

求解数理方程解析解的一种新方法——混合分离变量法

蔡睿贤^{①*}, 刘启斌^{①②}

① 中国科学院工程热物理研究所, 北京 100190;

② 中国科学院研究生院, 北京 100190

* E-mail: crx@mail.etp.ac.cn

收稿日期: 2007-04-16; 接受日期: 2008-03-31

国家自然科学基金(批准号: 50576097)和国家重点基础研究发展规划(编号: 2007CB206902)资助项目

摘要 各种反映物理现象的基本数理方程的解析解, 既有其无可替代的理论意义, 也可作为标准解来校核各种数值计算, 甚至可以发展各种计算技巧. 我们提出求解数理方程的一种新方法——混合分离变量法, 即采用常规的乘法分离变量法与第一作者发展的加法分离变量法相结合的途径来求解数理方程. 以多孔介质中具有温度与浓度梯度耦合的自然对流方程为例, 得到多组简明的显式解, 并给出了其简单情况下的物理内涵.

关键词

解析解
混合分离变量法
双浮力
自然对流
多孔介质

不同学科的各种基本方程的解析解, 历史上对学科的发展曾起过关键的作用. 例如各种不可压位流与定常数导热的解析解, 就曾是早年流体力学与传热学的基础^[1,2]. 后来因为满足一定的初始条件与边界条件(尤其对于复杂的基本方程)的解析解很难找到, 再加上电子计算机与数值计算方法的飞速发展, 在解决具体问题时就基本上转向计算流体力学与计算传热学. 但是解析解还是有其不可替代的理论价值, 而且它还可以作为标准解来推动各种计算方法的发展. 例如可以检验各种计算方法与程序的准确性、收敛性与稳定性, 也可以启发计算方法工作者改进各种差分格式, 网格生成技术等. 本文第一作者在 20 多年前曾对叶轮机械内部三元流动得出了多个解析解^[3], 并为多篇计算流体力学文献引用^[3-6].

在求解反映物理现象的基本数理方程时, 通常采用常规(乘法)变量分离方法, 即假定待求变量是 2 个未知一元函数相乘 $F(t, x) = T(t)X(x)$. 本文作者曾提出利用加法变量分离法, 即在分离变量时, 假定待求变量是 2 个未知一元函数相加 $F(t, x) = T(t) + X(x)$. 结果发现用此法可以对以前不能得到任何解析解的方程求得解析解^[7-22]. 因此, 对于存在两个或者两个以上变量的微分方程, 分离变量时无必要采用同一种分离变量方法, 例如, 某些变量可以采用加法分离

变量法, 另一个或者多个可采用常规分离变量法甚至其他新的方法. 我们称这种变量分离的方法为混合分离变量法.

多孔介质的传热传质是工农业生产与日常生活中的一个重要的过程, 如石油热采过程、地热过程、建筑热工过程、核反应堆设计、地下核废料排放、铸造工艺及干燥过程等, 有必要对它进行深入的研究. 多孔介质中同时存在温度与浓度梯度时引起双浮力自然对流, 相对普通的自然对流来说, 这种耦合的自然对流研究较少. 因此本文运用提出的混合分离变量法, 以多孔介质中具有双浮力的自然对流基本方程为例进行求导, 求得其可能的代数解析解. 这对发展与多孔介质中温度梯度与浓度梯度耦合的自然对流有关的传热传质学是非常有意义的.

1 控制方程

据文献[22,23], 同时存在温度与浓度梯度时引起双浮力的自然对流二维控制方程为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} - Ru + Ra\theta - N Ra C, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = Le \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (5)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

其中 u, v 为坐标 x, y 方向上的速度分量; p 为压力; θ 为无量纲温度; C 为无量纲浓度. 另外, N, Ra, Le 与 Ru 分别代表浮力比、Rayleigh 数、Lewis 数与表征重力的无量纲参数, 并假定无量纲参数均为常数; ψ 为流函数, u, v 与 ψ 的关系如方程(5)和(6)所示.

对于复杂的方程组(1)~(6), 据作者所知, 仅文献[20]给出部分代数显式解析解. 为了更容易得到更多的代数显式解析解, 本文假定 $Le = 1$, $\theta = NC$ (文献[19]柱坐标下也曾采用该种假设, 成功得到多组代数显式解析解), 于是方程(1)~(6)简化为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} + Ru, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (9)$$

$$C = \theta/N. \quad (10)$$

方程(7)~(10)仅有3个微分方程, 我们可以先通过方程(7)~(8)求得 ψ, p , 然后代入方程(9)求得 θ .

由于目的是求出可能的解析解, 所以与一般针对具体条件求解不同, 是首先按控制方程导出可能的解, 然后再核定它的初始与边界条件是怎样的, 这个做法与教科书上阐述早年得出不可压缩流体力学的基本典型解的步骤是一致的.

2 第一组解析解(所有变量均采用加法分离变量法)

对所有变量均采用加法分离, $\psi = X_\psi + Y_\psi$, $p = X_p + Y_p$, $\theta = X_\theta + Y_\theta + T_\theta$, 方程(7)~(9)变为

$$Y'_\psi = -X'_p, \quad (11)$$

$$X'_\psi = Y'_p + Ru, \quad (12)$$

$$X''_\theta + Y''_\theta = Y'_\psi X'_\theta - X'_\psi Y'_\theta + T'_\theta, \quad (13)$$

其中 X, Y 及 T 分别为 x, y, t 的函数, 下标 ψ, p, θ 分别代表流函数、压力、温度.

方程(11)可以分离为

$$Y'_\psi = c_1 = -X'_p. \quad (14)$$

于是

$$Y_\psi = c_1 y + c_2, \quad (15)$$

$$X_p = c_3 - c_1 x. \quad (16)$$

同样的方法对方程(12)进行分离, 忽略常数, 得

$$X_\psi = c_4 x, \quad (17)$$

$$Y_p = (c_4 - Ru) y, \quad (18)$$

因此有

$$\psi = c_1 y + c_4 x + c_2, \quad (19)$$

$$u = c_1, \quad (20)$$

$$v = -c_4, \quad (21)$$

$$p = (c_4 - Ru) y - c_1 x + c_3. \quad (22)$$

将 u, v 代入方程(13), 可得

$$X''_\theta + Y''_\theta = c_1 X'_\theta - c_4 Y'_\theta + T'_\theta. \quad (23)$$

由方程(23)得

$$X''_\theta - c_1 X'_\theta + Y''_\theta + c_4 Y'_\theta = c_5 = T'_\theta. \quad (24)$$

于是

$$T_\theta = c_5 t + c_9. \quad (25)$$

分离方程(24)左边, 可得

$$X_{\theta}'' - c_1 X_{\theta}' = c_6 = c_5 - Y_{\theta}' - c_4 Y_{\theta}', \quad (26)$$

从方程(26)左边, 得到 X_{θ} :

$$X_{\theta} = [c_7 \exp(c_1 x) - c_6 x] / c_1. \quad (27)$$

方程(26)右边可得到函数 Y_{θ} , 并可简化为

$$Y_{\theta} = -[c_8 \exp(-c_4 y) + (c_6 - c_5) y] / c_4. \quad (28)$$

温度场为

$$\begin{aligned} \theta = NC = T_{\theta} + X_{\theta} + Y_{\theta} = c_5 t + [c_7 \exp(c_1 x) - c_6 x] / c_1 \\ - [c_8 \exp(-c_4 y) + (c_6 - c_5) y] / c_4 + c_9. \end{aligned} \quad (29)$$

于是得到了具有温度与浓度梯度耦合的自然对流基本方程一组简单解析解. 假设初始时间为 $t=0$, 边界为单位长度的正方形. 初始条件为(令 $c_9=0$)

$$\begin{aligned} t=0, \quad p &= (c_4 - Ru)y - c_1 x + c_3, \\ \theta = NC &= [c_7 \exp(c_1 x) - c_6 x] / c_1 - [c_8 \exp(-c_4 y) + (c_6 - c_5) y] / c_4; \\ x=0, \quad p &= (c_4 - Ru)y + c_3, \\ \theta = NC &= c_5 t + c_7 / c_1 - [c_8 \exp(-c_4 y) + (c_6 - c_5) y] / c_4; \\ x=1, \quad p &= (c_4 - Ru)y - c_1 + c_3, \\ \theta = NC &= c_5 t + [c_7 \exp(c_1) - c_6] / c_1 - [c_8 \exp(-c_4 y) + (c_6 - c_5) y] / c_4; \\ y=0, \quad p &= -c_1 x + c_3, \\ \theta = NC &= c_5 t + [c_7 \exp(c_1 x) - c_6 x] / c_1 - c_8 / c_4; \\ y=1, \quad p &= c_4 - Ru - c_1 x + c_3, \\ \theta = NC &= c_5 t + [c_7 \exp(c_1 x) - c_6 x] / c_1 - [c_8 \exp(-c_4) + c_6 - c_5] / c_4, \end{aligned}$$

其中全场 $u = c_1$, $v = -c_4$.

然而解(20)~(22), (29)式的物理意义并不简明. 若 $u=0$ ($c_1=0$)或者 $v=0$ ($c_4=0$), 所求得的解代表的物理意义就比较明确. 但是(29)式中不允许 $c_1=0$ 或者 $c_4=0$, 故重新从(26)式求解.

当 $c_1=0$, $c_4 \neq 0$, 方程(26)左边变为

$$X_{\theta}'' = c_6, \quad (30)$$

因此

$$X_{\theta} = c_6 x^2 / 2 + c_7 x. \quad (31)$$

Y_{θ} 仍为(28)式所示, 因此

$$u = 0, \quad (32)$$

$$v = -c_4, \quad (33)$$

$$p = (c_4 - Ru)y + c_3, \tag{34}$$

$$\theta = NC = c_5t + c_6x^2/2 + c_7x - [c_8 \exp(-c_4y) + (c_6 - c_5)y]/c_4 + c_9. \tag{35}$$

图 1 所示其物理意义, 表示两块无限长水平多孔介质平板间的流动. 当 $c_4 > 0$ 时, 流体由上板注入, 经过两板间通道, 从下板流出. 压力分布如图 1 所示, 等压线为水平线且等距分布. 若 $c_4 = Ru$, 则 p 为常数. 温度与浓度的几何分布情况均为如(35)式所表示的 x, y 的二元函数. 然而, 如果 $c_5 = c_6 = 0$, 该组解析解可以表示更为简单的情况: 温度和浓度分布均为沿 x 轴成线性分布, 沿 y 轴成指数关系分布.

事实上, 解析解(32)~(35)式还可以表示另外一种物理含义, 如图 2 所示, 两块无限长竖直平行板向上运动的实心板之间的流动($c_4 < 0$)以满足无滑移条件. 温度分布与图 1 所讨论的情况一致.

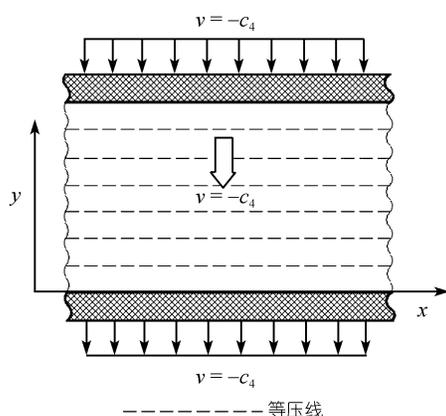


图 1 解析解(32)~(35)式的物理含义

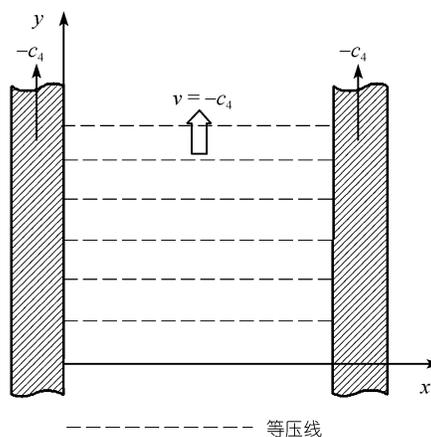


图 2 解析解(32)~(35)式另外一种物理含义

当 $c_4 = 0, c_1 \neq 0$ 时, 同样可以得解, 为减小篇幅, 这里不详细推导, 仅给出最后结果:

$$u = c_1, \tag{36}$$

$$v = 0, \tag{37}$$

$$p = c_3 - c_1x - Ru \cdot y, \tag{38}$$

$$\theta = NC = c_5t + [c_8 \cdot \exp(c_1x) - c_7x]/c_1 + (c_5 - c_7)y^2/2 + c_9y + c_6. \tag{39}$$

解(36)~(39)式的物理意义类似于解(32)~(35)式, 如图 3 和 4 所示. 图 3 表示两块无限长竖直多孔介质平行平板间的流动($c_1 > 0$), 图 4 表示两块无限长水平平行向右运动的实心板之间的流动($c_1 > 0$)以满足无滑移条件. 这组解与前一组解的压力分布不同, 前一组解压力分布仅是 y 的函数, 而这里压力分布为 x, y 的二元函数, 温度与浓度分布为非定常.

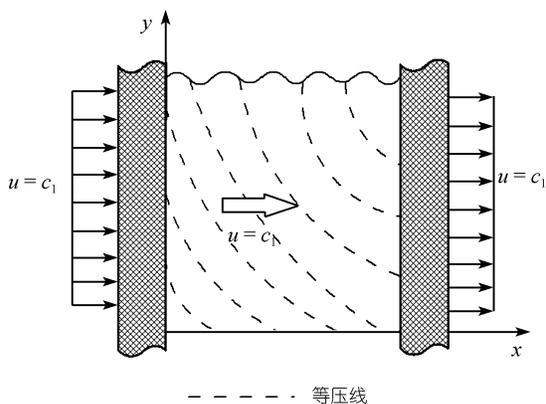


图 3 解析解(36)~(39)式的物理含义

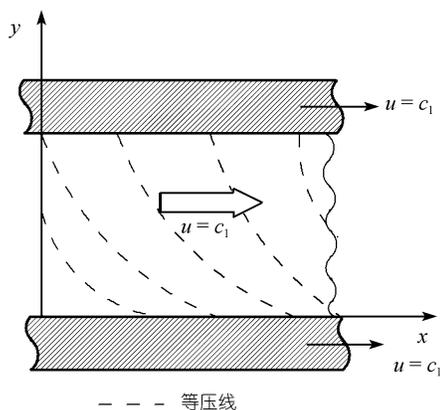


图 4 解析解(36)~(39)式另外一种物理含义

3 第二组解析解(ψ 和 p 采用加法分离变量法, θ 采用常规分离变量法)

ψ 和 p 采用加法分离法, 而 θ 采用常规分离法. 由于 ψ 和 p 首先从微分方程组中得到, ψ 和 p 的解与前一节(19)~(22)式相同. θ 的分离则由 $\theta = X_\theta + Y_\theta + T_\theta$ 变为 $\theta = X_\theta Y_\theta T_\theta$, 代入方程(9), 得

$$X_\theta'' Y_\theta T_\theta + X_\theta Y_\theta'' T_\theta = c_1 X_\theta' Y_\theta T_\theta - c_4 X_\theta Y_\theta' T_\theta + X_\theta Y_\theta T_\theta'. \quad (40)$$

方程(40)两边同除以 $X_\theta Y_\theta T_\theta$, 得

$$\frac{X_\theta''}{X_\theta} + \frac{Y_\theta''}{Y_\theta} = c_1 \frac{X_\theta'}{X_\theta} - c_4 \frac{Y_\theta'}{Y_\theta} + \frac{T_\theta'}{T_\theta},$$

或者

$$\frac{T_\theta'}{T_\theta} = c_5 = \frac{X_\theta''}{X_\theta} - c_1 \frac{X_\theta'}{X_\theta} + \frac{Y_\theta''}{Y_\theta} + c_4 \frac{Y_\theta'}{Y_\theta}. \quad (41)$$

T_θ 首先由方程(41)左边得到

$$T_\theta = c_6 \cdot \exp(c_5 t). \quad (42)$$

分离方程(41)右边, 得到

$$X_\theta'' - c_1 X_\theta' - c_7 X_\theta = 0, \quad (43)$$

$$Y_\theta'' + c_4 Y_\theta' + (c_7 - c_5) Y_\theta = 0. \quad (44)$$

方程(43)和(44)均为二阶线性齐次微分方程, 可以解得:

$$\theta = NC = c_6 \exp(c_5 t) \cdot \theta_1(x) \cdot \theta_2(y). \quad (45)$$

当 $c_1^2 > -4c_7$,

$$\theta_1(x) = c_8 \exp\left[\left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_7}\right)x/2\right] + c_9 \exp\left[\left(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c_7}\right)x/2\right]; \quad (46a)$$

当 $c_1^2 < -4c_7$,

$$\theta_1(x) = \exp(c_1 x/2) \left[c_8 \sin\left(\sqrt{-c_1^2 - 4c_7} x/2\right) + c_9 \cos\left(\sqrt{-c_1^2 - 4c_7} x/2\right) \right]; \quad (46b)$$

当 $c_1^2 = -4c_7$,

$$\theta_1(x) = (c_8 + c_9 x) \exp(c_1 x/2); \quad (46c)$$

当 $c_4^2 > 4(c_7 - c_5)$,

$$\theta_2(y) = \exp(-c_4 y/2) \left[c_{10} \sin\left(\sqrt{4(c_7 - c_5) - c_4^2} y/2\right) + c_{11} \cos\left(\sqrt{4(c_7 - c_5) - c_4^2} y/2\right) \right]; \quad (47a)$$

当 $c_4^2 < 4(c_7 - c_5)$,

$$\theta_2(y) = \exp(-c_4 y/2) \left[c_{10} \sin\left(\sqrt{4(c_7 - c_5) - c_4^2} y/2\right) + c_{11} \cos\left(\sqrt{4(c_7 - c_5) - c_4^2} y/2\right) \right]; \quad (47b)$$

当 $c_4^2 = 4(c_7 - c_5)$,

$$\theta_2(y) = (c_{10} + c_{11} y) \exp(-c_4 y/2). \quad (47c)$$

若 $u = 0$ ($c_1 = 0$) 或者 $v = 0$ ($c_4 = 0$), 温度分布可以将 $c_1 = 0$ 或者 $c_4 = 0$ 代入解(46)和(47)式得到.

(20)~(22)和(45)~(47)式为采用该种混合分离变量法得到的另一组解. 由于 ψ 和 p 求解时与上一节所述方法一样, 所以速度场 u , v 及压力场 p 如前面一样, 如图 1 和 2 所示, 温度与浓度分布与上一节不同, 这是用混合分离变量法的结果.

4 第三组解析解(ψ 和 θ 采用加法分离变量法, p 采用常规分离变量法)

与前面两节类似, 各变量分离如 $\psi = X_\psi + Y_\psi$, $\theta = X_\theta + Y_\theta + T_\theta$, 方程(7)和(8)变为

$$Y'_\psi = -X'_p Y_p, \quad (48)$$

$$X'_\psi = X_p Y'_p + Ru. \quad (49)$$

由方程(48), 得到

$$-Y'_\psi / Y_p = c_1 = X'_p, \quad (50)$$

于是

$$X_p = c_1 x + c_2, \quad (51)$$

$$Y'_p = -Y''_\psi / c_1. \quad (52)$$

将方程(51)和(52)代入方程(49), 得到

$$X'_\psi = (c_1 x + c_2) (-Y''_\psi / c_1) + Ru, \quad (53)$$

或者

$$(X'_\psi - Ru) / (c_1 x + c_2) = c_3 = -Y''_\psi / c_1. \quad (54)$$

由方程(54)右边, 得到

$$Y_\psi = -c_1 c_3 y^2 / 2 + c_4 y + c_5; \quad (55)$$

由方程(52)得

$$Y_p = c_3 y - c_4 / c_1; \quad (56)$$

由方程(54)左边得

$$X_\psi = c_1 c_3 x^2 / 2 + (c_2 c_3 + Ru)x. \quad (57)$$

所以, 流函数, 压力, 速度分别为

$$\psi = X_\psi + Y_\psi = c_1 c_3 x^2 / 2 + (c_2 c_3 + Ru)x - c_1 c_3 y^2 / 2 + c_4 y + c_5, \quad (58)$$

$$p = (c_1 x + c_2)(c_3 y - c_4 / c_1), \quad (59)$$

$$u = -c_1 c_3 y + c_4, \quad (60)$$

$$v = -c_1 c_3 x - c_2 c_3 - Ru. \quad (61)$$

将(58)~(61)式代入方程(13), 除了 $c_3 = 0$ 情况外, 方程得不到其他代数显式解析解. 当 $c_3 = 0$ 时, 解仍为(19)~(21)和(29)式, 同时压力分布为(22)式的特例. 因此, 我们在第三组解中, 没有找到新的解, 但却证明了混合分离变量法的可行性.

5 第四组解析解(ψ 采用加法分离变量法, p 和 θ 采用常规分离变量法)

对于本节所述的分离方法, ψ, u, v 和 p 的解与前面相同. 当 $c_1 \neq 0$, θ 不能得到代数显式解.

当 $c_1 = 0$ 时, θ 为(45)~(47)式的特解. 因此, 在第四组解中, 我们没有找到新的代数显式解. 但同样证明, 混合分离变量法是可行的.

6 第五组解析解(ψ 采用常规分离变量法, p 和 θ 采用加法分离变量法)

这里, $\psi = X_\psi Y_\psi$, $p = X_p + Y_p$, $\theta = X_\theta + Y_\theta + T_\theta$; 方程(7)~(9)改为

$$X_\psi Y'_\psi = -X'_p, \quad (62)$$

$$X'_\psi Y_\psi = Y'_p + Ru, \quad (63)$$

和

$$X''_\theta + Y''_\theta = X_\psi Y'_\psi X_\theta - X'_\psi Y_\psi Y_\theta + T_\theta. \quad (64)$$

我们首先求解方程(62)和(63), 得到

$$Y'_\psi = c_1 = -X'_p / X_\psi, \quad (65)$$

$$X'_\psi = c_3 = (Y'_p + Ru) / Y_\psi. \quad (66)$$

于是得

$$Y_\psi = c_1 y + c_2, \quad (67)$$

$$X_\psi = c_3 x + c_4, \quad (68)$$

$$\psi = (c_1 y + c_2)(c_3 x + c_4), \quad (69)$$

$$u = \partial\psi / \partial y = c_1 (c_3 x + c_4), \quad (70)$$

$$v = -\partial\psi/\partial x = -c_3(c_1y + c_2), \quad (71)$$

$$X_p = -c_1(c_3x^2/2 + c_4x), \quad (72)$$

$$Y_p = c_1c_3y^2/2 + (c_2c_3 - Ru)y + c_5, \quad (73)$$

和

$$p = -c_1(c_3x^2/2 + c_4x) + c_1c_3y^2/2 + (c_2c_3 - Ru)y + c_5. \quad (74)$$

将上述解代入方程(9), θ 可以得

$$\begin{aligned} \theta = c_6t + c_7 + \int \left(\exp \left[c_1 \left(c_3x^2/2 + c_4x \right) \right] \left\{ c_8 \int \exp \left[-c_1 \left(c_3x^2/2 + c_4x \right) \right] dx + c_9 \right\} \right) dx \\ + \int \left(\exp \left[-c_3 \left(c_1y^2/2 + c_2y \right) \right] \left\{ (c_6 - c_8) \int \exp \left[c_3 \left(c_1y^2/2 + c_2y \right) \right] dy + c_{10} \right\} \right) dy. \end{aligned} \quad (75)$$

事实上, (75)式所求得结果的物理意义并不太明显, 并且(75)式不是显式的解析解, 但(75)式至少为一个解析解.

7 第六组解析解(ψ 和 θ 采用常规分离变量法, p 采用加法分离变量法)

与上节类似, ψ , u , v 和 p 的解为(69)~(71)和(74)式, 温度 θ 可以这样求得

$$X_\theta'' Y_\theta T_\theta + X_\theta Y_\theta'' T_\theta = c_1(c_3x + c_4) X_\theta' Y_\theta T_\theta - c_3(c_1y + c_2) X_\theta Y_\theta' T_\theta + X_\theta Y_\theta T_\theta'. \quad (76)$$

经过变换, 可改为

$$X_\theta''/X_\theta + Y_\theta''/Y_\theta = c_1(c_3x + c_4) X_\theta'/X_\theta - c_3(c_1y + c_2) Y_\theta'/Y_\theta + T_\theta'/T_\theta. \quad (77)$$

方程(77)仅当 $c_1 = 0$ 可以求得显式解析解. 在这种情况下, 所得到的最后结论与第三节相同.

8 第七组解析解(ψ 和 p 采用常规分离变量法)

如果 ψ 和 p 都采用常规的分离方法, 即假设 $\psi = X_\psi \cdot Y_\psi$, $p = X_p \cdot Y_p$, 我们没有找到任何解析解. 这也说明在某些情况下, 加法分离变量法在求解某些传热传质微分方程更有效. 本文中多孔介质中具有双浮力的自然对流方程(7)~(10)就是一个很好的例子.

9 结论

各种反映物理现象的基本数理方程的解析解, 既有其无可替代的理论意义, 也可作为标准解来校核各种数值计算, 甚至可以发展各种计算技巧. 本文提出了一种求解数理方程的方法——混合分离变量法. 对于不同的变量可以采用常规分离变量法 $F(t, x) = T(t) \cdot X(x)$ 与本文第一作者提出的加法分离变量法 $F(t, x) = T(t) + X(x)$ 相结合的分离方式. 本文以多孔介质中具有温度梯度与浓度梯度耦合的自然对流方程为例, 采用本文所提出的混合变量分离法, 得到多组代数显式解析解, 并发现它们在具有相同的流场(速度场与压力场)下会有不同的温度与浓度场. 文中还给出一些简单情况下的示意图以说明所得的解析解.

参考文献

- 1 Lamb H. Hydrodynamics. London: Cambridge University Press, 1932
- 2 Ozisik M N. Heat Conduction. Scranton: Int Textbook Co, 1980
- 3 Cai R, Jiang H, Sun C. Some analytical solutions applicable to verify 3-D numerical methods in turbomachines. IMechE Conf Publ, 1984, 80/84: 255—263
- 4 Gong Y, Cai R. Three-dimensional MSLM—a new engineering approach to the inverse problem of 3D cascade. ASME paper, 1989, 89-GT-48
- 5 Shen M, Liu Q, Zhang Z. Calculation of three-dimensional transonic flows in turbomachinery with generalized von Mises coordinate system. Sci China Ser A-Math Phys & Astron, 1996, 39(10): 1084—1095
- 6 Xu J, Shi J C, Ni W Y. Three-dimensional incompressible flow solution of an axial compressor using pseudostream-functions formulation. ASME paper, 1989, 89-GT-319
- 7 蔡睿贤, 张娜. 集成电路芯片非 Fourier 导热方程的显式解析解. 科学通报, 1998, 43(8): 824—828
- 8 Cai R, Zhang N. Unsteady 1-D analytical solutions for bio-heat transfer equations. Progr Nat Sci, 1998, 8(6): 733—739
- 9 Cai R, Zhang N, He Y. One-dimensional algebraic explicit solutions of unsteady non-Fourier heat conduction in a sphere. Progr Nat Sci, 1999, 9(1): 34—38
- 10 Cai R, Zhang N. Explicit analytical solutions of the coupled differential equations for porous material drying. Progr Nat Sci, 2000, 10(2): 152—157
- 11 Cai R, Zhang N. Some algebraically explicit analytical solution of unsteady nonlinear heat conduction. AMSE J Heat Transf, 2001, 123(6): 1189—1191 [DOI](#)
- 12 Cai R, Zhang N. Explicit analytical solutions of incompressible unsteady 2-D laminar flow with heat transfer. Int J Heat Mass Transf, 2002, 45(12): 2623—2627 [DOI](#)
- 13 Cai R, Zhang N. Explicit analytical solutions of the anisotropic brinkman model for the natural convection in porous media. Sci China Ser A, 2002, 45(6): 808—816
- 14 Cai R, Zhang N. Explicit analytical solutions of linear and nonlinear interior heat and mass transfer equation sets for drying process. ASME J Heat Transf, 2003, 125(1): 175—178 [DOI](#)
- 15 Cai R, Zhang N. Explicit analytical solutions of 2-D laminar natural convection. Int J Heat Mass Transf, 2003, 46(5): 931—934 [DOI](#)
- 16 Cai R, Zhang N. Algebraically explicit analytical solutions of unsteady conduction with variable thermal properties in cylindrical coordinates. Progr Nat Sci, 2004, 4(4): 314—321 [DOI](#)
- 17 Cai R, Zhang N. Algebraically explicit analytical solutions of unsteady conduction with variable thermal properties in spheroidal coordinates. ASME paper, 2004, IMECE 2004-60691
- 18 Cai R, Gou C, Li H. Algebraically explicit analytical solution of unsteady 3D nonlinear non-Fourier(hyperbolic) heat conduction. Int J Therm Sci, 2006, 45(9): 893—896 [DOI](#)
- 19 蔡睿贤, 苟晨华. 环管中非定常非 Newton 旋流的代数显式解析解. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2006, 36(4): 445—448
- 20 蔡睿贤, 苟晨华, 张娜. 多孔介质中考虑各向异性自然对流 Brinkman 模型的解析解(II). 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2005, 35(2): 113—120
- 21 Cai R, Gou C. Exact solutions of double diffusive convection in cylindrical coordinates with $Le = 1$. Int J Heat Mass Transf, 2006, 49(21-22): 3997—4002 [DOI](#)
- 22 Cai R, Zhang N, Liu W. Algebraically explicit analytical solutions of two-buoyancy natural convection in porous media. Progr Nat Sci, 2003, 13(11): 848—851 [DOI](#)
- 23 陈宝明, 王补宣, 方肇洪. 多孔介质自然对流中温度梯度与浓度梯度的相互耦合. 工程热物理学报, 1995, 16(2): 210—214