_c=1, \sigma_m=0, [0,0,1,0]$ 类型轨道; B 代表 $\sigma_c=0, \sigma_m=1, [0,1,1,0]$ 类型轨道; C 代表 $\sigma_c=0, \sigma_m=0, [1,2,1,0]$ 类型轨道; D 代表 $\sigma_c=1, \sigma_m=1, [0,1,1,0]$ 类型轨道.

由图 6 和 7 可以看出: 当拱线旋转角速度从 $0.6\omega_E$ 向 $1.4\omega_E$ 变化时, 内圈轨道的远地距减小, 近地距增加. 图 8 中近月距随 ω 的变化趋势不确定, 但同一种类型的轨道 ω 变化时, 近月距的变化较为平缓. 图 9 中不同类型轨道的外圈长半轴和偏心率的变化轨迹基本相同, 集中在对角线附近.

选取表 1 中两种典型轨道为代表, 分别绘制了航天器在地心惯性坐标系、地月旋转坐标系和日地旋转坐标系下的轨道图. 图 10~12 为 $\sigma_c=1, \sigma_c=0, [0,0,3,0]$ 类型轨道在三种坐标系中的轨道.

图 13~15 为 $\sigma_c=0, \sigma_m=1, [1,4,1,0]$ 类型轨道在三种坐标系中的轨道.

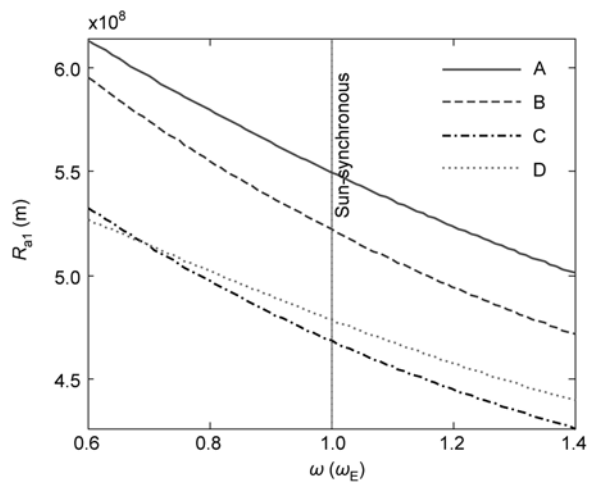


图6 内圈远地距和拱线旋转速度的关系

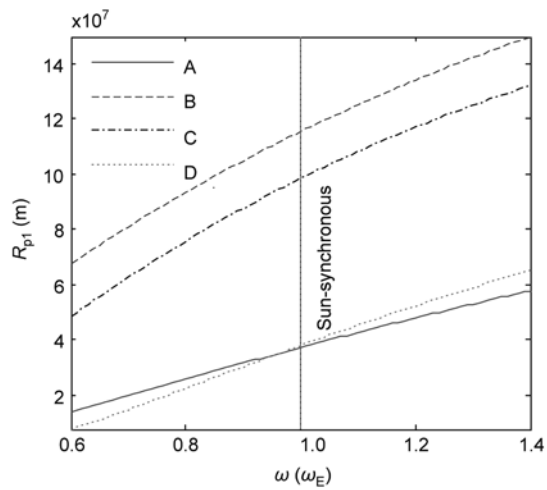


图7 内圈近地距和拱线旋转速度的关系

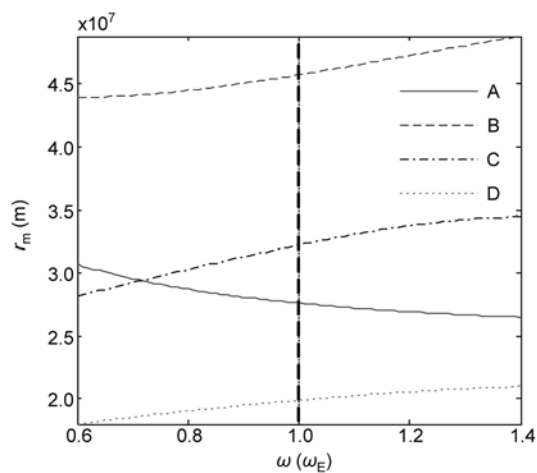


图8 近月距和拱线旋转速度的关系

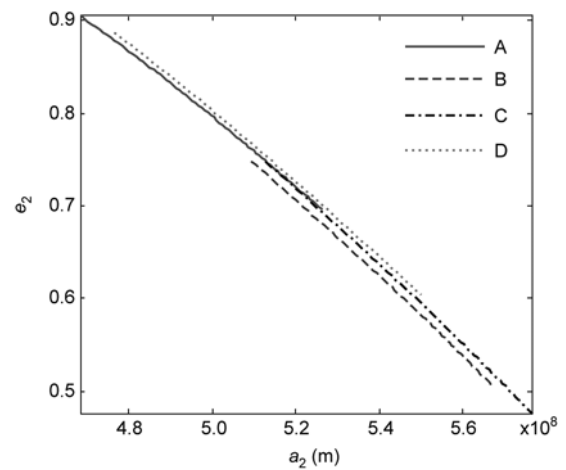


图9 外圈轨道长半轴和偏心率的关系

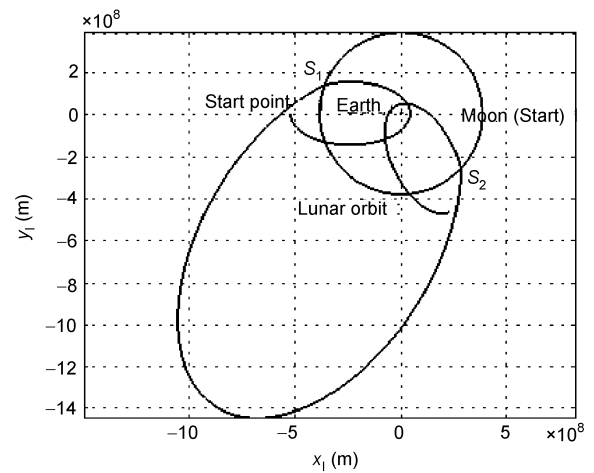


图10 [0,0,3,0]类型轨道在地心惯性坐标系中的轨道

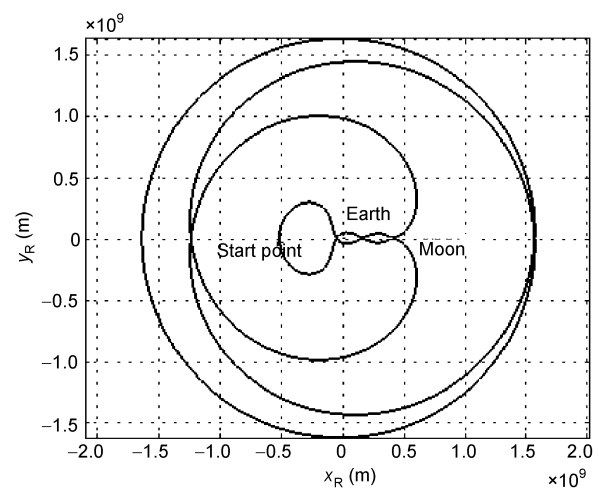


图11 [0,0,3,0]类型轨道在地月旋转坐标系中的轨道

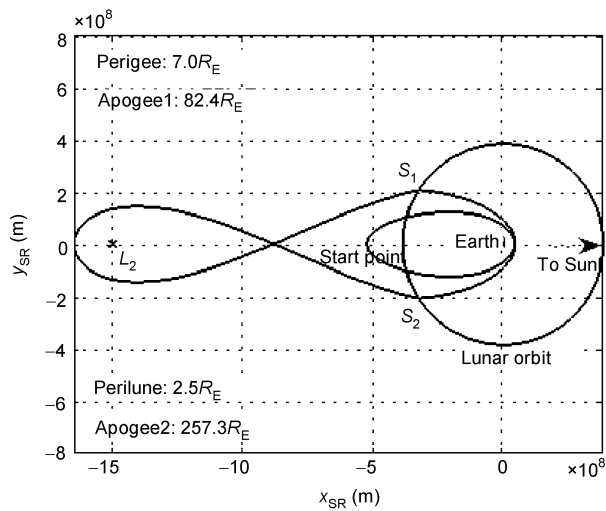


图 12 [0, 0, 3, 0]类型轨道在日地旋转坐标系中的轨道

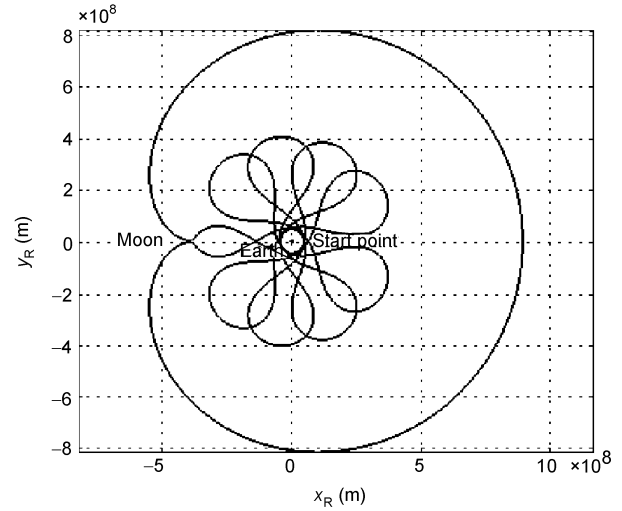


图 14 [1, 4, 1, 0]类型轨道在地月旋转坐标系中的轨道

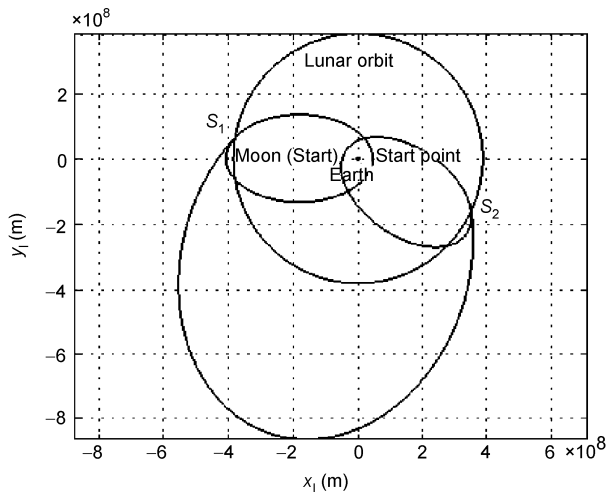


图 13 [1, 4, 1, 0]类型轨道在地心惯性坐标系中的轨道

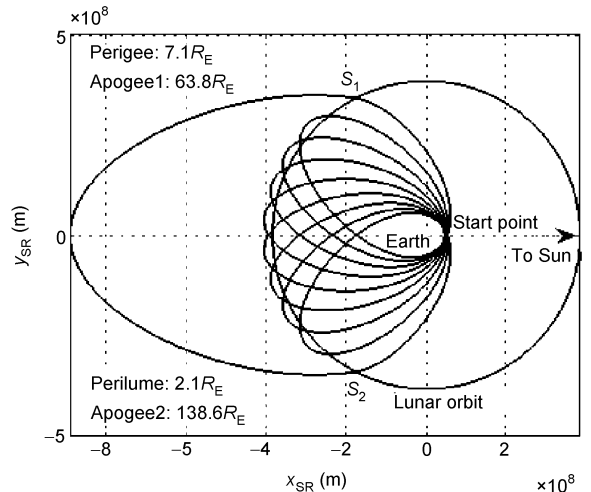


图 15 [1, 4, 1, 0]类型轨道在日地旋转坐标系中的轨道

5 结论和展望

双月旁转向周期轨道的显著特点是地心轨道的拱线在惯性空间跟随日地连线“进动”，为太阳风和地磁尾的探测提供了一种有效的手段，同时这一周期轨道能够连接平动点，在未来的多任务深空探测轨道设计中有巨大的应用潜力。

本文从双月旁转向周期轨道的形成机理出发，采用圆锥曲线拼接法进行轨道的初步设计，深入剖析了双月旁转向周期轨道的解集域空间，对空间内

的各种轨道进行了仿真和分析，比较了不同地心拱线旋转角速度下的轨道参数，并选取了典型的两种轨道进行演示，给出了三种坐标系下的轨道图形。通过以上分析发现：采用圆锥曲线拼接法进行双月旁转向周期轨道的解集分析是可行的，得到的结果能够为进一步轨道设计提供参考。

本文设计的轨道均是基于圆锥曲线拼接法进行的平面轨道设计，下一步可以结合真实星历，考虑太阳引力和光压等摄动作用进行轨道设计和仿真。

参考文献

- 1 Farquar R W, Dunham D W. A new trajectory concept for exploring the Earth's geomagnetic tail. *J Guidance Control*, 1981, 4: 192—196
- 2 Farquhar R W. The flight of ISEE-3/ICE: Origins mission history, and a legacy. *J Astronaut Sci*, 2001, 49: 23—73
- 3 Uesugi K, Hayashi T, Matsuo H. "MUSES-A" Double Lunar Swingby Mission. *Acta Astronaut*, 1988, 17: 495—502
- 4 Dunham D W, Jen S C, Lee T, et al. Double Lunar-Swingby trajectories for the spacecraft of the international solar-terrestrial physics program. *Adv Astronaut Sci*, 1989, 69: 285—301
- 5 Franz H, Sharer P, Ogilvie K, et al. WIND nominal mission performance and extended mission design. *J Astronaut Sci*, 2001, 49: 145—167
- 6 LO M W, Williams B G, Bollman W E, et al. Genesis mission design. *J Astronaut Sci*, 2001, 49: 169—184
- 7 Edery A, Schiff C. The Double Lunar Swingby of the MMS Mission. In: 16th International Symposium on Space Flight Dynamics, Pasadena, Canada, 2001
- 8 Stalos S. Calculation of Double-Lunar Swingby trajectories: I. Keplerian formulation. In: *Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, Greenbelt, USA, 1989
- 9 Marsh S M, Howell K C. Double Lunar Swingby trajectory design. In: *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, Minneapolis, USA, 1988