

线性 Vlasov 方程的准确解及对 Landau 阻尼不稳定性及共振相互作用的讨论

蔡恒进 陈培仁

(中国科学院空间科学与应用研究中心, 北京 100094)

摘 要

本文得到了线性 Vlasov 方程的准确解, 研究了被积函数奇点的分布和性质并将处理方法与 Landau 的处理方法作了比较。本文认为, Landau 阻尼是严格意义上的位相散开, 不稳定解是由成束 (bunching) 效应引起的, 它们都和波-粒子能量交换无关。本文最后指出, 线性 Vlasov 方程保证粒子总动能不变而不能保证系统的总能量守恒, 因而不是描述粒子与其自洽场共振相互作用的合适的出发点。

关键词: 线性 Vlasov 方程, 准确解, 共振相互作用

一、引 言

等离子体动力学中的不稳定性理论以及弱湍动理论比流体力学中相应的理论简单得多^[1], 物理图象也很不相同。弱湍理论认为^[2], 等离子体波的本征频率 $\omega_k \neq 0$ 这一重要特征, 决定了等离子体湍动比流体湍流容易处理。这一特征使弱激发等离子体问题区别于流体问题而类似于诸如表面波问题或固体物理中的问题。

一些作者曾对正统不稳定性理论和弱湍理论提出过合理的疑问, 并发展了具有很强竞争力的理论。这其中有 Clumps 理论^[3,4]、相空间密度空理论^[4,5]。本文与这些工作一致。

我们认为, 等离子体运动的最本质特征是共振相互作用。当扰动场的特征速度与粒子运动速度相同时, 就会发生这种相互作用。反常耗散、反常输运正是由共振相互作用引起的。这一特征决定了等离子体问题非常类似于流体问题^[6], 也决定了相空间定域的集体运动模比空间非定域的波动更重要。

很明显, $\omega_k \neq 0$ 不能够使我们回避共振问题。那么, 是不是等离子体中的共振问题比流体中的共振问题容易处理, 因而该问题不成为理论问题的中心呢? Landau^[7] 对线性 Vlasov 方程的处理以及 Bohm-Gross^[8] 的讨论似乎对这个问题作了肯定的回答。本文最重要的目的之一就是要澄清这一问题。

我们将线性 Vlasov 方程当作某种独立的理论来研究, 而不把它看作是 Vlasov 方程的近似。这样做有利于研究方程自身的特点, 以免与别的问题混淆。

二、积分回路的选择

我们从线性 Vlasov 方程出发^[9]:

$$\left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial t} + u\right) g_1(u, t) = v_p^2 g'_0(u) \int_{D_{g_1}} g_1(u', t) du', \quad (1)$$

其中 $g_0(u)$ 是归一化的背景分布函数, $g_1(u, t)$ 是扰动分布函数, 它也是波数 k 的函数. $v_p^2 = \omega_p^2/k^2$, $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m$. 以后我们总假定 $k > 0$.

上式积分可理解为 Lebesgue 意义上的积分. 积分域 D_{g_1} 是指 $g_1(u, t) \neq 0$ 的最大的关于速度的域, 即 $D_{g_1} = \sup\{u | g_1(u, t) \neq 0\}$, 一般情况下可取 $D_{g_1} = (-\infty, \infty)$.

我们也用 Laplace 变换方法求解方程(1), 设 $g_1(u, t)$ 的 Laplace 变换是

$$h(u, s) = \int_0^\infty e^{-ikt} g_1(u, t) dt, \quad (2)$$

则方程(1)可写成

$$h(u, s) = \frac{g_1(u, 0)}{ik(u-s)} + \frac{v_p^2}{u-s} g_1(u) \int_{D_{g_1}} h(u', s) du'. \quad (3)$$

引进算符

$$\hat{H}_{vv} f(v) = \int_{D_1} \frac{f(v)}{v-s} dv \quad (s \in D_1), \quad (4)$$

我们总可以合理地假定, $f(v)$ 只在有限的速度区域上不为 0, 即 $D_1 = [v_1, v_2]$. 这样, 只要 $f(v)$ 是 Lebesgue 意义上可积的, $\hat{H}_{vv} f(v)$ 就在除了部分实轴 $\{v_1 \leq \text{Re } s \leq v_2, \text{Im } s = 0\}$ 外的全复平面上解析.

由(3)式, 立即有

$$\int_{D_{g_1}} h(u, s) du = \frac{\hat{H}_{vv} g_1(v, 0)}{ik v_p^2 Z(s)}, \quad (5)$$

其中

$$Z(s) = 1/v_p^2 - \hat{H}_{vv} g'_0(v), \quad (6)$$

$Z(s)$ 是除了部分实轴 $s \in D_{g_0}$ 外的全复平面上的解析函数.

将(5)式代入(3)式, 有

$$h(u, s) = \frac{g_1(u, 0)}{ik(u-s)} + \frac{g'_0(u)}{ik(u-s)} \frac{\hat{H}_{vv} g_1(v, 0)}{Z(s)}. \quad (7)$$

作逆 Laplace 变换

$$g_1(u, t) = \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} h(u, s) e^{-ikt} \frac{ik ds}{2\pi i}, \quad (8)$$

得到 $g_1(u, t)$ 的解为

$$g_1(u, t) = g_1(u, 0) e^{-ikt} + \int_c G(u, s) e^{-ikt} \frac{ds}{2\pi i}, \quad (9)$$

其中

$$G(u, s) = \frac{g'_0(u)}{u-s} \frac{\hat{H}_{vv} g_1(v, 0)}{Z(s)}, \quad (10)$$

$G(u, s)$ 在 $s \in D_{s_0'} \cup D_{s_1}$ 的全复平面上几乎处处解析(除了孤立奇点以外)。

对于势函数 $\varphi(t) = -4\pi e/k^2 \int_{D_{s_1}} g_1(u, t) du$, 由(8)式和(5)式立即可有

$$\varphi(t) = -\frac{4\pi e}{\omega_p^2} \int_c \frac{\hat{H}_{s_1} g_1(v, 0)}{Z(s)} e^{-ikv} \frac{ds}{2\pi i}, \quad (11)$$

积分路径 c 为从 $-\infty + ib$ 到 $\infty + ib$ 。为保证(2)式收敛, 必须 $b > b_0 > 0$, 使被积函数的奇点都在积分路径 c 的下面。我们将看到, 这一点总能够做到。

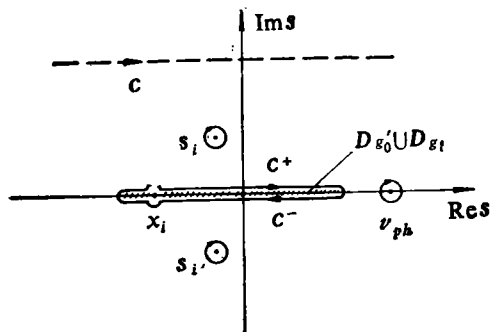


图1 积分回路示意图

按照解析函数理论, 可将积分路径 c 变形到 s 的下半平面。当 $t > 0$ 时, 只要保留围绕不解析区域和奇点的积分即可。这样, 沿着路径 c 的积分就转换成如图1所示的回路积分。

在图1中, s_i, s_i' 是 $G(u, s)$ 可能具有的孤立复奇点。 c^+, c^- 分别沿着 s 实轴的上、下边缘。当沿着 c^+, c^- 积分时, 我们还可能遇到 s 实轴上的奇点 x_i (其含义下一节将说明)。最后

我们将(9)式改写成

$$g_1(u, t) = g_1(u, 0)e^{-ikut} + \left[P \int_{c^+} + P \int_{c^-} + \sum_i \int_{s_i} + \sum_i \int_{s_i'} \right] G(u, s) e^{-ikv} \frac{ds}{2\pi i}, \quad (12)$$

其中 P 表示主值积分。

这里, 我们自然地将积分路径 c 变形到了下半平面, 而没有象 Landau^[7] 那样对被积函数作人为的解析延拓。我们将在第七节较详细地讨论这两种处理的差别。

三、线性 Vlasov 方程的准确解

因为 $\hat{H}_{s_1} g_1(v, 0)$ 是其定义域上的解析函数, $G(u, s)$ 的奇点只由 $Z(s)$ 的零点决定。

我们先计算沿 c^+, c^- 的积分。为方便将 $D_{s_0'}$ 和 D_{s_1} 都取作 $(-\infty, \infty)$, 并定义:

$$X(x) = \frac{1}{v_p^2} - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0'(v)}{v - x} dv, \quad (13a)$$

$$Y(x) = \pi g_0'(x). \quad (13b)$$

它们与 $Z(s)$ 有关系

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} Z(x \pm i\epsilon) = X(x) \mp iY(x), \quad (14)$$

这样

$$\begin{aligned} P \int_{c^+} G(u, s) e^{-ikv} \frac{ds}{2\pi i} &= P \int_{-\infty+i0^+}^{\infty+i0^+} G(u, s) e^{-ikv} \frac{ds}{2\pi i} \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \left[P \frac{g_0(u)}{u - x} + \pi i g_0(u) \delta(u - x) \right] \frac{1}{X - iY} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(v, 0)}{v - x} dv + \pi i g_1(x, 0) \right] \\ &\quad \cdot e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi i}. \end{aligned}$$

类似地有沿 ϵ^- 的积分表达式, 最后

$$\left(P \int_{\epsilon^+} + P \int_{\epsilon^-}\right) G(u, s) e^{-ikst} \frac{ds}{2\pi i} = P \int_{-\infty}^{\infty} A(v) P \frac{g'_0(u)}{u-v} e^{-ikvt} dv + B(u) e^{-ikst}, \quad (15)$$

其中

$$A(v) = \frac{1}{X^2(v) + Y^2(v)} \frac{1}{\pi} \left[Y(v) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(u, 0)}{u-v} du + \pi g_1(v, 0) X(v) \right], \quad (16)$$

$$B(u) = -g_1(u, 0) + X(u)A(u). \quad (17)$$

类似于(15)式的结果, 最初由 Van Kampen^[10] 和 Case^[11] 用不同的方法得到。

由(16)式可以看到, 若 $X^2 + Y^2 = 0$, 即

$$X(x_i) = 0, \quad (18a)$$

$$Y(x_i) = 0, \quad (18b)$$

则 $A(v)$ 有奇点。今后为叙述方便, 我们称满足(18)式的 x_i 为 $Z(s)$ 的实零点。

下一节将说明, $Z(s)$ 可能有各种类型的零点, 但这里只讨论三类典型的零点, 一阶和二阶实零点 x_{1i} , x_{2i} , 一阶复零点 s_i , 其他高阶情况是简单的推广。

首先, 考虑 $G(u, s) e^{-ikst}$ 在一阶实极点 x_{1i} 处的留数。注意回路的方向, 上、下半平面的贡献必须分别计算, 有

$$\begin{aligned} \int_{x_{1i}} G(u, s) e^{-ikst} \frac{ds}{2\pi i} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{s=x_{1i}+i0^+} G(u, s) e^{-ikst} \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{s=x_{1i}-i0^+} G(u, s) e^{-ikst} \\ &= a_{1i} \frac{g'_0(u)}{u-x_{1i}} e^{-ikx_{1i}t}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$a_{1i} = -\frac{X'(x_{1i}) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(v, 0)}{v-x_{1i}} dv + \pi Y'(x_{1i}) g_1(x_{1i}, 0)}{X'(x_{1i})^2 + Y'(x_{1i})^2}. \quad (20)$$

类似地, 二阶实极点 x_{2i} 处的留数

$$\int_{x_{2i}} G(u, s) e^{-ikst} \frac{ds}{2\pi i} = \left[\left(\frac{1}{u-x_{2i}} - ikst \right) a'_{2i} + a_{2i} \right] \frac{g'_0(u)}{u-x_{2i}} e^{-ikx_{2i}t}, \quad (21)$$

其中

$$a_{2i} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[\frac{\hat{H}_{s\nu} g_1(v, 0)}{Z(s)/(s-x_{2i})^2} \right]_{s=x_{2i}+i0^+} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[\frac{\hat{H}_{s\nu} g_1(v, 0)}{Z(s)/(s-x_{2i})^2} \right]_{s=x_{2i}-i0^+}, \quad (22)$$

$$a'_{2i} = -2 \frac{X''(x_{2i}) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(v, 0)}{v-x_{2i}} dv + \pi Y''(x_{2i}) g_1(x_{2i}, 0)}{X''(x_{2i})^2 + Y''(x_{2i})^2}. \quad (23)$$

最后, 一阶复极点 s_i 处的留数

$$\int_{s_i} G(u, s) e^{-ikst} \frac{ds}{2\pi i} = a_i \frac{g'_0(u)}{u-s_i} e^{-iks_i t}, \quad (24)$$

其中

$$a_i = - \frac{\hat{H}_{i0} g_1(v, 0)}{Z'(s_i)}. \quad (25)$$

总结起来, 方程(1)的准确解是

$$\begin{aligned} g_1(u, t) = & \left(\frac{1}{v_p^2} - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(v)}{v-u} dv \right) A(u) e^{-ikut} \\ & + P \int_{-\infty}^{\infty} A(v) P \frac{g'_0(u)}{u-v} e^{-ikvt} dv + \sum_j a_j \frac{g'_0(u)}{(u-s_j)} e^{-iks_j t} \\ & + \sum_j a_{1j} \frac{g'_0(u)}{u-x_{1j}} e^{-ikx_{1j} t} + \sum_j \left[a_{2j} + \left(\frac{1}{u-x_{2j}} - ikx_{2j} \right) a_{2j} \right] \\ & \times \frac{g'_0(u)}{u-x_{2j}} e^{-ikx_{2j} t}. \end{aligned} \quad (26)$$

对速度积分, 立即有

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & - \frac{4\pi e}{\omega_p^2} \left\{ P \int A(v) e^{-ikvt} dv + \sum_j a_j e^{-iks_j t} \right. \\ & \left. + \sum_j a_{1j} e^{-ikx_{1j} t} + \sum_j (a_{2j} - ikx_{2j} a'_{2j}) e^{-ikx_{2j} t} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

可直接验证, 上述结果的确满足方程(1).

四、关于 $Z(s)$ 的零点

1. 复零点关于 s 实轴对称

注意到 $Z^*(s) = Z(s^*)$, 如果 $Z(s_i) = 0$, 则有 $Z^*(s_i) = 0$, 即 $Z(s_i^*) = 0$.

2. 复零点的虚部有界

由 $Z(s_i) = 0$, 设 $s_i = x + iy$ ($y \neq 0$), 立即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u-x)g_0(u)}{(u-x)^2 + y^2} du = \frac{1}{v_p^2} > 0,$$

分部积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u-x)^2 - y^2}{[(u-x)^2 + y^2]^2} g_0(u) du > 0, \quad (28)$$

显然(28)式要求 y^2 有界。这一结果表明, 我们可以合理地作 Laplace 变换。

3. 复零点或高阶实零点的实部不超过最大粒子速度

对一阶实零点, 命题不成立, 这意味着大相速度的静电波可以在等离子体中自由传播。由 $\text{Im}Z(s_i) = 0$ 或 $Z'(x) = 0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-u)g_0(u)}{[(x-u)^2 + y^2]^2} du = 0. \quad (29)$$

如果 $v_{ph} = x$ 超过了最大粒子速度, 则对任意 $u \in \{u | g_0(u) \neq 0\}$, 总有 $x - u > 0$ 或者总有 $x - u < 0$ 。这样的话, (29)式就不成立。

4. 单峰分布不存在复零点和高于一阶的实零点

不存在复零点是熟知的结果, 不存在二阶或更高阶实零点类似可证。

5. 对称双峰分布不存在高于一阶的复零点和高于二阶的实零点

设 $g_0(u)$ 在 $u = \pm u_0$ 处取极大值。显然 $x = \operatorname{Re} s_i = 0$, 如若不然, 则 $\operatorname{Im} Z(s_i) \neq 0$. $Z(s_i) = 0$ 给出 ($y = \operatorname{Im} s_i$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u g'_0(u)}{u^2 + y^2} du = \frac{1}{y^2} > 0, \quad (30a)$$

由此很容易推导出

$$\int_0^{\infty} \frac{u_0^2 + y^2}{u^2 + y^2} \frac{u g'_0(u)}{u^2 + y^2} du > \int_0^{\infty} \frac{u g'_0(u)}{(u^2 + y^2)} du > 0. \quad (30b)$$

这样,

$$Z'(s_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(u)}{(u - s_i)^2} du = 2iy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u g'_0(u)}{(u^2 + y^2)^2} du \neq 0.$$

这就是讲, 只有一阶的复零点。关于不存在二阶或更高阶实零点, 类似可证。

6. 高阶零点

对一般的分布 $g_0(u)$, $Z(s)$ 的零点可能很复杂。我们注意到, n 阶复零点和 $2n$ 阶实零点应满足的条件非常相似。后者可看成是前者在 $\operatorname{Im} s_i \rightarrow 0$ 时的极限情况。通过连续地变动 $g_0(u)$ 或 k^2 , 我们有可能使 $2n$ 阶实零点分裂成一阶 n 阶复零点, 它们对称地分布在 s 实轴的两侧。

这里给出一个高阶零点的例子。对分布

$$g_0(u) = \alpha \delta(u - u_0) + \alpha \delta(u + u_0) + (1 - 2\alpha) \delta(u),$$

只考虑 $\operatorname{Re} s = 0$ 的零点。设 $s = i\sqrt{\lambda} u_0$, 则 $Z(s) = 0$, $Z'(s) = 0$ 分别给出 $k^2 u_0^2 / \omega_p^2 = (1 - 3\lambda)/(1 + \lambda)^3$, $\frac{1}{2\alpha} - 1 = (3 - \lambda)\lambda^2/(1 + \lambda)^3$, 只要 $\lambda < 1/3$, 即 $\frac{4}{9} < \alpha < \frac{1}{2}$ k 就有实数解。显然, k 的上限是 ω_p/u_0 。

五、关于 Landau 阻尼

我们考虑 $g_0(u)$ 是 Maxwell 分布这样一种特殊情况。这时, $Z(s)$ 在全平面上都没有零点, $\varphi_k(z)$ 只包含一个积分项

$$\varphi_k(t) = -\frac{4\pi e}{\omega_p^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_k(v) e^{-ikvt} dv, \quad (31)$$

$$A_k(v) = \frac{1}{\pi(X^2 + Y^2)} \left[Y(v) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{1k}(u, 0)}{u - v} du + \pi X(v) g_{1k}(v, 0) \right], \quad (32)$$

$\varphi_k(t)$ 是连续谱的叠加。叠加的权重函数 $X/(X^2 + Y^2)$, $Y/(X^2 + Y^2)$ 是速度的函数, 不同速度的扰动对 $\varphi_k(t)$ 的贡献不一样。一定条件下, 权重函数很窄, 很尖锐, 这时 $\varphi_k(t)$ 具有孤立奇点对应的本征模的特征。

如果对某一速度 u_0 , 有 $X(u_0) = 0$, $Y(u_0)$ 很小, 即

$$\frac{1}{v_p^2} - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(u)}{u - u_0} du = 0, \quad (33)$$

$$|v_0| \ll \omega, \quad (34)$$

其中 $v_0 = Y(u_0)/X'(u_0)$ 。我们假定函数 $g_{1k}(v, 0)$ 是光滑的, 可定义它的半宽度 w 。这样, 我们有

$$A_k(v) \approx \frac{1}{X'(u_0)} \frac{1}{(v - u_0)^2 + v_0^2} \left[\frac{v_0}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{1k}(u, 0)}{u - u_0} du + (v - u_0) g_{1k}(u_0, 0) \right]. \quad (35)$$

将(35)式代入(31)式并完成积分, 得到

$$\varphi_k(t) = -\frac{4\pi e}{\omega_p^2} a_k(u_0) e^{-|k v_0 t|} e^{-i k u_0 t}, \quad (36)$$

其中

$$a_k(u_0) = \frac{1}{X'(u_0)} \left[\frac{v_0}{|v_0|} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{1k}(u, 0)}{u - u_0} du - \pi i g_{1k}(u_0, 0) \right]. \quad (37)$$

$\varphi_k(t)$ 的衰减率正是 Landau 阻尼率。我们特别注意到, 当 $t < 0$ 时, $\varphi(t)$ 也是衰减的, 这是因为我们在对 $A_k(v)$ 作近似时, 抹掉了位相信息。

Landau 阻尼的物理图象是: 波数为 k 的扰动以不同的速度传播, 位相的相关性越来越低导致 $\varphi_k(t)$ 的衰减。一般讲, $\varphi_k(t)$ 既依赖于 $g_0(u)$, 也很大程度地依赖于初始扰动 $g_1(u, 0)$ 。只有在 $g_1(v, 0)$ 比较平滑, 权重函数接近于 Dirac δ 函数时, $\varphi_k(t)$ 的衰减特性才只取决于 $g'_0(u)$ 。

Van Kampen^[10] 最先从这一角度讨论 Landau 阻尼。不过, 我们的处理更能体现出与 Landau 处理的差别。(35)式更能反映 Landau 阻尼的真实意义。

六、关于不稳定解

对背景分布 $g_0(u)$, 线性 Vlasov 方程有不稳定解的充分必要条件是, 存在一对实数 x, y 满足下列条件:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(u)}{(u - x)^2 + y^2} du = 0, \quad (38a)$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u - x) g'_0(u)}{(u - x)^2 + y^2} du > 0, \quad (38b)$$

(3) 若 $y = 0$, 则还要求 $g'_0(x) = 0$, $g''_0(x) = 0$ 。

容易看到, 上述条件保证 $Z(s)$ 具有至少是一阶的复零点或者具有至少是二阶的实零点。

用 Nyquist 图方法判断 $g_0(u)$ 是否给出指数型不稳定解是很方便的, 但在 Nyquist 图上较难辨别是否存在高阶实零点。

我们猜测, 如果 $g_0(u)$ 使 $Z(s)$ 具有高阶实零点, 则它也必使 $Z(s)$ 具有复零点。如果这一命题成立的话, Penrose 关于是否存在指数增长模的判据^[12] 就可改述成 $g_0(u)$ 是否给出不稳定解的判据。

不稳定解的物理意义将通过第八节的讨论变得清晰起来。线性 Vlasov 方程的不稳定性是双流不稳定性直接推广, 仍然是流体型的不稳定性。它是由成束 (bunching) 效应^[13] 引起的, 与捕获 (trapping) 机制或波-粒子相互作用没有关系。

七、与 Landau 处理的比较

相应于本文的 $Z(s)$, Landau 的结果是^[7,13]

$$Z_L(s) = \begin{cases} \frac{1}{v_p^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(v)}{v-s} dv, & \text{Im}s > 0, \\ \frac{1}{v_p^2} - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(v)}{v-s} dv - i\pi g'_0(s), & \text{Im}s = 0, \\ \frac{1}{v_p^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(v)}{v-s} dv - 2\pi i g'_0(s), & \text{Im}s < 0, \end{cases} \quad (39)$$

对积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{1k}(v,0)}{v-s} dv$, Landau 也作了类似的延拓.

本文处理和 Landau 处理的差别相当于在不同的 Riemann 面上讨论问题.

如果背景分布函数 $g'_0(v)$ 在全实轴 $(-\infty, \infty)$ 上不为 0, 比如 Maxwell 分布, 本文所定义的 $\hat{H}_v g'_0(v)$ 在上、下半平面似乎被割裂开了, 没有联系. 但是, 对于真实的物理问题, 我们总可以合理地假定 $g'_0(v)$ 只在有限区间上不为 0. Maxwell 分布可以看作是特殊的例外情况.

实际上, Landau 处理对 $g'_0(v)$, $g_i(v,0)$ 的要求更高. 由于要作人为的解析延拓, 要求 $g'_0(v)$, $g_i(v,0)$ 是 c^∞ 函数, 不然的话, 就无法将它们光滑地延拓到下半平面. 本文处理只要求 $g'_0(v)$, $g_i(v,0)$ Lebesgue 可积.

Penrose 曾指出^[12], $Z_L(s)$ 的零点分布对 $g'_0(v)$ 非常敏感, 因而在物理上是不合理的. $Z(s)$ 不存在这个问题. Hayes^[14], Weizner^[15] 所给出的例子对本文的处理方法而言是自然而然的, 对 Landau 的处理而言则不然^[14,15].

$Z_L(s)$ 在下半平面的零点对应的解是时间渐近解, 严格讲来, 它们不是方程(1)的本征解. 这一点常被混淆. 按照 Landau 的处理, 容易得到

$$g_{1L}(u,t) \simeq g_{1k}(u,0)e^{-ik_1t} + a_{1L} \frac{g'_0(u)}{u-s_1} e^{-ik_1t}, \quad (40)$$

右端的第一项(记作 $g_{L1}(u,t)$) 满足方程

$$\left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial t} + u \right) g_{L1}(u,t) = 0; \quad (41a)$$

右端的第二项(记作 $g_{L2}(u,t)$) 满足方程 ($\text{Im}s < 0$)

$$\left(\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial t} + u \right) g_{L2} = v_p^2 g'_0(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_{L1}(u',t) du' + 2\pi i a_{1L} g'_0(s_1) e^{-ik_1t} \right], \quad (41b)$$

由此可见 Landau 处理的近似性质.

八、线性 Vlasov 方程的基本性质

1. 线性 Vlasov 方程不能保证 $g_0(v) + g_i(v, x, t) \geq 0$, 而 Vlasov 方程总能保证;
2. 对空间平均 $\langle \cdot \rangle$, 总有 $\langle g_i(x, v, t) \rangle = 0$. 因此, 速度为 v 的粒子的总数守恒. 线性 Vlasov 方程描述的是 $g_0(v) + g_i(v, x, t)$ 在空间各点如何重新分布;
3. Vlasov 方程等价于单粒子在自洽势场 φ 中的运动方程. Vlasov 方程线性化后, 两者不再等价, 相空间轨道也失去意义;

4. 由 $\langle g_1(v, x, t) \rangle = 0$ 立即得到粒子的总动量、总动能是守恒的, 因此场能(或粒子势能)没有了约束, 系统的总能量可以不守恒。这是线性化 Vlasov 方程一个最重要的特征;

5. 线性 Vlasov 方程具有时间对称性。因为 $Z(s)$ 的零点关于 s 实轴对称, 本文得到的准确解((26)式)也具有时间对称性。

Dawson^[16] 曾注意到, 线性化多束流方程的解与线性 Vlasov 方程的解有差别。仔细的研究发现, 虽然多束流方程与 Vlasov 方程等价, 但它们的线性化形式不再等价。前者将流体方程的惯性项线性化(它至少还能保证粒子密度的非负性), 而后者将动力论方程的相互作用项线性化。这两种线性理论可以看作是对同一非线性问题的两种不同的线性化方案。详细地比较这两种理论很有趣但超出了本文的范围, 这里只讨论一种特殊的多束流模型, 即 Bohm-Gross 的理论。

Bohm 和 Gross^[8] 在下列情况下得到了静电波能量 W_k 的增长率。

(1) 扰动电场(正弦形式)不是粒子的自洽场; (2) 粒子在扰动电场的作用下运动, 但另有某种机制(或条件)使粒子运动与场不完全相关而具有一定的统计性。或者考虑粒子碰撞引起混合(mixing)^[8], 或者考虑初始时刻粒子在空间的分布是随机的^[17]; (3) 考虑系统的能量守恒, 而不考虑系统的动量守恒。

以上三点恰与线性 Vlasov 理论的出发点相反。实际上, 最后结果也不相同。一般可记

$$\frac{1}{W_k} \frac{dW_k}{dt} = \frac{\pi\omega_p^2}{k^2} \left[g'_0(v_p) + \frac{\lambda}{v_p^2} g_0(v_p) \right]. \quad (42)$$

对文献[8]的(23)式积分, 得出 $\lambda = 2$, 文献[17]的结果(如果不略掉 $g_0(v_p)$ 项)是 $\lambda = 1$, 而 Landau 阻尼率对应于 $\lambda = 0$ 。

通常, 将 Bohm-Gross 理论作为 Landau 阻尼和线性不稳定性理论的物理图象。反过来, 对线性 Vlasov 方程的比较完整的数学处理使人们更确信 Bohm-Gross 理论。两者的互相印证造成了这样一种印象: 我们已经有了较完善的、简单的描述波-粒子共振相互作用的理论。现在看到这种印象是不真实的。等离子体中自洽场与粒子交换能量这一基本物理过程还远没有恰当的理论描述。

回想起流体力学中对共振层的复杂的数学处理, 可以预料, 等离子体物理中的共振问题也将比较复杂。象在流体力学中一样, 这一复杂工作是非做不可的, 因为它是正确理解不稳定性、反常耗散的关键。

九、总 结

1. 本文的数学处理简单明了, 可以更好地把握被积函数的性质, 可在各种复杂的情况下得到线性 Vlasov 方程的准确解。与本文的处理相比, Van Kampen 的方法^[10]不能推广到有奇点的情况, Case 寻求正交完备基的方法^[11]很难包含高阶奇点。本文的数学处理更能反映出与 Landau 处理的差别和相互关系来;

2. $Z(s)$ 的零点分布在 s 复平面上的一个较狭窄的区域之内, 靠近实轴并关于实轴对称。只有一个简单实零点(对某个较小的波数 k 而言)是例外(图 1 中的 v_{ph})。这个实零点对应的波模是在等离子体中自由传播的静电波。由(20)和(27)式, 因为 $Y'(\omega/k) = 0$, 这一波模的势函数是

$$\varphi_k(\omega, t) = \frac{4\pi e}{\omega_p^2} \left[\frac{1}{X'(\omega/k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{1k}(v, 0)}{v - \omega/k} dv \right] e^{-i\omega t}. \quad (43)$$

色散关系是 $X(\omega/k) = 0$, 即

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(v)}{v - \omega/k} dv = 0. \quad (44)$$

线性 Vlasov 方程作为静电波传播理论的基础是没有疑义的;

3. Landau 阻尼是严格意义上的位相散开。一个具有连续谱解的系统, 只要引入随机位相条件就会呈现这种阻尼。Landau 阻尼与波-粒子共振相互作用毫无关系;

4. 线性 Vlasov 方程所描述的不稳定性与川流不稳定性有着共同的机制, 即都是由成束效应引起的。注意到线性 Vlasov 方程不能保证能量守恒, 这种不稳定性是否反映真实的等离子体的不稳定性因而是可疑的。但有一点毫无疑问, 这种不稳定性并不来源于波和粒子间的能量交换;

5. 线性 Vlasov 方程不是适当的描述粒子与其自洽场共振相互作用的出发点。

作者非常感谢张承福、周国成、赵凯华、郭世宠、傅竹风、蔡诗东等先生的诸多帮助。

参 考 文 献

- [1] Sagdeev, R. Z., *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979), 1.
- [2] Dupree, T. H., *Phys. Rev. Lett.*, 25(1970), 789.
- [3] Kadomtsev, B. B. & Pogutse, O. P., *ibid.*, 25(1970), 1155.
- [4] Dupree, T. H., *Phys. Fluids*, 25(1982), 277.
- [5] ———, *ibid.*, 26(1983), 2460.
- [6] Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.
- [7] Landau, L., *J. Phys. (U. S. S. R.)*, 10(1946), 25.
- [8] Bohm, D. & Gross, E., *Phys. Rev.*, 75(1949), 1851; 1864.
- [9] Backus, G., *J. Math. Phys.*, 1(1960), 178.
- [10] Van Kampen, N. G., *Physica*, 21(1955), 949.
- [11] Case, K. M., *Ann. Phys.*, 7(1959), 379.
- [12] Penrose, O., *Phys. Fluids*, 3(1960), 258.
- [13] Jackson, J. D., *J. Nuclear Energy*, 1(1959), 171.
- [14] Hayes, J. N., *Phys. Fluids*, 4(1961), 1387.
- [15] Weitzner, H., *ibid.*, 6(1963), 1123.
- [16] Dawson, J., *Phys. Rev.*, 118(1960), 381.
- [17] Nicholson, D. R., *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, 1983, 87—92.