科学通报 2015 年 第 60 卷 第 34 期：3287 ~ 3293
专题：纪念广义相对论诞生100周年 进 展 www.scichina.com csb.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

圈量子引力的动力学

阳劲松①, 马永革②*

① 贵州大学理学院, 贵阳 550025;
② 北京师范大学物理学系, 北京 100875
* 联系人, E-mail: mayg@bnu.edu.cn

2015-08-18 收稿, 2015-09-28 接受, 2015-11-02 网络版发表
国家自然科学基金(11347006, 11235003, 11475023)、中央高校基本科研业务费专项资金、高校博士点基金和贵州大学自然科学基金(贵大人基合字(2013)47 号)资助

摘要 作为量子引力论的一种重要的候选理论, 圈量子引力已取得了长足的进展. 当今圈量子引力研究的一个核心而艰巨的课题是如何建立合理的量子动力学, 具体到圈量子引力的正则形式中, 动力学问题集中体现为合理构造密顿约束算符以及求解相应的约束方程. 本文介绍了圈量子引力的基本思想以及圈量子引力中量子动力学研究的最新进展. 新进展侧重于哈密顿约束算符的构造及其所定义的希尔伯特空间.

关键词
圈量子引力
量子动力学
哈密顿约束

100年前爱因斯坦开创性地提出广义相对论, 从而深刻地改变了人们对引力和时空的认识. 作为描述引力最为成功的理论, 广义相对论已经受住迄今为止的一切引力实验的检验. 然而理论本身也面临着两大挑战. 一方面, 奇性定理表明广义相对论在奇点处无法做可靠的物理预言, 暗示着广义相对论理论本身存在缺陷; 另一方面, 广义相对论的经典时空难以与物质场本质上的量子性相协调. 人们自然期望将量子力学的基本原理同广义相对论的基本思想相结合, 建立起一套完整的、量子化的广义相对论, 即量子引力论, 以克服经典广义相对论和量子场论的诸如奇性等重要问题. 自广义相对论诞生以来, 人们一直致力于寻求合理的量子引力论, 然而, 至今为止, 一个满意的量子引力论仍未完整地建立起来. 从量子化方案来看, 量子引力主要可分为微扰和非微扰量子化两种途径. 非微扰量子化方案无法贯彻执行广义相对论的背景不依赖这一核心思想, 备受不可重整化的困扰. 作为非微扰量子引力理论, 圈量子引力吸收了广义相对论的核心思想, 通过引入新的动力学变量, 成功地将广义相对论塑造成为一个联络动力学理论, 开启了引力非微扰量子化的大门. 经过20多年的发展, 圈量子引力已经取得了若干引人瞩目的研究成果[1~4]. 该理论框架下, 建立了一个数学上严格的圈量子引力的运动学希尔伯特空间, 理论本身自然地预言时空几何在Planck尺度有离散的结构[5~12]. 近年来, 圈量子引力的对称约化模型——圈量子宇宙学在一些关键问题的回答上, 已取得若干可喜的成就, 其继承了圈量子引力的核心思想和方法, 自然地避免了宇宙大爆炸奇性, 并且有利于给出宇宙早期暴涨[13~15]. 同时, 圈量子引力的基本思想和方法已被成功推广到高维引力理论[16]以及引力的标量——张量理论中[17,18].

当今圈量子引力研究的一个核心而艰巨的课题是如何建立合理的量子动力学. 具体到圈量子引力的正则形式和路径积分(协变)形式当中, 动力学问题集中体现为合理构造密顿约束算符与求解相应的约束方程, 以及传播振幅的合理表述. 基于Rovelli和Smolin的思想, 并采用适当的规则化方案, Thiemann在圈量子引力正则形式中首次提出一个数学上严格、物理上自洽的哈密顿约束算符, 并就哈密顿约束算

引用格式： 阳劲松, 马永革. 圈量子引力的动力学. 科学通报, 2015, 60: 3287–3293
Yang J S, Ma Y G. Quantum dynamics in loop quantum gravity (in Chinese). Chin Sci Bull, 2015, 60: 3287–3293, doi: 10.1360/N972015-00942

符的求解进行初步的探讨[19,20]. 另一方面, 圈量子引力的路径积分形式——自旋泡沫模型的动力学研究也取得了很大的进展, 给出了决定动力学的传播振幅, 同时为圈量子引力的正则形式下的哈密顿约束算符的构造提供一定的启发.

Thiemann的哈密顿约束算符的提出为圈量子引力正则形式下动力学研究奠定了坚实基础, 然而其算符本身也具有一些局限性. 一方面, Thiemann的哈密顿约束依赖于规则化过程中所采用三角剖分方式, 原则上应针对不同剖分方式作平均以消除哈密顿约束算符对剖分方式选取的依赖性. 然而, 至今为止, 一种自然的、统一的平均方式仍不得而知. 另一方面, 研究表明, 为避免量子约束代数反常, 要求哈密顿约束算符对自旋网络的平面顶点无作用, 为此Thiemann在其算符构造过程中提出如下要求: (1) 在规则化过程中针对平面顶点图进行了一种特殊退化的剖分方式; (2) 针对哈密顿约束所加的边与原来图的边之间的相交方式提出一种确切的、不自然的要求. 然而, 这两种处理方法本身存在不足之处: 做法(1)本质上排除其算符对平面顶点的作用, 而做法(2)使得算符的构造过于苛刻. 再者, 从量子理论一致性来看, 人们自然期望圈量子引力的正则形式与协变形式在量子动力学上能够相互匹配, 从而给出相同的物理预言. 研究表明, 协变形式给正则形式下的哈密顿约束如下启示: 哈密顿约束算符应能产生出新顶点. Thiemann 算符尽管能够在原来的量子态所依赖的图上通过附加弧(边)的方式产生出新的3价平面顶点, 但因其构造过程中人为地引入了相应的限制条件, 同时所得的算符依赖于剖分方式的选取, 因而不够自然. Alesci和Rovelli[21]构造出一种与协变形式下的量子动力学相匹配的哈密顿约束, 但该算符却决定一个反常的约束代数. 文献[22~24]提出另外一些哈密顿约束算符, 相应的约束代数不反常, 但由于约束算符不产生新顶点, 因而与协变形式下的量子动力学不匹配. 因此, 人们自然期待采取一种新的规则化方法以得到满足下述性质的哈密顿约束算符: (1) 相应的算符在适当的希尔伯特空间中能完好定义, 同时具有良好的对称性和量子不反常性; (2) 其产生新顶点; (3) 以一种自然的(非人为的)方式湮灭平面顶点. 最近, 我们针对哈密顿约束采用一种新的规则化方案, 得到满足上述3个关键性质的哈密顿约束算符[25], 朝着量子动力学问题的最终解决迈出一大步.

1 圈量子引力的基本结构

广义相对论的联络动力学形式为非微扰量子化奠定了理论基础. 在联络动力学框架下, 广义相对论的经典相空间由3-空间Σ上的一组正则变量$(A_a^i,\tilde{E}_j^b)$来刻画, 其中A_a^i为$su(2)$-李代数取值的联络1-形式场, $\tilde{E}_j^b$为权重为1的密度3标架场, 其中$a,b,c,\cdots$为空间指标, $i,j,k,\cdots=1,2,3$为内部指标. 密度化的3-标架场$\tilde{E}_i^a$可用对偶3-标架e_a^i表示成

$$\tilde{E}_i^a=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{abc}\varepsilon_{ijk}e_b^je_c^k\,\mathrm{sgn}(\det(e_a^i)),$$

其中$\tilde{\varepsilon}^{abc}$是权重为1的Levi-Cività张量密度, $\mathrm{sgn}(\det(e_a^i))$为对偶3-标架的行列式的符号, 而$\Sigma$的3-度规场$q_{ab}$可用对偶3-标架表示成$q_{ab}=e_a^ie_b^j\delta_{ij}$. 正则变量之间唯一的非平凡(非零)的泊松括号为

$$\{A_a^i(x),\tilde{E}_j^b(y)\}=\kappa\beta\delta_a^b\delta_j^i\delta^3(x,y), \tag{1}$$

其中$\kappa=8\pi G$, 而β为Barbero-Immirzi参数. 受狄拉克约束系统正则量子化以及规范场量子化思想的启发, 同时在量子化的过程中坚持背景不依赖的核心思想, 圈量子引力采用联络A_a^i沿1维边(曲线)e积分所得和乐$h_e(A)$以及密度3-标架$\tilde{E}_j^b$的对偶2-形式沿2维曲面S积分所成的通量$\tilde{E}_j(S)$作为基本变量. 对于给定的边$e:[0,1]\to\Sigma$, A_a^i沿e的和乐定义为

$$\begin{aligned}h_e(A)&=\mathscr{P}\exp\left(\int_e A\right)\\&=I_2+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_1}^1\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_n}^1\mathrm{d}t_n\ A(e(t_1))\cdots A(e(t_n)),\end{aligned} \tag{2}$$

其中$A(e(t))\equiv\dot{e}^a(t)A_a^j(e(t))\tau_j$, $\dot{e}^a(t)$为e的切矢, $\tau_j:=-\mathrm{i}\sigma_j/2$ (σ_j为泡利矩阵), $\mathscr{P}$为一个将边的参数以从小到大的方式自左向右进行排序的算符. Σ上有限数目的边e组成的一个图γ, 边的端点称为图的顶点, 用符号$E(\gamma)$和$V(\gamma)$分别标记γ中边的集合以及γ的顶点的集合. 通过将Σ上光滑联络所组成的经典位形空间$\mathscr{A}$延拓成为广义联络所组成的量子位形空间空间$\bar{\mathscr{A}}$, 同时在$\bar{\mathscr{A}}$上严格定义Ashtekar-Lewandowski测度$\mathrm{d}\mu_o$, 从而构造出圈量子引力的运动学希尔伯特空间$\mathscr{H}_{\mathrm{kin}}:=L^2(\bar{\mathscr{A}},\mathrm{d}\mu_o)$, 该希尔伯特空间上的量子态被称为柱函数. $\bar{\mathscr{A}}$上关于图γ的柱函数能表达成$f=f_\gamma\circ p_\gamma$的形式, 其中$p_\gamma(A)=(h_{e_1}(A),\cdots,h_{e_n}(A))$,

$e_1,\cdots,e_n$为γ的边, f_γ为$SU(2)^n$上的一个复数取值函数. 在柱函数空间$\mathrm{Cyl}(\bar{\mathscr{A}})$上定义内积, 按内积将$\mathrm{Cyl}(\bar{\mathscr{A}})$完备化即得$\mathscr{H}_{\mathrm{kin}}$. 基本变量$h_e(A)$和$\tilde{E}_j(S)$能自然地表示成为$\mathscr{H}_{\mathrm{kin}}$上的乘积算符和微分算符.

在联络动力学框架下, 广义相对论是由高斯约束、微分同胚约束以及哈密顿约束所组成的第一类约束系统. 对其进行量子化的一个关键的任务就是将上述约束量子化成相应的算符, 并进一步在量子层面上求解约束. 比较而论, 前两类约束易于处理[26], 而哈密顿约束的量子化及其求解已成为量子动力学的一个艰巨的任务.

2 哈密顿约束算符

广义相对论的联络动力学理论中, 纯引力场哈密顿约束的形式为

$$H(N)=\frac{1}{2\kappa}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\, N\frac{\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b}{\sqrt{\det(q)}}\left(\varepsilon_{ijk}F_{ab}^k-2(1+\beta^2)K_{[a}^iK_{b]}^j\right)$$
$$=:H^E(N)-T(N), \tag{3}$$

其中$F_{ab}^i\equiv 2\partial_{[a}A_{b]}^i+\varepsilon^i{}_{jk}A_a^jA_b^k$为联络$A_a^i$的曲率, $\sqrt{\det(q)}=|\det(\tilde{E}_i^a)|^{1/2}$为3-度规$q_{ab}$的行列式的平方根, $K_a^i=(A_a^i-\Gamma_a^i)/\beta$为Σ的外曲率, 而$\Gamma_a^i$为自旋联络, 其以如下复杂的形式依赖于正则变量$\tilde{E}_i^a$:

$$\Gamma_a^i=\Gamma_a^i(\tilde{E})=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\tilde{E}_k^b\left(2\partial_{[b}\underset{\sim a]}{E^j}+\tilde{E}_j^c\underset{\sim}{E_a^l}\partial_b\underset{\sim}{E_c^l}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\tilde{E}_k^b\left\{2\underset{\sim}{E_a^j}\frac{\partial_b[\det(\tilde{E}_m^d)]}{\det(\tilde{E}_n^e)}-\underset{\sim}{E_b^j}\frac{\partial_a\left[\det(\tilde{E}_m^d)\right]}{\det(\tilde{E}_n^e)}\right\},$$

式中的$\underset{\sim a}{E^i}$为$\tilde{E}_i^a$之逆. 函数$H^E(N)$和$T(N)$分别称为哈密顿约束的欧氏项和洛伦兹项. 按照正则量子化的一般程序, 将相空间上的函数进行量子化的基本步骤如下: 首先采用适当的规则化技术将相应的函数用基本变量进行改写, 然后将基本变量直接用对应的量子算符来替代以给出对应的规则化的量子算符, 最后通过适当方式拿掉规则化过程中所引入的规则子, 从而得到相应的量子算符. 由于$\sqrt{\det(q)}$和洛伦兹项的存在, 哈密顿约束(3)并非正则变量$(A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y))$的多项式的形式, 难于直接用基本变量进行改写, 哈密顿约束的量子化曾一度陷入困境.

2.1 Thiemann算符

Thiemann最先在哈密顿约束量子化上取得实质性的重大突破, 下面以哈密顿约束的欧氏项的量子化为例, 简要介绍Thiemann规则化的基本思想. 首先将表达式(3)中的积分区域Σ剖分成一系列的"小"四面体Δ, 从而Σ上的积分可表达成对所有Δ上的积分之和, 然后将"小"四面体Δ上的积分表达式用有直接算符对应的基本变量近似改写(近似程度由规则子来刻画), 进而用对应的算符替代以给出规则化的算符, 最后通过适当的方式拿掉规则子得到相应的哈密顿约束算符. 以$T(\varepsilon)$标记Σ的剖分, 参数ε刻画四面体Δ的"棱长". 对于每一个Δ, 任意挑选其一个顶角, 称之为Δ的基点, 并用$v(\Delta)$来标记, 同时将由$v(\Delta)$出发的3条边记为$s_I(\Delta)$, I=1,2,3. 极限$\varepsilon\to 0$对应于将Δ收缩至$v(\Delta)$. 通过剖分, 表达式(3)中的积分$\int_\Sigma$可由求和$\Sigma_\Delta\int_\Delta$来替代, 利用经典等式

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b}{\sqrt{\det(q)}}=\mathrm{sgn}\left(\det\left(e_a^i\right)\right)\tilde{\varepsilon}^{abc}e_c^k$$
$$=\mathrm{sgn}\left(\det\left(e_a^i\right)\right)\tilde{\varepsilon}^{abc}\frac{2}{\kappa\beta}\left\{A_c^l,V\right\}\delta_{kl},$$
$$\mathrm{tr}(\tau_k\tau_l)=-\frac{1}{2}\delta_{kl}, \tag{4}$$

将$H^E(N)$中的被积函数进行改写, 同时注意到, 对于充分小的ε, $h_{s_I(\Delta)}\equiv h_{s_I(\Delta)}(A)\approx \mathrm{I}_2+\varepsilon\dot{s}_I^a(\Delta)A_a^i\tau_i$, 则欧氏哈密顿约束可改写成如下形式[1,19]:

$$H^E(N)=\frac{1}{2\kappa}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x N\varepsilon_{ijk}\frac{\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b}{\sqrt{\det(q)}}F_{ab}^k$$
$$=-\frac{2}{\kappa^2\beta}\sum_{\Delta\in T}\int_\Delta \mathrm{d}^3x\bar{N}\tilde{\varepsilon}^{abc}\mathrm{tr}(F_{ab}\{A_c,V\})$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{3\kappa^2\beta}$$
$$\sum_{\Delta\in T}\bar{N}(v(\Delta))\varepsilon^{IJK}\mathrm{tr}\left(h_{\alpha_{IJ}(\Delta)}h_{s_K(\Delta)}\left\{h_{s_K(\Delta)}^{-1},V\right\}\right)$$
$$=:\lim_{\varepsilon\to 0}H_T^E(N), \tag{5}$$

其中$\bar{N}:=\mathrm{sgn}(\det(e_a^i))N$, $A_c:=A_c^k\tau_k$, 而$\tau_k(k=1,2,3)$为$su(2)$李代数的生成元, $V=\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\sqrt{|\det(\tilde{E}_i^a)|}$为Σ的体积函数, $\alpha_{IJ}(\Delta):=s_I(\Delta)\circ a_{IJ}\circ s_J^{-1}(\Delta)$为一个基于$v(\Delta)$的闭合圈, 其中$a_{IJ}$为Δ中由$s_I(\Delta)$的终点指向$s_J(\Delta)$的终点的一条边. 为简便起见, 下文将省去$N$的上横线. 将函数$V$用其量子算符$\hat{V}$替代, 和乐以和乐算符替代

(由于和乐作为一个乘积算符, 算符记号也被省略), 同时将泊松括号用对易子乘上 $1/(\mathrm{i}\hbar)$ 替代, 则规则化的欧氏哈密顿约束算符为

$$\begin{aligned}\hat{H}_T^E(N) &= \frac{2}{3\mathrm{i}\hbar\kappa^2\beta}\sum_{\Delta\in T} N(v(\Delta))\varepsilon^{IJK}\mathrm{tr}(h_{\alpha_{IJ}(\Delta)}h_{s_K(\Delta)}[h_{s_K(\Delta)}^{-1},\hat{V}]) \\ &= -\frac{2}{3\mathrm{i}\hbar\kappa^2\beta}\sum_{\Delta\in T} N(v(\Delta))\varepsilon^{IJK}\mathrm{tr}(h_{\alpha_{IJ}(\Delta)}h_{s_K(\Delta)}\hat{V}h_{s_K(\Delta)}^{-1}) \\ &=: -\frac{2}{3\mathrm{i}\hbar\kappa^2\beta}\sum_{\Delta\in T} N(v(\Delta))\hat{H}_\Delta^E. \end{aligned} \tag{6}$$

显然算符(6)依赖于剖分方式$T(\varepsilon)$的选取. 研究表明, $\hat{H}_\Delta^E$ 对柱函数f_γ的非平凡的作用对应于 $v(\Delta)\cap\gamma\neq\varnothing$, 从而启发我们对$\Sigma$进行与图$\gamma$相适配的剖分方式[19], 下面以$T(\gamma)$来标记图依赖的剖分. 则按图依赖的剖分所得到的规则化欧氏哈密顿约束算符对f_γ的作用化为

$$\begin{aligned}\hat{H}_\gamma^E(N)\cdot f_\gamma &:= \hat{H}_{T(\gamma)}^E(N)\cdot f_\gamma \\ &= -\frac{2}{3\mathrm{i}\hbar\kappa^2\beta}\sum_{v\in V(\gamma)} N(v)\frac{8}{E(v)}\sum_{v(\Delta)=v}\hat{H}_\Delta^E\cdot f_\gamma \\ &=: \sum_{v\in V(\gamma)} N_v'\hat{H}_v^E\cdot f_\gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $E(v):=C_{|E(v)|}^3$, 而$|E(v)|$为图γ中以v为端点的边的数目,

$$N_v' := -\frac{16}{3\mathrm{i}\hbar\kappa^2\beta}\frac{N(v)}{E(v)},$$

$$\hat{H}_v^E := \sum_{v(\Delta)=v}\varepsilon^{IJK}\mathrm{tr}(h_{\alpha_{IJ}(\Delta)}h_{s_K(\Delta)}\hat{V}h_{s_K(\Delta)}^{-1}).$$

类似地, 可将洛伦兹项量子化成相应的算符. 最后, 在Rovelli-Smolin拓扑中取算符极限 $\varepsilon\to 0$, 从而拿掉规则化参数, 从而得到一个定义在 $\mathscr{H}_{\mathrm{kin}}$ 上的哈密顿约束算符. 在文献[19,20]中, Thiemann也考虑了与(5)相应的一种对称的排序方式, 得到相应的对称形哈密顿约束算符.

2.2 Lewandowski-Sahlmann算符

尽管原始的Thiemann哈密顿约束算符被定义在运动学希尔伯特空间上, 但其可用对偶的方式定义到微分同胚不变的希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ 上, 然而相应的对偶算符不保 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ (也就是说其作用到微分同胚不变的态所得的态不再是微分同胚不变的态), 这就给哈密顿约束求解带来麻烦. 也就是说, 我们不能先将微分同胚约束求解掉而得到 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$, 然后在 $\mathscr{H}_{\mathrm{diff}}$ 上求解哈密顿约束而得到最终的物理希尔伯特空间. 为了解决上述困难, Lewandowski和Sahlmann[22]定义了一个新的、被称为几乎微分同胚不变态的希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{vtx}}$. 在该空间上, 作者利用Thiemann的量子化方法获得了一个对称的哈密顿约束算符, 并且该算符保该希尔伯特空间, 从而为量子哈密顿约束的求解带来了方便.

新的希尔伯特空间的构造如下. 对于Σ上给定的图γ, 以记号 $\mathrm{Diff}(\Sigma)_{V(\gamma)}$ 来标记保图顶点$V(\gamma)$不变的微分同胚, 同时以 $\mathrm{TDiff}(\Sigma)_\gamma$ 标记保γ不变的、平凡的微分同胚群. 对于任一 $f_\gamma\in\Phi\equiv\mathrm{Cyl}(\bar{\mathscr{A}})$, 定义如下的映射 $\eta:\Phi\to\Phi'$

$$\eta(f_\gamma) := \frac{1}{N_\gamma}\sum_{\varphi\in\mathrm{Diff}(\Sigma)_{V(\gamma)}/\mathrm{TDiff}(\Sigma)_\gamma}\hat{U}_\varphi\cdot f_\gamma, \tag{8}$$

其中Φ'为Φ的对偶空间, $\hat{U}_\varphi$ 为φ的酉表示, N_γ为归一化因子. 配备 $\Phi_{\mathrm{vtx}} := \eta(\Phi)$ 一个自然的内积 $\langle\eta(f)|\eta(g)\rangle := \eta(f)(g), \forall f,g\in\Phi$, Φ_{vtx} 按该内积完备化所得希尔伯特空间即为 $\mathscr{H}_{\mathrm{vtx}}$.

文献[22]中采用与Thiemann类似的规则化的方法, 得到了一个在 $\mathscr{H}_{\mathrm{vtx}}$ 上定义完好的哈密顿约束算符. 与Thiemann的规则化唯一不同的地方在于, 其作用到自旋网络所添加的新边是闭合圈, 该闭合圈除了顶点处外不再与原图相交. 因而Lewandowski-Sahlmann算符以不产生新顶点的方式在原图的顶点处添加闭合圈.

2.3 新算符

为了克服现有哈密顿约束算符的不足, 我们在文献[25]中提出了哈密顿约束的一种新的规则化方法. 与Thiemann对空间进行剖分的规则化方法不同, 我们采用点分离的规则化方法. 仍以哈密顿约束的欧氏项为例, 借助于特征函数 $\chi_\varepsilon(x,y)$, 其满足 $\lim_{\epsilon\to 0}\chi_\epsilon(x,y)/\varepsilon^3=\delta^3(x,y)$, 可将哈密顿约束的欧氏项点分离成

$$\begin{aligned}H^E(N) = \frac{1}{2\kappa}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\, N(x)V_{(x,\varepsilon)}^{-1/2}\varepsilon_{ijk}F_{ab}^i(x)\tilde{E}_j^a(x) \\ \int_\Sigma \mathrm{d}^3y\, \chi_\varepsilon(x,y)\tilde{E}_k^b(y)V_{(y,\varepsilon)}^{-1/2}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $V_{(x,\varepsilon)} := \varepsilon^3\sqrt{\det(q)}(x)$ 是一个以x为中心、以ε为半径的空间区域的体积, 进而采用文献[27]所发展的“半量子化”技术将上述表达式量子化. 这种量子化的基本思想是将对应的函数表达式中的各项按从右到左的先后顺序逐步量子化. 按此量子化技术, 原则

上来说，从经典表达式的不同排序出发将得到不同的量子算符．研究表明，按式(9)的排序方式所得到的算符形式最为简单，并且算符的性质良好，下文专注于这种排序．由于体积算符存在零点谱，因此简单地将 $V_{(y,\varepsilon)}^{-1/2}$ 定义为体积算符开根号之逆将面临算符无法完好定义的问题．文献[28]为该类问题的解决提供了指导思想，照此可定义出相应的定义完好的算符

$$\widehat{V_{(y,\varepsilon)}^{-1/2}} := \lim_{\lambda\to 0}(\hat{V}_{(y,\varepsilon)} + \lambda \ell_{\mathrm{p}}^3)^{-1}\hat{V}_{(y,\varepsilon)}^{1/2}. \tag{10}$$

通过将式(9)中的两个密度3-标架量子化为 $\hat{E}_k^b(y) = -\mathrm{i}\beta\ell_{\mathrm{p}}^2\delta/\delta A_b^k(y)$，其中 $\ell_{\mathrm{p}}^2 \equiv \hbar\kappa$，同时经详细的技术处理，可进一步将曲率 F_{ab}^i 量子化成为 A_a^i 一个沿闭合圈所得的和乐，最终将式(9)量子化成为[25]

$$\begin{aligned}\hat{H}_\delta^E(N)\cdot f_\gamma &:= \frac{\left(\beta\ell_{\mathrm{p}}^2\right)^2}{\kappa\mathcal{N}_\ell}\sum_{v\in V(\gamma)} N_v \widehat{V_v^{-1/2}} \\ &\quad \left[\sum_{e\cap e'=v}\mathrm{sgn}(e',e)\varepsilon_{ijk}\mathrm{tr}_\ell\left(h_{\alpha_{e'e}}\tau_i\right)J_{e'}^j J_e^k\right]\widehat{V_v^{-1/2}}\cdot f_\gamma \\ &=: \sum_{v\in V(\gamma)} N_v \sum_{e\cap e'=v}\hat{H}_{v,e'e}^E\cdot f_\gamma,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $N_v \equiv N(v)$，$\alpha_{e'e}$ 为 γ 中的交于顶点 v 的两条边与它们之间添加的一条新边所形成的一个闭合圈，该圈的大小由参数 δ 来刻画，

$$\mathrm{sgn}(e',e) := \mathrm{sgn}[\varepsilon_{ab}\dot{e}'^a(0)\dot{e}^b(0)]$$

为一个方向因子，而 $J_e^i \equiv -\mathrm{i}X_e^i$ 为右不变矢量场所对应的自伴算符．类似地，洛伦兹项可被量子化成为[25]

$$\begin{aligned}\hat{T}_\delta(N)\cdot f_\gamma &= \frac{2(1+\beta^2)\left(\beta\ell_{\mathrm{p}}^2\right)^2}{2\kappa}\sum_{v\in V(\gamma)} N_v \widehat{V_v^{-1/2}} \\ &\quad \left[\sum_{e\cap e'=v}\mathrm{sgn}(e',e)\hat{K}_{e'}^j\hat{K}_e^k J_{e'}^j J_e^k\right]\widehat{V_v^{-1/2}}\cdot f_\gamma,\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\hat{K}_e^i := -\frac{1}{\mathrm{i}\ell_{\mathrm{p}}^2\beta N_\ell}\mathrm{tr}_\ell\left(\tau_i h_{s_e}\left[h_{s_e}^{-1},\hat{\bar{K}}\right]\right), \hat{\bar{K}} := \frac{1}{\mathrm{i}\hbar\beta^2}\left[\hat{H}_\delta^E(1),\hat{V}\right],$$

上式中的 s_e 为边 e 中参数长度为 δ 的开始段，$N_\ell = -\ell(\ell+1)(2\ell+1)/3, \ell = 1/2, 1, 3/2, \cdots$．最终规则化的哈密顿约束算符的形式为

$$\hat{H}_\delta(N)\cdot f_\gamma := \sum_{v\in V(\gamma)} N_v\left(\hat{H}_v^E - \hat{T}_v\right)\cdot f_\gamma =: \sum_{v\in V(\gamma)} N_v \hat{H}_v\cdot f_\gamma. \tag{13}$$

容易看出由式(10)所定义的 $\widehat{V^{-1/2}}$ 具有与 $\hat{V}$ 相同的性质，因而其湮灭平面顶点．注意 $\widehat{V_v^{-1/2}}$ 出现在算符(12)和(13)表达式左右两边，因此这两个算符都具有湮灭平面顶点这一关键性质．研究表明，新哈密顿约束算符能被对偶地定义到保4价及以上非平面顶点位置不变的微分同胚不变的态所构成的希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{np4}}$ 上，成为 $\mathscr{H}_{\mathrm{np4}}$ 上完好定义的算符 $(\hat{H}(N))'$[25]．$\mathscr{H}_{\mathrm{np4}}$ 与 $\mathscr{H}_{\mathrm{vtx}}$ 主要的差别在于定义的过程中采用的是保持4价顶点不变的微分同胚态 $\mathrm{Diff}(\Sigma)_{V_{\mathrm{np4}}(\gamma)}$ 而非 $\mathrm{Diff}(\Sigma)_{V(\gamma)}$．在 $\mathscr{H}_{\mathrm{np4}}$ 上，按如下方式可定义出对称的哈密顿约束算符

$$(\hat{H}^{\mathrm{sym}}(N))' := \frac{1}{2}\left((\hat{H}(N))' + ((\hat{H}(N))')^\dagger\right), \tag{14}$$

其中 $((\hat{H}(N))')^\dagger$ 为 $(\hat{H}(N))'$ 的伴随算符．

3 总结

作为非微扰量子引力理论，圈量子引力贯彻了广义相对论背景不依赖的核心思想，为若干关键问题的解决注入新鲜血液，表现出强大的生命力，因而备受青睐．圈量子引力在取得若干重要进展的同时也面临着挑战，量子动力学问题仍然是圈量子引力的一个基本问题．在圈量子引力的正则理论中，Thiemann提出的哈密顿约束算符开启了圈量子引力动力学的大门．本文简单地介绍了圈量子引力框架下哈密顿约束的3种不同的量子化，分别得到相应的希尔伯特空间上定义完好的算符．Thiemann算符的一个主要优点在于其算符能够产生新的顶点，这一特征与圈量子引力路径积分量子化的动力学行为相符；其缺点在于为了避免量子约束代数反常，需要在哈密顿约束构造过程中加入一些不自然的人为要求．Lewandowski-Sahlmann算符的主要优点在于算符的求解上，可以在算符所定义希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\mathrm{vtx}}$ 上求解约束；不足的地方在于其算符不能产生新的顶点，因而与圈量子引力路径积分量子化的动力学不相符．我们最近构造的新算符在保持上述两种哈密顿约束算符优点的同时，克服了相应的缺点，向着圈量子引力动力学问题的解决迈进关键的一步．另一方面，圈量子引力的路径积分形式表现活跃，建立了相应的动力学模型，给出了顶点处的传播振幅．再者，圈量子引力正则和路径积分理论在动力学上的比较与联系正在积极探寻之中，为动力学问题的解决提供启发．总之，圈量子引力动力学研究正向前积极迈进．

参考文献

1 Thiemann T. Modern Canonical Quantum General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
2 Rovelli C. Quantum Gravity. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
3 Ashtekar A, Lewandowski J. Background independent quantum gravity: A status report. Class Quant Grav, 2004, 21: R53
4 Han M, Ma Y, Huang W. Fundamental structure of loop quantum gravity. Int J Mod Phys D, 2007, 16: 1397–1474
5 Thiemann T. A length operator for canonical quantum gravity. J Math Phys, 1998, 39: 3372–3392
6 Bianchi E. The length operator in loop quantum gravity. Nucl Phys B, 2009, 807: 591–624
7 Ma Y, Soo C, Yang J. New length operator for loop quantum gravity. Phys Rev D, 2010, 81: 124026
8 Rovelli C, Smolin L. Discreteness of area and volume in quantum gravity. Nucl Phys B, 1995, 442: 593–622
9 Ashtekar A, Lewandowski J. Quantum theory of geometry: I. Area operators. Class Quant Grav, 1997, 14: A55–A82
10 Ashtekar A, Lewandowski J. Quantum theory of geometry: II. Volume operators. Adv Theor Math Phys, 1998, 1: 388–429
11 Thiemann T. Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity. J Math Phys, 1998, 39: 3347–3371
12 Yang J, Ma Y. Graphical method in loop quantum gravity: I. Derivation of the closed formula for the matrix element of the volume operator. arXiv:1505.00223 [gr-qc]
13 Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P. Quantum nature of the big bang: Improved dynamics. Phys Rev D, 2006, 74: 084003
14 Ding Y, Ma Y, Yang J. Effective scenario of loop quantum cosmology. Phys Rev Lett, 2009, 102: 051301
15 Yang J, Ding Y, Ma Y. Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology. Phys Lett B, 2009, 682: 1–7
16 Bodendorfer N, Thiemann T, Thurn A. New variables for classical and quantum gravity in all dimensions: III. Quantum theory. Class Quant Grav, 2013, 30: 045003
17 Zhang X, Ma Y. Extension of loop quantum gravity to $f(R)$ theories. Phys Rev Lett, 2011, 106: 171301
18 Zhang X, Ma Y. Nonperturbative loop quantization of scalar-tensor theories of gravity. Phys Rev D, 2011, 84: 104045
19 Thiemann T. Quantum spin dynamics (QSD). Class Quant Grav, 1998, 15: 839–873
20 Thiemann T. Quantum spin dynamics (QSD): II. The kernel of the Wheeler-DeWitt constraint operator. Class Quant Grav, 1998, 15: 875–905
21 Alesci E, Rovelli C. A regularization of the Hamiltonian constraint compatible with the spinfoam dynamics. Phys Rev D, 2010, 82: 044007
22 Lewandowski J, Sahlmann H. Symmetric scalar constraint for loop quantum gravity. Phys Rev D, 2015, 91: 044022
23 Alesci E, Assanioussi M, Lewandowski J, et al. Hamiltonian operator for loop quantum gravity coupled to a scalar field. Phys Rev D, 2015, 91: 124067
24 Assanioussi M, Lewandowski J, Mäkinen I. New scalar constraint operator for loop quantum gravity. Phys Rev D, 2015, 92: 044042
25 Yang J, Ma Y. New Hamiltonian constraint operator for loop quantum gravity. Phys Lett B, 2015, 751: 343–347
26 Ashtekar A, Lewandowski J, Marolf D, et al. Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. J Math Phys, 1995, 36: 6456–6493
27 Thiemann T. Quantum spin dynamics (QSD): V. Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories. Class Quant Grav, 1998, 15: 1281–1314
28 Tikhonov A N. On the stability of inverse problems. Dokl Akad Nauk SSSR, 1943, 39: 195–198

Quantum dynamics in loop quantum gravity

YANG JinSong[1] & MA YongGe[2]

[1] *Department of Physics, Guizhou university, Guizhou 550025, China;*
[2] *Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

As an important alternative quantum theory of general relativity, loop quantum gravity has made considerable progress. At present, a key and difficult issue in loop quantum gravity is to build a reasonable quantum dynamics. In the canonical formulation of loop quantum gravity, it requires us to construct a reasonable Hamiltonian constraint operator and then solve the quantum constraint equation. In this paper, we will review the basic ideas of loop quantum gravity and its quantum dynamics. We will mainly focus on the construction of Hamiltonian constraint operators and the corresponding Hilbert spaces in which the Hamiltonian constraint operators can be well defined.

loop quantum gravity, quantum dynamics, Hamiltonian constraint

doi: 10.1360/N972015-00942