



2- 连通的平面图的边面染色

胡晓雪¹, 王艺桥², 王维凡^{1*}

1. 浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004;

2. 北京中医药大学管理学院, 北京 100029

E-mail: xxhu@zjnu.edu.cn, yqwang@bucm.edu.cn, wwv@zjnu.cn

收稿日期: 2016-10-31; 接受日期: 2017-09-11; 网络出版日期: 2017-12-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371328, 11671053, 11701541 和 11771402) 资助项目

摘要 一个平面图 G 的边面色数 $\chi_{\text{ef}}(G)$ 是最小的颜色数, 使得 G 中任意两条相邻的边、两个相邻的面、以及两个关联的边和面都染不同的颜色. 本文证明了, 若 G 是 $\Delta \geq 16$ 的 2- 连通平面图, 则 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$. 这改进了已知结果: 若 G 是 $\Delta \geq 24$ 的 2- 连通平面图, 则 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$.

关键词 平面图 边面染色 2- 连通 最大度

MSC (2010) 主题分类 05C15

1 引言

本文仅考虑简单图. 如果能将图 G 画到平面上, 使得所有边仅在端点处相交, 则称 G 是可平面图. 图的这种平面上的画法称为图的平面嵌入, 或称为平面图. 对于平面图 G , 我们分别用 $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $F(G)$ 、 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示它的顶点集、边集、面集、最大度和最小度. 若不产生混淆, 我们将 $\Delta(G)$ 简记为 Δ .

平面图 G 的一个边面 k - 染色是指一个映射 $\phi: E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 使得对于任意不同的相邻或相关联的元素 $x, y \in E(G) \cup F(G)$ 都有 $\phi(x) \neq \phi(y)$. G 的边面色数是指 G 有一个边面 k - 染色的数 k 的最小值, 用 $\chi_{\text{ef}}(G)$ 表示. 一方面, 根据定义, 显然有 $\chi_{\text{ef}}(G) \geq \chi'(G) \geq \Delta$. 另一方面, 根据边染色的 Vizing 定理和面染色的 “四色定理”, 可得到如下不等式:

$$\chi_{\text{ef}}(G) \leq \chi'(G) + \chi^*(G) \leq \Delta + 1 + 4 = \Delta + 5,$$

其中 $\chi'(G)$ 和 $\chi^*(G)$ 分别表示平面图 G 的边色数和面色数.

1975 年, Mel'nikov^[1] 猜想, 每个平面图 G 是边面 $(\Delta + 3)$ - 可染的. 关于这个猜想, 文献 [2, 3] 证明了 $\Delta = 3$ 的情形, 文献 [4] 证明了 $\Delta = 4$ 的情形, $\Delta \geq 8$ 的情形在文献 [5] 中被证明. 1997 年, Waller^[6] 及 Sanders 和 Zhao^[7] 分别独立地证明了这个猜想. 但他们的证明都用到了 “四色定理”. 两个不用 “四

英文引用格式: Hu X X, Wang Y Q, Wang W F. Edge-face coloring of 2-connected plane graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 671–686, doi: 10.1360/SCM-2016-0677

色定理”的证明分别发表在文献 [8,9] 中. 2004 年, Wang 和 Lih^[10] 加强了这个结论, 即证明了每个平面图 G 是边面 $(\Delta + 3)$ - 可选的. 目前, 人们仅能找到奇圈可以达到 $\Delta + 3$ 的上界, 因此, Sanders 和 Zhao 提出了一个更强的猜想, 即每个 $\Delta \geq 3$ 的平面图 G 是边面 $(\Delta + 2)$ - 可染的. 对于这个新的猜想, $\Delta \geq 7$ 的情形在文献 [9] 中被证明, 文献 [11] 解决了 $\Delta = 3$ 的情形, 而 $\Delta = 6$ 的情形在文献 [12] 中被证实. 然而, $\Delta = 4$ 和 $\Delta = 5$ 的情形至今仍未得到证明. Borodin^[5] 证明了 $\Delta \geq 10$ 的平面图 G 是边面 $(\Delta + 1)$ - 可染的. 2011 年, Sereni 和 Stehlík^[13] 将 $\Delta \geq 10$ 的这个条件改进到 $\Delta = 9$, 接着 Kang 等^[14] 又改进到 $\Delta = 8$. 显然, $\Delta + 1$ 这个上界对于这类平面图是紧的, 因为树 T 满足 $\chi_{\text{ef}}(T) = \Delta + 1$.

2005 年, Luo 和 Zhang^[15] 证明了, 每一个 $\Delta \geq 24$ 的 2- 连通的简单平面图 G 有 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$. 本文将改进这个结果, 即证明如下定理:

定理 1.1 若 G 是一个 $\Delta \geq 16$ 的 2- 连通的简单平面图, 则 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$.

我们不直接证明定理 1.1, 而是证明下面一个等价的结论:

定理 1.2 令 G 是一个 2- 连通的简单平面图, 且 $k = \max\{16, \Delta\}$, 则 $\chi_{\text{ef}}(G) \leq k$.

用反证法证明定理 1.2. 假设 G 是定理 1.2 的一个反例, 使得 $\sigma(G) = |V(G)| + |E(G)|$ 尽可能的小. 那么, G 是一个 2- 连通的简单的平面图, 但不是边面 k - 可染的, 然而任意一个 2- 连通的简单平面图 H 满足 $\sigma(H) < \sigma(G)$ 都是边面 k - 可染的. 根据一系列辅助的引理和应用权转移的方法, 我们可以证明这样的反例图 G 是不存在的.

2 预备知识

令 G 是一个 2- 连通的平面图. 对于面 $f \in F(G)$, 我们用 $b(f)$ 表示面 f 的边界. 若 f 的边界点依顺时针方向排列为 $u_1, u_2, \dots, u_n$, 则记 $f = [u_1 u_2 \cdots u_n]$. 因为 G 是 2- 连通的, 所以 $b(f)$ 是一个圈. 简记 $V(f) = V(b(f))$ 和 $E(f) = E(b(f))$. 对于 $x \in V(G) \cup F(G)$, 令 $d_G(x)$ (或者简记 $d(x)$) 表示 x 在 G 中的度数. 若一个顶点的度数为 i (至多 i , 或者至少 i), 则分别称这个顶点为 i - 点 (i^- - 点, 或者 i^+ - 点). 类似地, 可定义 i - 面、 i^- - 面和 i^+ - 面. 对于一个顶点 $v \in V(G)$, 令 $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的邻点组成的集合. 对于一个正整数 $j \geq 2$, 令 $n_j(f)$ 表示与面 f 关联的 j - 点的个数. 令 $\delta(f) = \min_{v \in V(f)} d(v)$, 它表示 $V(f)$ 中度数最小的顶点的度数.

若 G 中的一个圈 C 满足内部和外部都至少包含 G 中的一个顶点, 则称 C 是分离的. 令 $V^0(C)$ 表示圈 C 内部的顶点组成的集合. 收缩 G 中的一条边 e 是指删除这条边且黏合这条边的两个端点. 收缩 G 中的一条边 e 所得到的图记作 $G \cdot e$. 若一个 2- 点 v 不在分离 3- 圈上, 则称 v 是正常的.

令 $k = \max\{16, \Delta\}$. 设 $C = \{1, 2, \dots, k\}$ 表示 k 个颜色的集合. 对于 $A \subseteq E(G) \cup F(G)$, G 中在 A 上的一个部分边面 k - 染色是指一个映射 $\phi: A \rightarrow C$, 使得 A 中任意一对相邻或相关联的边和面都染不同的颜色. 对于 G 中在 A 上的一个部分边面 k - 染色和一个顶点 $v \in V(G)$, 令 $C_\phi(v)$ 表示在染色 ϕ 之下 A 中与 v 关联的边所染的颜色组成的集合. 若不产生混淆, 则用 $C(v)$ 表示 $C_\phi(v)$.

若 G 中的面 f 满足 $d(f) \leq \frac{k-1}{2}$, 则称 f 是小面. 若 G 中的边 xy 满足 $d(x) + d(y) - t(xy) \leq k - 1$, 则称 xy 是小边, 这里 $t(xy)$ 表示与边 xy 关联的小面的个数. 显然, $t(xy) \leq 2$. 令 F_s 和 E_s 分别表示 G 中小面和小边组成的集合. 对于一个面 $f^* \in F(G)$, 令 $F_s(f^*)$ 表示与 f^* 相邻且属于 F_s 中的面的集合, $E_s(f^*)$ 表示与 f^* 关联且属于 E_s 中的边的集合. 面 f^* 满足 $2d(f^*) - n_2(f^*) - |E_s(f^*)| - |F_s(f^*)| \leq k - 1$, 则称它为轻边; 否则, 称它为重边.

定理 1.2 的证明将基于下面的 4 个引理, 其中引理 2.2 的证明可参见文献 [15, 引理 2.2].

引理 2.1 每个偶圈都是边 2- 可选的.

引理 2.2 令 $S \subseteq E_s \cup F_s$. 若存在一个部分边面 k - 染色 $\phi: (E(G) \cup F(G)) \setminus S \rightarrow C$, 则染色 ϕ 可被拓展到整个图 G .

引理 2.3 设 $e = uv \in E(G)$ 关联一个面 $f \in F_s$. 若 $d(u) + d(w) \leq k$, 则 $G - e$ 不是 2- 连通的且 $G \cdot e$ 不是简单图.

证明 反设 $G - e$ 是 2- 连通的或者 $G \cdot e$ 是简单的. 令 $H = G - e$ 或者 $H = G \cdot e$. 根据 G 的极小性, H 有一个边面 k - 染色 ϕ . 现在 ϕ 可以被看作 G 的一个部分边面染色使得 f 和 e 没有染色. 因为 $t(e) \geq 1$ 且 $d(u) + d(v) - t(e) \leq k - 1$, 可以推出 $e \in E_s$. 由引理 2.2, e 和 f 可以被染好. 所以 G 有一个边面 k - 染色, 得到矛盾. $\square$

引理 2.4 设 $f = [uvw]$ 是 G 的一个 3- 面且 $3 \leq d(v) \leq d(u) \leq d(w)$, 则 $G - uv$ 或 $G - vw$ 是 2- 连通的.

证明 用反证法证明. 假设 $G - uv$ 和 $G - vw$ 都不是 2- 连通的. 因为 $d(v) \geq 3$, 所以存在一个顶点 $x \in N_G(v) \setminus \{u, w\}$. 因为 G 是 2- 连通的, 所以 v 和 u 都不是 $G - uv$ 中的一个割点. 这表明 w 是 $G - uv$ 中的一个割点. 因此, 在 $G - uv$ 中, x 到 u 的任意一条路都必须经过顶点 v . 类似地, 在 $G - vw$ 中, x 到 w 的任意一条路都必须经过顶点 v . 所以, 在 $G - v$ 中, x 和 $\{u, w\}$ 必须属于不同的分支. 也就是说, $G - v$ 是不连通的, 与我们假设 G 是 2- 连通的矛盾. $\square$

3 可约子图

给定面 f 以及它的一条边界边 e , 用 f_e 表示一个面, 它与 f 相邻且共用边 e . 若 f_1 和 f_2 是 G 的两个面且 $e \in b(f_1) \cap b(f_2)$, 令 $f_1 \oplus f_2$ 表示 $G - e$ 中由边界 $(b(f_1) \cup b(f_2)) \setminus \{e\}$ 组成的一个面.

引理 3.1、3.3 和 3.4 的证明可参见文献 [15].

引理 3.1 若一个 2- 点 v 的两个邻点 u 和 w 满足 $uw \notin E(G)$, 则 $d(u), d(w) \geq k - 2$.

引理 3.1 隐含着 G 不包含相邻的 2- 点.

引理 3.2 设 $f = [uvw]$ 是一个 3- 面且 $d(v) = 2$ 和 $d(u) \geq d(w)$, 则 $d(u) = k$ 且 $d(w) \geq 4$.

证明 反设 $d(u) \leq k - 1$ 或 $d(w) \leq 3$. 由引理 3.1, 有 $d(w) \geq 3$. 令 $H = G - v$, 则 H 是一个 2- 连通的平面图且满足 $\sigma(H) < \sigma(G)$. 由 G 的极小性, H 有一个使用颜色集合 C 的边面 k - 染色 ϕ . 设 f' 是 G 中与 f 相邻的面且 $v \in V(f) \cap V(f')$. 首先给面 f' 染 $\phi(f \oplus f')$. 然后, 为了给边 uv 和 vw 染色, 假设 $\phi(uw) = p$ 和 $\phi(f') = q$. 证明分为下面两种情形:

情形 1 $d(u) \leq k - 1$.

因为 $d(w) \leq d(u)$, 所以可得到 $|C \setminus C(u)| \geq 2$ 且 $|C \setminus C(w)| \geq 2$. 因此可令 $\{a_1, a_2\} \subseteq C \setminus C(u)$ 和 $\{b_1, b_2\} \subseteq C \setminus C(w)$.

(1) 若 $|\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\}| \leq 1$, 则不妨令 $b_1 \notin \{a_1, a_2\}$. 若 $q \notin \{a_1, a_2\}$, 则给 vw 染 $c \in \{b_1, b_2\} \setminus \{q\}$, 然后给 uv 染一个属于 $\{a_1, a_2\} \setminus \{c\}$ 中的颜色. 若 $q \in \{a_1, a_2\}$, 不失一般性, 假设 $q = a_1$, 则给 vw 染 b_1 , 给 uv 染 a_2 .

(2) 若 $|\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\}| = 2$, 则不失一般性, 令 $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2 = 2$. 若 $q \notin \{1, 2\}$, 则给 uv 和 vw 分别染 1 和 2. 若 $q \in \{1, 2\}$, 则给 uw 染 q , 给 uv 染 p , 给 vw 染一个属于 $\{1, 2\} \setminus \{q\}$ 中的颜色. 因为 H 是 2- 连通的, 所以有 $q \neq \phi(f_{uw})$. 因此, uw 可以被正常染好.

情形 2 $d(w) = 3$.

显然, $|C \setminus C(u)| \geq 1$, 且 $q \notin C(w)$. 我们首先染边 uv . 若 $q \notin C \setminus C(u)$, 则给 uv 染一个颜色属于 $C \setminus C(u)$. 若 $q \in C \setminus C(u)$, 则给 uv 重染 q , 给 uv 染 p . 因为 vw 至多有 $d(w) + d(v) - 2 + 2 = 5$ 个禁用色, 所以在这两种情形下我们都可以正常给 vw 染好颜色.

最后, 由 $f \in F_s$, 根据引理 2.2, 可知染色 ϕ 可被拓展到整个图 G , 得到矛盾. $\square$

引理 3.3 若 $f = [xyzu]$ 是一个 4- 面且 $d(x) = d(z) = 2$, 则 $d(y) = d(u) = k$.

对于本文中的插图, 实心黑点表示除了我们所画出的相关联的边之外, 在 G 中没有其他边与它相关联. 反之, 空心点在 G 中的其他相关联的边和相邻的点可能没有在图中画出. 图中所有的三角形和四边形分别表示 G 中的 3- 面和 4- 面.

引理 3.4 假设 $f_3 = [\cdots uv_1vv_2w \cdots]$ 与两个 3- 面 $f_1 = [uvv_1]$ 和 $f_2 = [v_1vv_2]$ 相邻, 使得 $d(v_1) = d(v_2) = 2$, 如图 1(a) 所示, 则 $d(v) \geq k - 2$.

引理 3.5 若一个 2- 点 v 关联一个 3- 面 $[uvw]$ 和一个轻面 f , 则 $d(u) = d(w) = k$.

证明 根据引理 3.2, $d(u), d(w) \geq 4$. 反设 $d(u) \leq k - 1$ (若 $d(w) \leq k - 1$, 我们可以类似地证明). 因为 $G - v$ 是 2- 连通的, 所以有一个应用色集合 C 的边面 k - 染色 ϕ . 基于 ϕ , 我们依次地给 vw 、 uv 和 f 染色. 因为 vw 至多有 $|C(w)| \leq k - 1$ 个禁用色, uv 至多有 $|C(u)| + 1 \leq k - 2 + 1 = k - 1$ 个禁用色, f 至多有 $k - 1$ 个禁用色, 所以它们都可以被正常染好. 由引理 2.2 知, G 有一个边面 k - 染色, 得到矛盾. $\square$

引理 3.6 对于 $m \in \{2, 3\}$, G 不含面 $f = [x_1x_2 \cdots x_{2m}]$ 使得 $d(x_2) = d(x_4) = \cdots = d(x_{2m}) = 2$, 且与 f 相邻的每个面都是轻面.

证明 反设 G 中存在这样的面 f . 显然 $f \in F_s$. 若 $x_1x_3 \in E(G)$, 则令 $H = G - x_2$ 且 $f' = f \oplus f_{x_1x_2}$; 若 $x_1x_3 \notin E(G)$, 则令 $H = G - x_2 + x_1x_3$ 且 $f' = [x_1x_3 \cdots x_{2m}]$. 显然, H 是 2- 连通的简单平面图且满

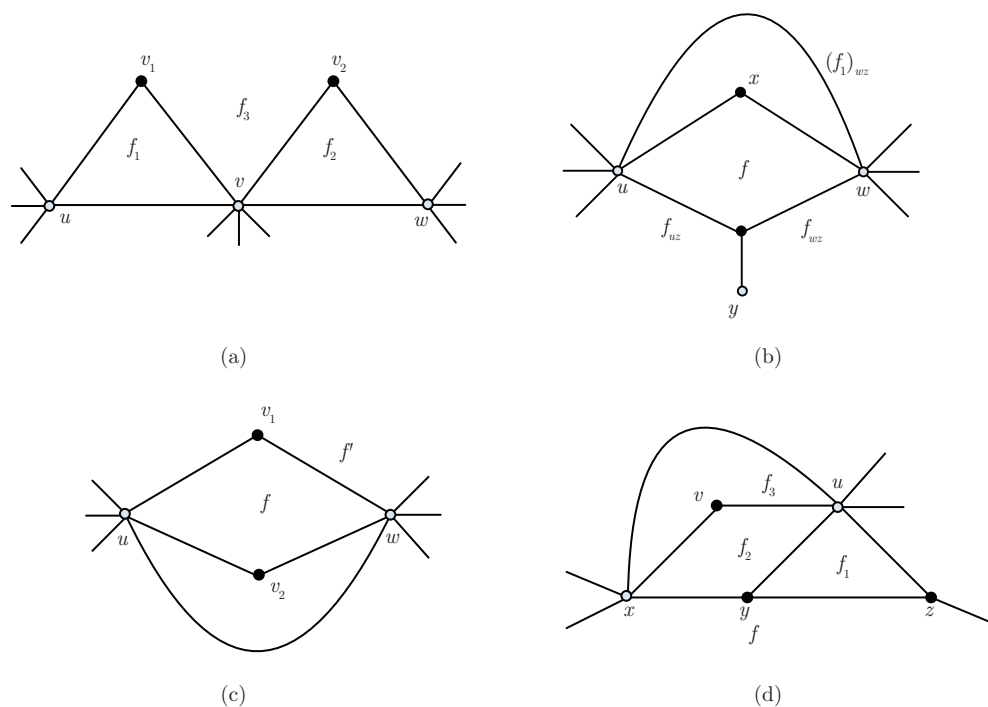


图 1 引理 3.4、3.10、3.13 和 3.14 中的结构

是 $\sigma(H) < \sigma(G)$. 由 G 的极小性, H 有一个边面 k -染色 ϕ . 我们抹去集合 $F_s \cup E_s \cup \{f'\} \cup (E(f) \setminus \{x_1x_2, x_2x_3\})$ 中所有成员的颜色. 容易看到每条边 $e \in E(f)$ 都至少有两个可用色, 所以, 根据引理 2.1, $E(f)$ 中的每条边都可以被正常染好. 最后, 由引理 2.2, 我们得到 G 的一个边面 k -染色, 推出矛盾. $\square$

引理 3.7 假设 $f = [x_1x_2x_3]$ 是一个 3-面且 $d(x_1) \leq d(x_2) \leq d(x_3)$. 若 $3 \leq d(x_1) \leq 5$, 则 $d(x_1) + d(x_3) \geq k + 1$.

证明 反设 $d(x_1) + d(x_3) \leq k$. 显然, $x_1x_2, x_1x_3 \in E_s$. 由引理 2.4 知, $G - x_1x_3$ 或者 $G - x_1x_2$ 是 2-连通的, 不失一般性, 假设 $G - x_1x_3$ 是 2-连通的. 基于 $G - x_1x_3$ 的一个边面 k -染色 ϕ , 我们给 $f_{x_1x_3}$ 染颜色 $\phi(f \oplus f_{x_1x_3})$, 然后由引理 2.2, 依次地将 x_1x_3 和 f 正常染好. 因而得到 G 的一个边面 k -染色, 与 G 的假设矛盾. $\square$

引理 3.8 假设 $f = [uvw]$ 是一个 3-面使得 $d(u) = d(v) = 3$. 令 $u_1 \in N_G(u) \setminus \{v, w\}$ 和 $v_1 \in N_G(v) \setminus \{u, w\}$, 则 $\max\{d(u_1), d(v_1)\} \geq k - 2$.

证明 反设 $d(u_1) \leq k - 3$ 和 $d(v_1) \leq k - 3$. 由引理 2.3 知, $G - uv$ 不是 2-连通的. 由引理 2.4 知, $G - uw$ 是 2-连通的, 则有一个使用 C 的边面 k -染色 ϕ . 首先, 我们给面 f_{uw} 染 $\phi(f \oplus f_{uw})$. 然后抹去 vv_1, uu_1 和 uv 的颜色. 令 $\phi(vw) = 1$ 和 $\phi(f_{uw}) = 2$. 因为 w 不是 G 中的一个割点, 所以有 $\phi(f_{vw}) \neq 2$. 若存在一个颜色 $c \in C \setminus (C(w) \cup \{2\})$, 则我们给 uw 染 c . 否则, 可以推出 $2 \notin C(w)$. 只需给 vw 改染 2, 给 uw 染 1. 因为 uu_1 和 vv_1 的每一个都至多有 $k - 4 + 1 + 2 = k - 1$ 个禁用色, 所以它们能被正常染好. 因为 $uv \in E_s$ 和 $f \in F_s$, 所以由引理 2.2 可知, ϕ 可被拓展到整个图 G , 与 G 的假设矛盾. $\square$

引理 3.9 假设 $f = [uvw]$ 是一个 3-面且 $\delta(f) \geq 3$. 若 $d(u) \leq 5$ 和 $d(v) \leq 11$, 则 f_{uv} 是一个重面.

证明 反设 f_{uv} 是一个轻面. 显然, $f \in F_s$. 因为 $d(u) + d(v) - t(uv) \leq 5 + 11 - 1 = 15 \leq k - 1$, 所以 $uv \in E_s$. 由引理 2.3 知, $G - uv$ 不是 2-连通的. 易见 w 是 $G - uv$ 中唯一的割点, 且 $G - uv$ 可被边剖分成两个 2-连通的平面子图 G_1 和 G_2 使得 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{w\}$ 且 $F(G_1) \cap F(G_2) = \{f \oplus f_{uv}\}$. 由 G 的极小性知, G_i 有一个应用色集合 C 的边面 k -染色 $\phi_i, i = 1, 2$. 抹去 $E_s \cup F_s \cup \{f \oplus f_{uv}\}$ 中所有成员的颜色, 然后选择 ϕ_1 和 ϕ_2 使得 $N_{G_1}(w)$ 中的任意一条边的颜色都与 $N_{G_2}(w)$ 中的边的颜色不同. 将染色 ϕ_1 和 ϕ_2 结合起来, 可以得到 G 的一个部分边面 k -染色 ϕ , 使得 uv, f, f_{uv} 和 $E_s \cup F_s$ 中的元素未被染色. 基于 ϕ , 首先给面 f_{uv} 正常染色, 然后由引理 2.2 知, 小边和小面也可以被正常染好. 因此 ϕ 可被拓展到整个图 G , 得到矛盾. $\square$

引理 3.10 假设一个 4-面 $f = [uxwz]$ 与一个 3-面 $f_1 = [uxw]$ 相邻, 使得 $d(x) = 2$ 和 $d(z) = 3$, 如图 1(b) 所示. 若 $(f_1)_{uw}$ 是一个轻面, 则 f_{uz} 和 f_{wz} 都是重面.

证明 反设 f_{uz} 是一个轻面 (若 f_{wz} 是一个轻面, 我们可以类似地讨论). 令 y 是 z 的第三个邻点且与 u 和 w 不同. 因为 $G - x$ 是 2-连通的, 所以有一个应用色集合 C 的边面 k -染色 ϕ . 首先抹去 $E_s \cup F_s \cup \{f_{uz}, (f_1)_{uw}, f \oplus f_1\}$ 中所有成员的颜色. 若 $C(u) \neq C(w)$, 或 $|C(u)| \leq k - 2$, 或 $|C(w)| \leq k - 2$, 则可以给 ux 和 wx 正常染色. 否则, 假设 $C(u) = C(w) = \{1, 2, \dots, k - 1\}$ 使得 $\phi(uw) = 1, \phi(uz) = 2$ 和 $\phi(wz) = 3$. 若 $\phi(yz) \neq k$, 则给 $\{uz, wx\}$ 重染或染 k 且给 ux 染 2. 若 $\phi(yz) = k$, 则给 $\{uz, wx\}$ 重染或染 1, 给 ux 染 2, 给 uw 染 k . 然后, 依次地给 $f_{uz}, (f_1)_{uw}, f, f_1$ 以及其他小边和小面正常染色. 这建立了 G 的一个边面 k -染色, 得到矛盾. $\square$

引理 3.11 假设 $f = [x_1x_2x_3x_4]$ 是一个 4-面且 $\delta(f) \geq 3$. 若 $d(x_1) = 3$, 则 $\max\{d(x_2), d(x_4)\} \geq k - 2$.

证明 反设 $d(x_i) \leq k-3$, 其中 $i = 2, 4$, 则 $f \in F_s$, 且 $x_1x_i \in E_s$ 使得 $d(x_1) + d(x_i) - t(x_1x_i) \leq k-1$. 由引理 2.3 知, 对于每一个 $i = 2, 4$, $G - x_1x_i$ 有一个割点且 $G \cdot x_1x_i$ 不是简单图.

断言 1 $x_1x_3 \in E(G)$.

证明 假设 $x_1x_3 \notin E(G)$. 令 y 是 x_1 的第三个邻点, 即不同于 x_2 和 x_4 . 因为 $G - x_1x_i$ 有一个割点, 所以在 G 中没有从 y 到 x_i 的不包含边 x_1x_i 的路. 又据引理 2.3 和 $x_1x_3 \notin E(G)$, $G \cdot x_1x_i$ 中有重边, 故有 $x_2x_4 \in E(G)$. 因此, $x_1x_2x_4x_1$ 是 G 的一个分离 3-圈. 这表明 x_1 是 G 的一个割点, 与 G 是 2-连通的假设矛盾. $\square$

断言 2 对于 $i = 2, 4$, x_3 是 $G - x_1x_i$ 中唯一的割点.

证明 显然, x_2 和 x_3 是 $G - x_1x_4$ 的可能的割点. 由断言 1 知, x_2 不可能是割点. 因此, x_3 是 $G - x_1x_4$ 的唯一割点. 对于 $G - x_1x_2$, 我们可以类似地讨论. $\square$

由断言 1 和 2, $\{x_1, x_3\}$ 是 G 的一个割集, 且 $G - \{x_1, x_3\}$ 仅包含两个分支. 不失一般性, 设为 Q_1 和 Q_2 . 令 $G_i = G - V(Q_i)$, 其中 $i = 1, 2$, 则 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1, x_3\}$, $E(G_1) \cap E(G_2) = \{x_1x_3\}$, 且 G_1 和 G_2 都是 2-连通的简单平面图. 在 G 中, 令 $f_2 = f_{x_1x_4}$, $f_1 = (f_2)_{x_1x_3}$, 如图 2 所示. 显然 $f_1 \in F(G_1)$, $f_2 \in F(G_2)$. 由 G 的极小性, 对于 $i = 1, 2$, G_i 有一个使用色集合 C 的边面 k -染色 ϕ_i . 显然, 我们可以做出下面约定: (i) $\phi_1(x_1x_3) = \phi_2(x_1x_3) = 1$; (ii) $C_{\phi_1}(x_3) \cap C_{\phi_2}(x_3) = \{1\}$.

令 $\phi_1(f_1) = a$ 和 $\phi_2(f_2) = b$, 则 $a, b \neq 1$. 若 $a = b$, 则由 (ii), 可假设 $a \notin C_{\phi_1}(x_3)$. 由引理 3.2, 有 $d_{G_2}(x_3) \geq 3$, 进一步 $|C_{\phi_2}(x_3) \setminus \{1\}| \geq 2$. 重新排列 $(C_{\phi_2}(x_3) \cup \{a\}) \setminus \{1\}$ 中的颜色, 可以得到 G_2 的一个新的边面 k -染色使得 $a \neq b$. 因此, 不失一般性, 假设 $a \neq b$. 抹去 G_1 中 3-面 $[x_1x_2x_3]$ 的颜色和 G_2 中 3-面 $[x_1x_3x_4]$ 的颜色. 将 G_1 和 G_2 组合在一起, 且将染色 ϕ_1 和 ϕ_2 结合起来, 得到 G 的一个部分边面 k -染色 ϕ , 使得元素 f 、 x_1x_2 和 x_1x_4 未被染色. 又因为所有未染颜色的元素都属于 $E_s \cup F_s$, 所以由引理 2.2, ϕ 可被拓展到整个图 G , 与 G 的假设矛盾. $\square$

引理 3.12 若 $f = [x_1x_2x_3x_4x_5]$ 是一个 5-面使得

$$d(x_1) = d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = 3,$$

则 $d(x_5) \geq 6$.

证明 若 $x_1x_3 \in E(G)$, 则 x_2 是 G 的一个割点. 于是, $x_1x_3 \notin E(G)$. 类似地, $x_2x_4 \notin E(G)$. 因为 $d(x_2) + d(x_3) = 3 + 3 = 6 < k$ 且 $f \in F_s$, 则由引理 2.3 知, $G - x_2x_3$ 有一个割点且 $G \cdot x_2x_3$ 不是简单图. 得到 $x_2x_5, x_3x_5 \in E(G)$, 且 x_5 是 $G - x_2x_3$ 的一个割点. 这表明 $x_1x_2x_5x_1$ 和 $x_3x_4x_5x_3$ 构成 G 的两个分离 3-圈. 显然, $G - \{x_5, x_2x_3\}$ 有两个分支, 不妨设为 Q_1 和 Q_2 . 令 $G_i = G - V(Q_i)$, 其中 $i = 1, 2$, 则 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_5\}$, $x_1 \in V(G_1)$, $x_4 \in V(G_2)$, 且 G_1 和 G_2 是 2-连通的简单平面图. 这样, 对于

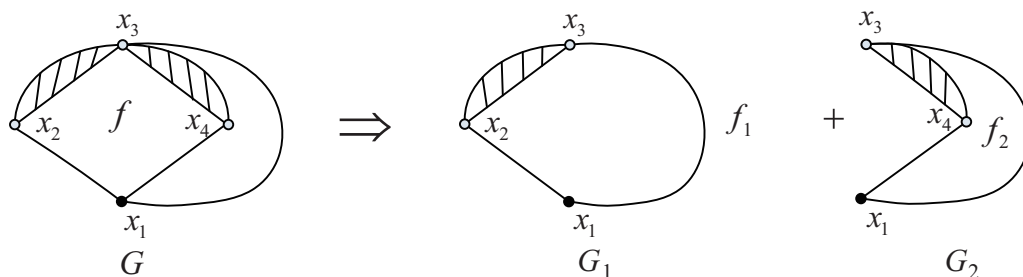


图 2 引理 3.11 证明中的结构

$i = 1, 2$, 有 $d_{G_i}(x_5) \geq 2$. 令 v 是 G 中 x_1 的一个邻点且不同于 x_2 和 x_5 . 若 $d_{G_1}(x_5) = 2$, 则 x_1 是 G 的一个割点. 因此, $d_{G_1}(x_5) \geq 3$. 类似地, $d_{G_2}(x_5) \geq 3$. 故 $d(x_5) = d_{G_1}(x_5) + d_{G_2}(x_5) \geq 3 + 3 = 6$. $\square$

引理 3.13 图 G 不包含一个 4-面 $f = [uv_1wv_2]$ 使得 $d(v_1) = d(v_2) = 2$ 且与一个 3-面 $f_1 = [uv_2w]$ 相邻, 如图 1(c) 所示.

证明 反设 G 包含这样的面 f . 假设 f' 是 G 中与 v_1 关联的面且不同于面 f . 令 $H = G - v_1 - v_2$, 则 H 是 2-连通的简单图. 根据 G 的极小性, H 有一个使用颜色集合 C 的一个边面 k -染色 ϕ . 首先给 f' 染 $\phi(f' \oplus f \oplus f_1)$. 因为 H 是 2-连通的, $(f_1)_{uw}$ 与 $f' \oplus f \oplus f_1$ 不是一个面. 故可设 $\phi(f') = 1$, $\phi((f_1)_{uw}) = 2$, 且 $\phi(uw) = 3$.

对于任意的一条边 $e \in E(f)$, 我们用 $L(e)$ 表示边 e 可用的颜色组成的集合. 为了给 $E(f)$ 中的边正常染色, 根据对称性, 我们需要考虑下面三种情形:

(1) 若 $1 \in C(u) \cap C(w)$, 则显然有 $|L(uv_i)| = |C \setminus C(u)| = k - (d(u) - 2) \geq k - (\Delta - 2) \geq 2$, 其中 $i = 1, 2$. 类似地, $|L(wv_i)| \geq 2$, $i = 1, 2$. 由引理 2.1 知, $E(f)$ 中的所有边都可以被正常染好.

(2) 若 $1 \notin C(u)$ 且 $1 \in C(w)$, 则 $|L(uv_1)| \geq 1$, $|L(uv_2)| \geq 2$ 和 $|L(wv_i)| \geq 2$, $i = 1, 2$. 令 $a \in L(uv_1)$. 若 $a \notin L(wv_1)$, 则先给 uv_1 染 a , 然后可依次地染好边 uv_2 , wv_2 和 wv_1 . 若 $a \in L(wv_1)$, 则 $a \in L(wv_2)$, 给 $\{uv_1, wv_2\}$ 染 a , 然后 uv_2 和 wv_1 也可被正常染好.

(3) 若 $1 \notin C(u) \cup C(w)$, 则 $|L(uv_1)|, |L(wv_1)| \geq 1$ 且 $|L(uv_2)|, |L(wv_2)| \geq 2$. 令 $c \in L(wv_1)$. 给 uw 重染 1, 给 $\{uv_1, wv_2\}$ 染 3, 给 wv_1 染 c , 给 uv_2 染一个在 $L(uv_2) \setminus \{3\}$ 中的颜色.

最后, 因为 $f, f_1 \in F_s$, 所以引理 2.2 断言 ϕ 能被拓展到整个图 G , 得到矛盾. $\square$

引理 3.14 图 G 不含顶点 u 关联三个连续的面 $f_1 = [uyz]$, $f_2 = [xyuv]$ 和 $f_3 = [uvx]$, 使得 $d(v) = 2$ 和 $d(y) = d(z) = 3$, 如图 1(d) 所示.

证明 反设 G 中存在这样的顶点 u , 则 $H = G - v$ 是 2-连通的. 由 G 的极小性知, H 有一个应用色集合 C 的边面 k -染色 ϕ . 首先抹去 yz , f_1 和 $f_2 \oplus f_3$ 的颜色. 因为 $f_1, f_2, f_3 \in F_s$ 且 $yz \in E_s$, 由引理 2.2, 可以给 uv 和 vx 正常染好. 显然, 若 uv 和 vx 不能被正常染好, 则可推出 $C(u) = C(x)$ 且 $|C(u)| = k - 1$. 不妨设 $C(u) = \{1, 2, \dots, k - 1\}$. 给 uv 染 (或重染) $\phi(uy)$, 给 $\{uy, vx\}$ 染 k . 于是 ϕ 被拓展到整个图 G , 得到矛盾. $\square$

4 权转移

为了用权转移的方法得到矛盾, 我们由 G 定义一个新图 H : 若没有 2-点在分离 3-圈上, 令 $H = G$. 否则, 选择一个通过 2-点的且内点含的最少的分离 3-圈 T , 然后令 $H = G[V^0(T) \cup V(T)]$. 把 $V^0(T)$ 中的顶点称作 H 中的内点. 设 f_0 表示 H 的无界面, 则记 $F^0(H) = F(H) \setminus \{f_0\}$. 对于任一个顶点 $v \in V^0(T)$, 显然有 $d_H(v) = d_G(v)$. 由引理 3.1 知, H 不包含相邻的内部 2-点.

因为 G 是 2-连通的, 所以 H 也是 2-连通的. 根据 T 的选择可知, $V^0(T)$ 中的任意一个 2-点都不在 H 的分离 3-圈上. 由平面图 Euler 公式 $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$, 我们推出下面恒等式:

$$\sum_{v \in V(H)} (3d_H(v) - 8) + \sum_{f \in F(H)} (d_H(f) - 8) = -16. \quad (4.1)$$

设 w 表示 H 的权函数, 即当 $x \in V(H)$ 时, $w(x) = 3d_H(x) - 8$; 当 $x \in F(H)$ 时, $w(x) = d_H(x) - 8$. 下面将 H 的顶点和面的权重重新分配, 使得总和和不变, 但是最终的权函数 w' 满足 (i) 对于所有的

$x \in V^0(T) \cup F^0(H)$, 有 $w'(x) \geq 0$; (ii) $w'(f_0) + \sum_{x \in V(T)} w'(x) \geq -\frac{47}{3}$. 这样, 我们得到如下一个矛盾:

$$-\frac{47}{3} \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} w'(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} w(x) = -16. \quad (4.2)$$

完成了证明.

在下面的讨论中, 对于 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V(H) \cup F(H)$, 令 $\tau(x_1 \rightarrow x_4)$ 表示 x_1 直接转给 x_4 的权值; $\tau(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4)$ 表示 x_1 通过 x_2 转给 x_4 的权值; $\tau(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4)$ 表示 x_1 通过 x_2 然后再通过 x_3 转给 x_4 的权值.

权转移规则定义如下:

(R0) 假设 $T = [u_0 u_1 u_2]$ 使得 $d_H(u_0) = 2$. 令 f_1 是 H 的一个面, 它与 $u_1 u_2$ 关联且与 f_0 相邻. 若 f_1 是一个 3- 面且与 A_8 类型的面 f_2 相邻, 则 $\tau(f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow f_2) = \frac{2}{3}$ (见图 3).

(R1) 假设 $v \in V(H)$ 使得 $d_H(v) \geq 3$. 令 $f \in F(H)$ 是一个与 v 相关联的面. 若 $v \in V(T)$, 或者 $v \in V^0(T)$ 满足 $d_H(v) \geq 16$, 则 $\tau(v \rightarrow f) = \frac{5}{2}$; 否则,

$$\tau(v \rightarrow f) = \frac{3d_H(v) - 8}{d_H(v)}.$$

(R2) 假设 $v \in V^0(T)$ 使得 $d_H(v) = 2$. 对于每一个 $f \in F^0(H)$ 且与 v 关联的面, 令 $\tau(f \rightarrow v) = 1$.

(R3) 假设 $f, f' \in F^0(H)$ 使得 $3 \leq d_H(f) \leq 4$, 且 f' 是 A_i 结构, 如图 4 所示. 定义下面规则:

(R3.1) 若 f 是一个 A_1 结构, 则 $\tau(f' \rightarrow v \rightarrow f) = 1$.

(R3.2) 假设 f 是一个 A_2 结构. 若 $w \in V(T)$, 则 $\tau(f' \rightarrow v \rightarrow f) = 1$; 否则, $\tau(f' \rightarrow v \rightarrow f) = \frac{5}{2}$.

(R3.3) 若 f 是一个 A_3 结构, 则 $\tau(f' \rightarrow v \rightarrow f) = \frac{15}{14}$.

(R3.4) 若 f 是一个 A_4 结构且 $u, v \in V^0(T)$, 则 $\tau(f' \rightarrow f) = \frac{40}{21}$.

(R3.5) 若 f 是一个 A_5 结构且 $u, v \in V^0(T)$, 则 $\tau(f' \rightarrow f) = \frac{26}{21}$.

(R3.6) 若 f 是一个 A_6 结构, 则 $\tau(f' \rightarrow v_1 \rightarrow f) = 1$.

(R3.7) 若 f 是一个 A_7 结构且 $v_2 \in V^0(T)$, 则 $\tau(f' \rightarrow f) = \frac{2}{3}$.

(R3.8) 若 f 是一个 A_8 结构且 $v_2 \in V^0(T)$, 则 $\tau(f' \rightarrow [uv_1 w] \rightarrow v_1 \rightarrow f) = \frac{2}{3}$.

设 w' 表示在 H 上执行完规则 (R0)–(R3) 后所得到的新的权函数. 对于所有的 $x \in V(H) \cup F(H)$, 我们需要计算 $w'(x)$. 首先, 由规则 (R1), 下面表 1 给出了顶点 $v \in V^0(T)$ 转给它的关联面 f 的权数 $\tau(v \rightarrow f)$.

令 $v \in V^0(T)$, 则 $d_H(v) \geq 2$. 若 $d_H(v) = 2$, 则由 (R2), v 从与它相关联的每个面中得到 1. 故 $w'(v) = -2 + 1 \times 2 = 0$.

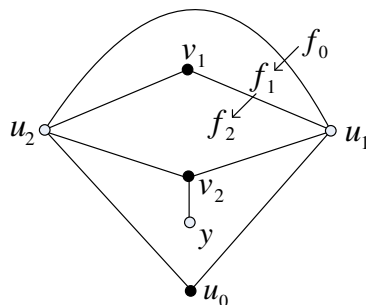


图 3 权转移规则 (R0)

若 $3 \leq d_H(v) \leq 15$, 则由 (R1), 有

$$w'(v) \geq 3d_H(v) - 8 - \frac{3d_H(v) - 8}{d_H(v)} \cdot d_H(v) = 0.$$

若 $d_H(v) \geq 16$, 则表 1 说明

$$w'(v) \geq 3d_H(v) - 8 - \frac{5}{2}d_H(v) \geq 0.$$

为了讨论方便, 定义下面的一些符号 (如图 4 所示):

$S_1 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_1 \text{ 结构}\},$

$S_2 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_2 \text{ 结构且 } w \in V^0(T)\},$

$S_3 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_2 \text{ 结构且 } w \in V(T)\},$

$S_4 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_3 \text{ 结构}\},$

$S_5 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_4 \text{ 结构且 } u, w \in V^0(T)\},$

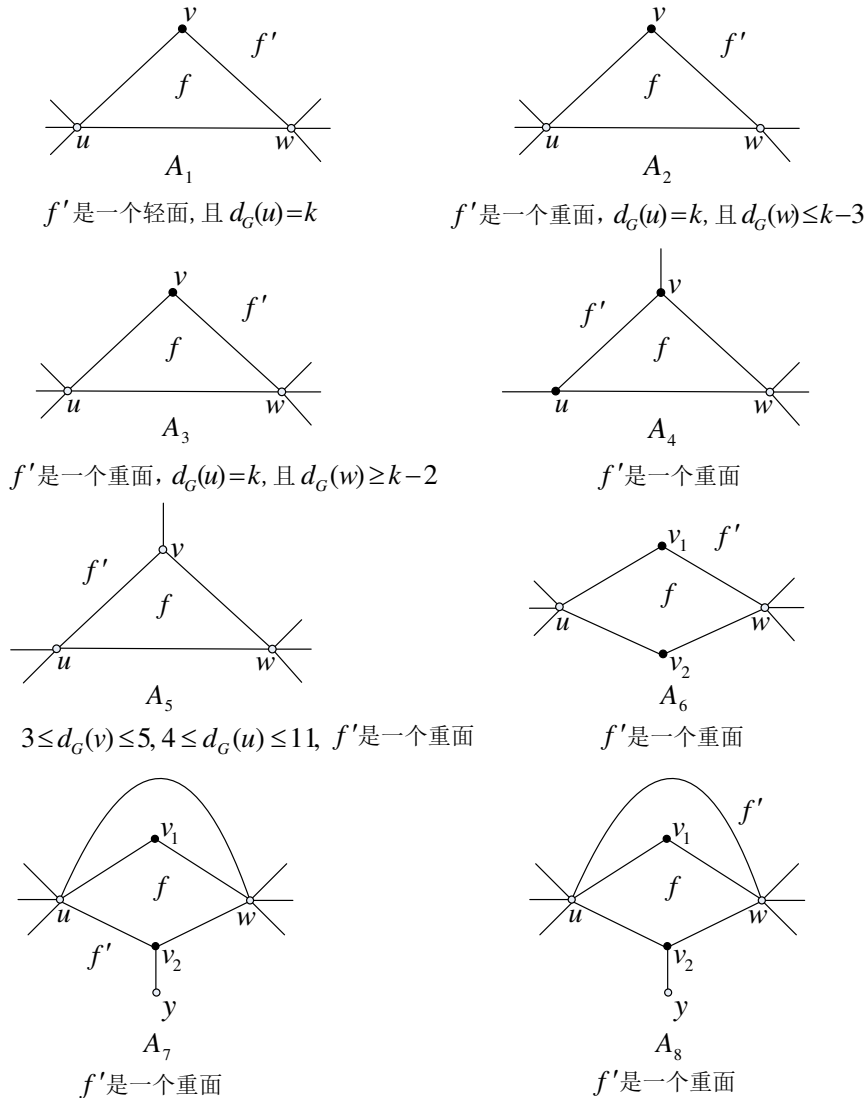


图 4 (R3) 中的 $(A_1)-(A_8)$ 结构

表 1 一个内点转给它的关联面的权值

$d_H(v)$	≥ 16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
$\tau(v \rightarrow f)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{37}{15}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{31}{13}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{25}{11}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{19}{9}$	2	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{1}{3}$

$S_6 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_5 \text{ 结构且 } u, w \in V^0(T)\},$

$S_7 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_6 \text{ 结构}\},$

$S_8 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_7 \text{ 结构且 } v_2 \in V^0(T)\},$

$S_9 = \{f \in F^0(H) \mid f \text{ 是 } A_8 \text{ 结构且 } v_2 \in V^0(T)\}.$

对于 $1 \leq i \leq 9$, 一个面 f^* 称为与 S_i 中的一个面 f 是相邻的, 如果 f^* 与 H 中如图 4 的所示的 f 相邻. 设 $p_i(f^*)$ 表示与 f^* 相邻且在 S_i 中的面的个数, 其中 $i = 1, 2, \dots, 9$.

令 $f = [x_1 x_1 \cdots x_d] \in F^0(H)$, 其中 $d \geq 3$. 我们考虑下面几种情形.

情形 1 $d = 3$.

注意到 $w(f) = -5$. 我们进一步考虑下面两种子情形.

情形 1.1 $\delta(f) = 2$, 不妨设 $d_H(x_1) = 2$.

显然, $x_1 \in V^0(T)$. 由 (R2), 有 $\tau(f \rightarrow x_1) = 1$. 令 $f' = f_{x_1 x_2}$, 则 $f' \in F^0(H)$. 考虑下面两种可能性.

(1) f' 是一个轻面, 即 f 是 A_1 结构. 由 (R3.1), 有 $\tau(f' \rightarrow x_1 \rightarrow f) = 1$. 对于 $i = 2, 3$, 若 $x_i \in V^0(T)$, 则由引理 3.5, 有 $d_H(x_i) = k$, 所以, x_i 转 $\frac{5}{2}$ 给面 f . 若 $x_i \in V(T)$, 则由 (R1), 同样有 $\tau(x_i \rightarrow f) = \frac{5}{2}$. 因此, $w'(f) \geq -5 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 0$.

(2) f' 是一个重面. 若 x_2 和 x_3 分别转 $\frac{5}{2}$ 给 f , 则由表 1 及规则 (R3.2) 和 (R3.3), 可得到 $w'(f) \geq -5 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} + \min\{1, \frac{15}{14}, \frac{5}{2}\} = 0$. 否则, x_2 和 x_3 中至多有一个顶点属于 $V(T)$. 由对称性, 我们分下面两种情形讨论:

(i) $x_2 \in V(T)$ 且 $x_3 \in V^0(T)$. 若 $d_H(x_3) \geq k - 2 \geq 14$, 则 f 是一个 A_3 结构. 由表 1 和规则 (R3.3), 有 $w'(f) \geq -5 - 1 + \frac{5}{2} + \frac{17}{7} + \frac{15}{14} = 0$. 反之假设 $d_H(x_3) \leq k - 3$. 于是, f 是一个 A_2 结构. 由引理 3.5, 有 $d_H(x_3) \geq 4$. 由表 1 和规则 (R3.2), 有 $w'(f) \geq -5 - 1 + \frac{5}{2} + 1 + \frac{5}{2} = 0$.

(ii) $x_2, x_3 \in V^0(T)$. 假设 $d_H(x_2) \leq d_H(x_3)$. 由引理 3.2, 有 $d_H(x_2) \geq 4$ 且 $d_H(x_3) = k$. 若 $d_H(x_2) \geq k - 2 \geq 14$, 则 f 是一个 A_3 结构. 由表 1 和 (R3.3), 有 $w'(f) \geq -5 - 1 + \frac{5}{2} + \frac{17}{7} + \frac{15}{14} = 0$. 若 $d_H(x_2) \leq k - 3$, 则 f 是一个 A_2 结构. 由表 1 和 (R3.2), 有 $w'(f) \geq -5 - 1 + \frac{5}{2} + 1 + \frac{5}{2} = 0$.

情形 1.2 $\delta(f) \geq 3$.

若 x_1, x_2 和 x_3 中至少有两个顶点分别转 $\frac{7}{3}$ 给 f , 则由表 1 和 (R1), 有 $w'(f) \geq -5 + 2 \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = 0$. 否则, $|V(f) \cap V(T)| \leq 1$. 根据对称性, 考虑下面两种可能性:

情形 1.2.1 $x_1 \in V(T)$ 且 $x_2, x_3 \in V^0(T)$.

由 (R1), 有 $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{5}{2}$. 假设 $d_H(x_2) \leq d_H(x_3)$. 若 $d_H(x_2) \geq 5$, 则由表 1, 有 $\tau(x_i \rightarrow f) \geq \frac{7}{5}$, $i = 2, 3$. 因此推出 $w'(f) \geq -5 + \frac{5}{2} + 2 \times \frac{7}{5} = \frac{3}{10}$. 假设 $d_H(x_2) \leq 4$. 若 $d_H(x_3) \geq 12$, 则由 (R1) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -5 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. 若 $d_H(x_3) \leq 11$, 则由引理 3.9 知, $f_{x_2 x_3}$ 是一个重面. 若 $d_H(x_2) = d_H(x_3) = 3$, 则 f 是一个 A_4 结构. 由 (R3.4) 知, f 从 $f_{x_2 x_3}$ 中得到 $\frac{40}{21}$. 因此, 由表 1, 有 $w'(f) \geq -5 + \frac{5}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{40}{21} = \frac{1}{14}$. 否则, f 是一个 A_5 结构. 由 (R3.5) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -5 + \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{26}{21} = \frac{1}{14}$.

情形 1.2.2 $x_1, x_2, x_3 \in V^0(T)$.

假设 $d_H(x_1) \leq d_H(x_2) \leq d_H(x_3)$. 由引理 3.7, 有 $d_H(x_1) + d_H(x_3) \geq k + 1$. 若 $d_H(x_1) \geq 6$, 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -5 + 3 \times \frac{5}{3} = 0$. 若 $d_H(x_2) \geq 12$, 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -5 + 2 \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = 0$. 假设 $d_H(x_1) \leq 5$ 且 $d_H(x_2) \leq 11$. 引理 3.9 断言 $f_{x_1x_2}$ 是一个重面. 若 $d_H(x_2) = d_H(x_3) = 3$, 则 f 是 A_4 结构. 由表 1 和 (R3.4), 有 $w'(f) \geq -5 + \frac{17}{7} + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{40}{21} = 0$. 否则, f 是一个 A_5 结构. 由表 1 和 (R3.5), 有 $w'(f) \geq -5 + \frac{17}{7} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{26}{21} = 0$.

情形 2 $d = 4$.

显然, $w(f) = -4$. 若 $\delta(f) \geq 4$, 则由表 1 和 (R1), 有 $w'(f) \geq -4 + 1 \times 4 = 0$. 于是假设 $2 \leq \delta(f) \leq 3$. 证明分成下面两种情形:

情形 2.1 $\delta(f) = 3$.

若 $V(f)$ 包含两个顶点, 使得每一个都至少转 $\frac{5}{3}$ 给 f , 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -4 + 2 \times \frac{5}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$. 否则, $V(f)$ 中至多只有一个顶点的度是大于或等于 6, 且 $|V(f) \cap V(T)| \leq 1$. 不妨设 $x_2, x_3, x_4 \in V^0(T)$. 首先假设 $x_1 \in V(T)$. 由引理 3.11 知, x_2, x_3 和 x_4 中至多有两个顶点是 3- 点. 所以, 由表 1 和 (R1), 有 $w'(f) \geq -4 + \frac{5}{2} + 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. 其次假设 $x_1 \in V^0(T)$. 因为 $\delta(f) = 3$, 不妨设 $d_H(x_1) = 3$. 由引理 3.11 知, x_2 和 x_4 至少有一个顶点的度至少为 $k - 2 \geq 14$, 不失一般性, 假设 $d_H(x_2) \geq 14$. 若 $d_H(x_4) \geq 4$, 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -4 + \frac{17}{7} + 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$. 若 $d_H(x_4) = 3$, 则由引理 3.11, 有 $d_H(x_3) \geq 14$, 与前面的假设矛盾.

情形 2.2 $\delta(f) = 2$.

由引理 3.1 知, 2- 点在 H 中不相邻, 故可推出 $1 \leq n_2(f) \leq 2$. 首先假设 $n_2(f) = 2$, 不妨设 $d_H(x_1) = d_H(x_3) = 2$. 由引理 3.3、表 1 和 (R1), 对 $i = 2, 4$, 有 $\tau(x_i \rightarrow f) = \frac{5}{2}$. 若 x_1 和 x_3 至少有一个顶点属于 $V(T)$, 例如, $x_1 \in V(T)$, 则显然有 $x_2, x_4 \in V(T)$, 且由引理 3.13 知, x_3 不与 3- 面相关联. 由 (R1) 和 (R2), 有 $w'(f) \geq -4 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} = 0$. 否则, 假设 $x_1, x_3 \in V^0(T)$. 由引理 3.6 知, f 至少相邻一个重面. 于是 f 是 A_6 结构. 由 (R2)、(R3.6) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -4 - 1 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 0$.

接下来假设 $n_2(f) = 1$, 不妨设 $d_H(x_1) = 2$. 若 $x_1 \in V(T)$, 则显然有 $x_2, x_4 \in V(T)$ 且 f 不转权给 $V(f)$ 中的顶点. 这样, 由 (R1) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -4 + 2 \times \frac{5}{2} = 1$. 因此, 假设 $x_1 \in V^0(T)$. 我们考虑下面两种可能性:

(1) x_1 关联一个 3- 面 g , 即 $g = [x_2x_1x_4]$. 由 (R2) 和 (R3.1) 知, f 分别转 1 给 g 和 x_1 . 对于 $i \in \{2, 4\}$, 若 $v_i \in V^0(T)$, 则由引理 3.5, 有 $d_H(x_i) = k$. 若 $x_3 \in V^0(T)$ 且 $d_H(x_3) \geq 4$, 或者 $x_3 \in V(T)$, 则由 (R1)、(R2)、(R3.1) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -4 - 1 - 1 + \frac{5}{2} \times 2 + 1 = 0$. 否则, 假设 $x_3 \in V^0(T)$ 和 $d_H(x_3) = 3$. 由引理 3.10 知, $f_{x_2x_3}$ 、 $f_{x_3x_4}$ 、 $g_{x_2x_4}$ 至少有一个面是重面. 根据对称性, 我们有下面两种可能性: (i) 若 $f_{x_3x_4}$ 是一个重面, 则 f 是 A_7 结构, 由 (R3.7), 有 $\tau(f_{x_3x_4} \rightarrow f) = \frac{2}{3}$. 所以由表 1, 有 $w'(f) \geq -4 - 1 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$. (ii) 若 $g_{x_2x_4}$ 是一个重面, 则 f 是 A_8 结构, 由 (R3.8), 有 $\tau(g_{x_2x_4} \rightarrow g \rightarrow x_1 \rightarrow f) = \frac{2}{3}$. 所以由表 1, 有 $w'(f) \geq -4 - 1 - 1 + 2 \times \frac{5}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

(2) x_1 不与 3- 面相关联. 若 $x_2x_4 \notin E(G)$, 则由引理 3.1 和 (R1), 对 $i = 2, 4$, 有 $\tau(x_i \rightarrow f) \geq \frac{17}{7}$, 故由表 1, 有 $w'(f) \geq -4 - 1 + 2 \times \frac{17}{7} + \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$. 假设 $x_2x_4 \in E(G)$. 根据 T 的选择, 显然有 $x_1 \in V(T)$, 进一步, $x_2, x_4 \in V(T)$. 由表 1 和 (R1), 有 $w'(f) \geq -4 + 2 \times \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

现在假设 $5 \leq d \leq 7$. 令 $x_i \in V(f)$ 是一个 2- 点. 由 (R2) 知, f 转给 x_i 至多为 1. 又由 (R3.1) 知, f 通过 x_i 转给与 x_i 关联且与 f 相邻的每一个 3- 面权至多为 1. 因此, f 对于关联的每个 2- 点而言都会转出权 2. 若 $x_{i-1}x_{i+1} \notin E(G)$, 则对于 $s \in \{i-1, i+1\}$, 要么 $x_s \in V(T)$, 要么由引理 3.1, 有 $x_s \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_s) \geq k - 2 \geq 14$. 这样, x_i 在两种情形下都至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 假设 $x_{i-1}x_{i+1} \in E(G)$. 若 x_i 与一个 3- 面关联, 即, $[x_{i-1}x_ix_{i+1}]$, 则对于 $s \in \{i-1, i+1\}$, 要么 $x_s \in V(T)$, 要么根据引理 3.5,

$x_s \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_s) = k$. 在这种情形下, 根据 (R1) 和表 1, x_s 总是转 $\frac{5}{2}$ 给 f . 若 x_i 不与 3- 面关联, 则由 T 的选择, 有 $x_i \in V(T)$, 然后推出 $x_{i-1}, x_{i+1} \in V(T)$. 因此, 对于每一个 $s \in \{i-1, i+1\}$, 由 (R1), 有 $\tau(x_s \rightarrow f) = \frac{5}{2}$.

情形 3 $d = 5$.

注意到 $w(f) = -3$. 由引理 3.1, 有 $n_2(f) \leq 2$. 我们需要讨论下面几种可能性:

(1) 若 $n_2(f) = 2$, 不妨设 $d_H(x_1) = d_H(x_3) = 2$, 则 x_2, x_4 和 x_5 中的每一个都至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f , 于是有 $w'(f) \geq -3 - 2 \times 2 + 3 \times \frac{17}{7} = \frac{2}{7}$.

(2) 若 $n_2(f) = 1$, 不妨设 $d_H(x_1) = 2$, 则 x_2 和 x_5 中的每一个都至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 由表 1, 有 $w'(f) \geq -3 - 2 + 2 \times \frac{17}{7} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{21}$.

(3) 假设 $n_2(f) = 0$. 若 $|V(f) \cap V(T)| \geq 1$, 则由 (R1) 和表 1, 有 $w'(f) \geq -3 + \frac{5}{2} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. 否则, $V(f) \subseteq V^0(T)$. 若 $V(f)$ 包含至少两个 4^+ - 点, 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -3 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$. 否则, 由引理 3.12 知, $V(f)$ 包含一个 6^+ - 点. 根据表 1, $w'(f) \geq -3 + \frac{5}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 0$.

情形 4 $d = 6$.

注意到 $w(f) = -2$. 由引理 3.1, 有 $n_2(f) \leq 3$. 由引理 3.6, 有 $p_1(f) \leq 2$. 若 $2 \leq n_2(f) \leq 3$, 则由上面的讨论, $V(f)$ 中至少有 3 个顶点, 使得每一个至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 由表 1, 有 $w'(f) \geq -2 - 2 \times 2 - 1 + 3 \times \frac{17}{7} = \frac{2}{7}$. 若 $n_2(f) = 1$, 则 $V(f)$ 中至少有两个顶点使得每一个至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 由表 1, 有 $w'(f) \geq -2 - 2 + 2 \times \frac{17}{7} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{13}{7}$. 若 $n_2(f) = 0$, 由表 1, 有 $w'(f) \geq -2 + 6 \times \frac{1}{3} = 0$.

情形 5 $d = 7$.

注意到 $w(f) = -1$. 由引理 3.1, 有 $n_2(f) \leq 3$. 若 $2 \leq n_2(f) \leq 3$, 则 $V(f)$ 中至少有 3 个顶点使得每一个至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 由表 1, 有 $w'(f) \geq -1 - 3 \times 2 + 3 \times \frac{17}{7} + \frac{1}{3} = \frac{13}{21}$. 若 $n_2(f) = 1$, 则 $V(f)$ 中至少有两个顶点使得每一个至少转 $\frac{17}{7}$ 给 f . 由表 1, 有 $w'(f) \geq -1 - 2 + 2 \times \frac{17}{7} + 4 \times \frac{1}{3} = 3\frac{4}{21}$. 若 $n_2(f) = 0$, 则由表 1, 有 $w'(f) \geq -1 + 7 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

情形 6 $d \geq 8$.

显然, $w(f) \geq 0$. 若 f 是一个轻面, 则由上面的讨论, 应用 (R1) 和表 1, 可得到 $w'(f) \geq d_H(f) - 8 - 2n_2(f) + \frac{17}{7}n_2(f) \geq \frac{3}{7}n_2(f) \geq 0$. 因此下面假设 f 是一个重面. 由 (R2) 和 (R3), f 需要转权给相关联的 $V^0(T)$ 中的 2- 点以及转权给相邻的 S_i 中的面, 其中 $i \in \{2, 3, \dots, 9\}$. 我们将用以下几个规则替代规则 (R1).

(R1-r) 对于 $1 \leq i \leq d$, 我们定义下面的一些子规则, 其中下标取模 d 且 $d+1 \equiv 1$:

(R1-r1) 假设 $x_i \in V^0(T)$ 满足 $4 \leq d_H(x_i) \leq 5$. 若 $x_{i+1} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i+1}) = 2$, $[x_i x_{i+1} x_{i+2}] \in S_2$, 则 $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) = \frac{3}{4}$, $\tau(x_i \rightarrow x_{i-1} x_i \rightarrow f) = \frac{1}{4}$.

(R1-r2) 假设 $x_i \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_i) \geq k-2$, 或者 $x_i \in V(T)$ 使得 $d_H(x_i) \geq 3$. 假设 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i+1}) = d_H(x_{i+2}) = 3$ 且 $f_{x_{i+1} x_{i+2}} \in S_5$. 首先令 $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow x_{i+1} x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{17}{14}$. 然后, 若 $x_{i-1}, x_{i-2} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i-1}) = d_H(x_{i-2}) = 3$, $f_{x_{i-1} x_{i-2}} \in S_5$, 则 $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i-1} \rightarrow x_{i-1} x_{i-2} \rightarrow f) = \frac{17}{14}$; 否则, $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i-1} \rightarrow f) = \frac{17}{14}$.

(R1-r3) 若 $x_i \in V(H)$ 使得 $d_H(x_i) \geq 3$, 但 x_i 不满足 (R1-r1) 和 (R1-r2) 中的条件, 则令

$$\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) = \tau(x_i \rightarrow x_{i-1} x_i \rightarrow f) = \frac{1}{2} \tau(x_i \rightarrow f).$$

首先证明通过应用规则 (R1-r1)–(R1-r3) 后所得到的权转移结果与应用 (R1) 后所得的结果是等价的. 令 $\rho(x_i)$ 表示应用规则 (R1-r1) 到 (R1-r3) 后, x_i 转给与它关联的面 f 的最终权. 根据前面定义,

$\tau(x_i \rightarrow f)$ 表示 x_i 根据规则 (R1) 转给 f 的权值. 因此只需证明 $\rho(x_i) \leq \tau(x_i \rightarrow f)$. 由 (R1), 显然有 $d_H(x_i) \geq 3$.

(1) 假设 $x_i \in V^0(T)$ 且 $4 \leq d_H(x_i) \leq 5$. 若 $x_{i+1} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i+1}) = 2$, $[x_i x_{i+1} x_{i+2}] \in S_2$, 则由引理 3.4, 不可能有 $x_{i-1} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i-1}) = 2$ 和 $[x_i x_{i-1} x_{i-2}] \in S_2$. 由 (R1-r1) 和表 1, 有 $\rho(x_i) \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \leq \tau(x_i \rightarrow f)$.

(2) 假设 $x_i \in V^0(T)$ 满足 $d_H(x_i) \geq k-2$, 或者 $x_i \in V(T)$ 满足 $d_H(x_i) \geq 3$. 而且, 假设 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i+1}) = d_H(x_{i+2}) = 3$, $f_{x_{i+1}x_{i+2}} \in S_5$. 若 $x_{i-1}, x_{i-2} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i-1}) = d_H(x_{i-2}) = 3$, $f_{x_{i-1}x_{i-2}} \in S_5$, 则由 (R1-r2)、(R1) 和表 1, 有 $\rho(x_i) = 2 \times \frac{17}{14} = \frac{17}{7} \leq \tau(x_i \rightarrow f)$. 否则, 由 (R1-r2)、(R1) 和表 1, 有 $\rho(x_i) \leq 2 \times \frac{17}{14} = \frac{17}{7} \leq \tau(x_i \rightarrow f)$.

(3) 假设 $x_i \in V(H)$ 使得 $d_H(x_i) \geq 3$, 但 x_i 不满足上面的条件. 由 (R1-r3), 有 $\rho(x_i) = \frac{1}{2}\tau(x_i \rightarrow f) + \frac{1}{2}\tau(x_i \rightarrow f) = \tau(x_i \rightarrow f)$.

观察 1 假设 $x_i \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_i) \geq k-2$, 或者 $x_i \in V(T)$ 使得 $d_H(x_i) \geq 3$. 若 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$, $d_H(x_{i+1}) = d_H(x_{i+2}) = 3$, $f_{x_{i+1}x_{i+2}} \in S_5$, 则 $f_{x_i x_{i+1}} \notin \sum_{i=2}^9 S_i$.

证明 由 S_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$) 的定义, 有 $f_{x_i x_{i+1}} \notin S_i$, $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. 由引理 3.14, 有 $f_{x_i x_{i+1}} \notin S_8$. $\square$

对于一个面 $f' \in S_i$, 我们用 $\sigma(f')$ 表示一个面 f 从 $V(f)$ 中关于 f' 的所有 3^+ - 点上得到的总权值, 其中转权是根据规则 (R1-r1)–(R1-r3) 进行的.

观察 2 令 $f' \in S_i$, $2 \leq i \leq 9$.

- (1) 若 $i = 2$, 则 $\sigma(f') \geq 2$;
- (2) 若 $i = 3$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{5}{2}$;
- (3) 若 $i = 4$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{69}{28}$;
- (4) 若 $i = 5$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{65}{42}$;
- (5) 若 $i = 6$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{5}{12}$;
- (6) 若 $i = 7$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{5}{2}$;
- (7) 若 $i = 8$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{17}{15}$;
- (8) 若 $i = 9$, 则 $\sigma(f') \geq \frac{5}{2}$.

证明 我们分 8 种情形进行证明:

(1) 假设 $f' = [x_i x_{i+1} x_{i+2}] \in S_2$ 使得 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$, 则由引理 3.2, 有 $d_H(x_{i+1}) = 2$ 和 $4 \leq d_H(x_{i+2}) \leq k-3$. 现在我们计算每一个点 x_i 和 x_{i+2} 转给 f 的权值. 显然, 或者 $x_i \in V(T)$, 或者由引理 3.2, 有 $x_i \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_i) = k$. 根据观察 1、(R1-r3) 和表 1, $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 若 $4 \leq d_H(x_{i+2}) \leq 5$, 则由 (R1-r1), 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1} x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{3}{4}$. 否则, 根据观察 1、(R1-r3) 和表 1, 可得 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1} x_{i+2} \rightarrow f) \geq \frac{5}{6}$. 因此推出 $\sigma(f') \geq \tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) + \tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1} x_{i+2} \rightarrow f) \geq \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$.

(2) 假设 $f' = [x_i x_{i+1} x_{i+2}] \in S_3$ 使得 $x_{i+1} \in V^0(T)$ 和 $d_H(x_{i+1}) = 2$, 以及 $x_{i+2} \in V(T)$. 类似于上面的讨论, 有 $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 并且, 因为 $x_{i+2} \in V(T)$, 所以由观察 1、(R1-r3) 和表 1, 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1} x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 这样, $\sigma(f') \geq \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.

(3) 假设 $f' = [x_i x_{i+1} x_{i+2}] \in S_4$, $x_{i+1} \in V^0(T)$ 且 $d_H(x_{i+1}) = 2$. 不失一般性, 假设 $x_i \in V(T)$, 或者由引理 3.2, 有 $x_i \in V^0(T)$ 且 $d_H(x_i) = k$. 类似于前面的讨论, 可得到 $\tau(x_i \rightarrow x_i x_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$.

若 $x_{i+2} \in V(T)$, 则类似地有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 若 $x_{i+2} \in V^0(T)$, 则由定义, 有 $d_H(x_{i+2}) \geq k-2$. 由观察 1、(R1-r3) 和表 1, 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) \geq \frac{17}{14}$. 因此, 有 $\sigma(f') \geq \frac{5}{4} + \frac{17}{14} = \frac{69}{28}$.

(4) 假设 $f' = [ux_{i+1}x_{i+2}] \in S_5$ 使得 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$ 且 $d_H(x_{i+1}) = d_H(x_{i+2}) = 3$. 由引理 3.8 知, $\{x_i, x_{i+3}\}$ 中至少存在一个顶点, 如 x_i , 使得 $x_i \in V(T)$, 或者 $x_i \in V^0(T)$ 使得 $d_H(x_i) \geq k-2$. 由 (R1-r2), 有 $\tau(x_i \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{17}{14}$. 由观察 1、(R1-r3) 和表 1, 有 $\tau(x_{i+1} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{1}{6}$. 于是, $\sigma(f') \geq \frac{17}{14} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{65}{42}$.

(5) 假设 $f' = [ux_{i+1}x_{i+2}] \in S_6$ 使得 $x_{i+1}, x_{i+2} \in V^0(T)$, $3 \leq d_H(x_{i+1}) \leq 5$ 且 $4 \leq d_H(x_{i+2}) \leq 11$. 若 $[x_{i+2}x_{i+3}x_{i+4}] \in S_2$ 满足 $d_H(x_{i+3}) = 2$, 则由 (R1-r1), 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \frac{1}{4}$. 否则, 根据观察 1、(R1-r3) 和表 1, 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) \geq \frac{1}{2}$. 而且, 根据观察 1、(R1-r3) 和表 1, 可得到 $\tau(x_{i+1} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) \geq \frac{1}{6}$. 所以有 $\sigma(f') \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

(6) 假设 $f' = [ux_ix_{i+1}x_{i+2}] \in S_7$ 使得 $d_H(x_{i+1}) = 2$. 因为 $d_H(f) = d \geq 8$, 所以容易得到 $x_{i+1} \in V^0(T)$. 由引理 3.3 可推出下面结论: 若 $x_i \in V^0(T)$, 则 $d_H(x_i) = k$; 若 $x_{i+2} \in V^0(T)$, 则 $d_H(x_{i+2}) = k$. 根据观察 1、(R1-r3)、(R1) 和表 1, 有 $\tau(x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}x_{i+2} \rightarrow f) = \tau(x_i \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 因此, 可得到 $\sigma(f') \geq \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.

(7) 假设 $f' = [x_ix_{i+1}uv] \in S_8$ 使得 $x_{i+1} \in V^0(T)$ 和 $d_H(x_{i+1}) = 3$. 显然, 若 $x_i \in V^0(T)$, 则由引理 3.5, 有 $d_H(x_i) = k$. 由观察 1、(R1-r3)、(R1) 和表 1, 有 $\tau(x_i \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$ 且 $\tau(x_{i+1} \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) = \frac{1}{6}$. 因此, $\sigma(f') \geq \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{17}{15}$.

(8) 假设 $f' \in S_9$ 使得 $[x_ix_{i+1}u]$ 是一个 3- 面. 由引理 3.5, 若 $x_i \in V^0(T)$, 则 $d_H(x_i) = k$; 若 $x_{i+1} \in V^0(T)$, 则 $d_H(x_{i+1}) = k$. 由观察 1、(R1-r3)、(R1) 和表 1, 有 $\tau(x_i \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) = \tau(x_{i+1} \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) = \frac{5}{4}$. 于是 $\sigma(f') \geq \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$. $\square$

观察 3 假设 $x_i \in V^0(T)$ 满足 $d_H(x_i) = 2$ 且 x_i 不与 $S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_7$ 中的 3- 面关联, 则 $\tau(x_{i-1} \rightarrow x_{i-1}x_i \rightarrow f) + \tau(x_{i+1} \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) \geq \frac{17}{7}$.

证明 根据 H 的选择, x_i 不在任何一个分离 3- 圈上. 这样, $x_{i-1}x_{i+1} \notin E(H)$. 由引理 3.1, 对于 $j \in \{i-1, i+1\}$, 若 $x_j \in V^0(T)$, 则 $d_H(x_j) \geq k-2$. 由 (R1)、(R1-r3) 和表 1, 有 $\tau(x_{i-1} \rightarrow x_{i-1}x_i \rightarrow f) \geq \frac{17}{14}$ 且 $\tau(x_{i+1} \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) \geq \frac{17}{14}$. 因此可得到

$$\tau(x_{i-1} \rightarrow x_{i-1}x_i \rightarrow f) + \tau(x_{i+1} \rightarrow x_ix_{i+1} \rightarrow f) \geq 2 \times \frac{17}{14} = \frac{17}{7}.$$

证明完毕. $\square$

在下面的讨论中, 简记 $p_i = p_i(f)$, 且令 $n_2^* = n_2(f) - p_2 - p_3 - p_4 - p_7$. 因为 f 是一个重面, 所以, $2d(f) \geq k + n_2(f) + |E_s(f)| + |F_s(f)|$. 因为 $|E_s(f)| \geq p_2 + p_5 + p_6$, $|F_s(f)| \geq p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9$, 所以可得到下面的关系式:

$$2d(f) \geq k + 3p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 2p_7 + p_8 + p_9 + n_2^*,$$

于是,

$$d(f) \geq \frac{k}{2} + \frac{3}{2}p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + \frac{1}{2}p_8 + \frac{1}{2}p_9 + \frac{1}{2}n_2^*. \quad (4.3)$$

因为 $k \geq 16$, 由 (R2)、(R3)、(4.3)、观察 2 和 3, 可得到

$$\begin{aligned} w'(f) \geq & d(f) - 8 + 2p_2 + \frac{5}{2}p_3 + \frac{69}{28}p_4 + \frac{65}{42}p_5 + \frac{5}{12}p_6 + \frac{5}{2}p_7 + \frac{17}{15}p_8 + \frac{5}{2}p_9 + \frac{17}{7}n_2^* \\ & - \frac{5}{2}p_2 - p_2 - p_3 - p_3 - \frac{15}{14}p_4 - p_4 - \frac{40}{21}p_5 - \frac{26}{21}p_6 - p_7 - p_7 - \frac{2}{3}p_8 - \frac{2}{3}p_9 - n_2^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d(f) - 8 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{11}{28}p_4 - \frac{5}{14}p_5 - \frac{23}{28}p_6 + \frac{1}{2}p_7 + \frac{7}{15}p_8 + \frac{11}{6}p_9 + \frac{10}{7}n_2^* \\
&\geq \frac{k}{2} - 8 + \frac{3}{2}p_3 + \frac{39}{28}p_4 + \frac{9}{14}p_5 + \frac{5}{28}p_6 + \frac{3}{2}p_7 + \frac{29}{30}p_8 + \frac{7}{3}p_9 + \frac{27}{14}n_2^* \\
&\geq \frac{k}{2} - 8 \geq 0.
\end{aligned}$$

现在假设 $v \in V(T)$ (若 T 存在的话). 假设 $T = [u_0 u_1 u_2]$ 且 f_0 是 H 的一个外面. 根据 T 的选择, 且 H 是 2-连通的, 可以假设 $d_H(u_0) = d_G(u_0) = 2$, $d_H(u_1) \geq 3$, $d_H(u_2) \geq 3$. 由 (R0), 若 $u_1 u_2$ 与一个 A_8 形式的面关联, 则 f_0 需要转 $\frac{2}{3}$ 给 A_8 . 由 (R1) 知, u_i 转 $\frac{5}{2}$ 给每个相关联的面, $i = 1, 2$. 于是, $w'(u_0) = -2$, $w'(u_1) = 3d_H(u_1) - 8 - \frac{5}{2}d_H(u_1) = \frac{1}{2}d_H(u_1) - 8 \geq -\frac{13}{2}$. 类似地, $w'(u_2) \geq -\frac{13}{2}$. 因为 $d_H(f_0) = 3$, 所以 $w'(f_0) = -5 - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \times 2 = -\frac{2}{3}$.

至此, 我们证明了对于所有的 $x \in V^0(T) \cup F^0(H)$, 有 $w'(x) \geq 0$; $w'(u_0) = -2$, $w'(u_1) \geq -\frac{13}{2}$, $w'(u_2) \geq -\frac{13}{2}$, $w'(f_0) = -\frac{2}{3}$. 所以, 可得到

$$\sum_{x \in V(H) \cup F(H)} w'(x) = \sum_{x \in V^0(T) \cup F^0(H)} w'(x) + \sum_{x \in V(T)} w'(x) + w'(f_0) \geq -2 - \frac{13}{2} - \frac{13}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{47}{3}.$$

证明完毕. □

5 结论

定理 1.1 表明每个 2-连通且 $\Delta \geq 16$ 的简单平面图 G 有 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$. 值得注意的是 2-连通的这个条件是不可去掉的, 因为顶点数至少为 3 的树 T 包含割点且 $\chi_{\text{ef}}(T) = \Delta(T) + 1$. 然而, 最大度 Δ 的下界 16 似乎不是紧的. 因此, 我们提出下面的值得研究的问题.

问题 5.1 确定最小整数 Δ_0 , 使得每一个 2-连通的 $\Delta \geq \Delta_0$ 的简单平面图 G 有 $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$.

首先, 可得到 $\chi_{\text{ef}}(C_3) = 5 = \Delta + 3$. 对于 $3 \leq k \leq 5$, 令 H 是一个 k -正则平面图. 显然, 这样的平面图 H 是存在的, 如立方体、八面体和二十面体. 在 H 的一条边上插入一个新的顶点, 得到一个平面图 H' , 则容易推出 $\chi'(H') = \Delta(H') + 1 = k + 1$. 这样, $\chi_{\text{ef}}(H') \geq \chi'(H') = \Delta(H') + 1$. 结合上面的结论以及定理 1.1, 我们得到 $6 \leq \Delta_0 \leq 16$.

参考文献

- 1 Mel'nikov L S. Problem 9. In: Fiedler M, ed. Recent Advances in Graph Theory. Proceedings of the Second Czechoslovak Symposium, Prague, June 1974. Prague: Czechoslovak Academy of Sciences, 1975, p.543
- 2 Lin C, Hu G, Zhang Z. A six-color theorem for the edge-face coloring of plane graphs. Discrete Math, 1995, 141: 291–297
- 3 王维凡. 低度平面图的边面全色数. 高校应用数学学报 A 辑, 1993, 8: 300–307
- 4 Wang W F, Zhang K. A seven-color theorem on edge-face coloring of plane graphs. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2001, 21: 243–248
- 5 Borodin O V. Simultaneous coloring of edges and faces of plane graphs. Discrete Math, 1994, 128: 21–33
- 6 Waller A O. Simultaneously colouring the edges and faces of plane graphs. J Combin Theory Ser B, 1997, 69: 219–221
- 7 Sanders D P, Zhao Y. On simultaneous edge-face colorings of plane graphs. Combinatorica, 1997, 17: 441–445
- 8 Wang W, Lih K W. A new proof of Melnikov's conjecture on the edge-face coloring of plane graphs. Discrete Math, 2002, 253: 87–95
- 9 Sanders D P, Zhao Y. On improving the edge-face coloring theorem. Graphs Combin, 2001, 17: 329–341

- 10 Wang W F, Lih K W. The edge-face choosability of plane graphs. *European J Combin*, 2004, 25: 935–948
- 11 Sanders D P, Zhao Y. A five-color theorem. *Discrete Math*, 2000, 220: 279–281
- 12 Chen M, Raspaud A, Wang W. Plane graphs with maximum degree 6 are edge-face 8-colorable. *Graphs Combin*, 2014, 30: 861–874
- 13 Sereni J S, Stehlík M. Edge-face coloring of plane graphs with maximum degree nine. *J Graph Theory*, 2011, 66: 332–346
- 14 Kang R J, Sereni J S, Stehlík M. Every plane graph of maximum degree 8 has an edge-face 9-coloring. *SIAM J Discrete Math*, 2011, 25: 514–533
- 15 Luo R, Zhang C Q. Edge-face chromatic number and edge chromatic number of simple plane graphs. *J Graph Theory*, 2005, 49: 234–256

Edge-face coloring of 2-connected plane graphs

Xiaoxue Hu, Yiqiao Wang & Weifan Wang

Abstract The edge-face chromatic number $\chi_{\text{ef}}(G)$ of a plane graph G is the least number of colors such that any two adjacent edges, adjacent faces, and incident edge and face have different colors. In this paper, we show that if G is a 2-connected simple plane graph with maximum degree $\Delta \geq 16$, then $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$. This improves a known result that if G is a 2-connected simple plane graph with $\Delta \geq 24$, then $\chi_{\text{ef}}(G) = \Delta$.

Keywords plane graph, edge-face coloring, 2-connected, maximum degree

MSC(2010) 05C15

doi: 10.1360/SCM-2016-0677