真拟弱几乎周期点和拟正则点

王肖义^①, 何伟弘^②, 黄煜^{②*}^① 肇庆学院数学与信息科学学院, 肇庆 526061;^② 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275

E-mail: wxy635@163.com, mcshwh@zsu.edu.cn, stshyu@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2013-01-05; 接受日期: 2013-03-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071263) 资助项目

摘要 T 为紧致度量空间 X 上的连续映射, $M(X)$ 为 X 上所有 Borel 概率测度. 设 $x \in X$, 记 $M_x(T)$ 为概率测度序列 $\{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}\}$ 在 $M(X)$ 中的极限点的集合, 其中 δ_x 表示支撑集是 $\{x\}$ 的点测度. 记 $W(T)$ 和 $QW(T)$ 分别为 T 的弱几乎周期点和拟弱几乎周期点集. 本文证明, 如果 (X, T) 非平凡且满足 specification 性质, 则存在 $x, y \in QW(T) \setminus W(T)$ (称为真拟弱几乎周期点), 分别满足 $\exists \mu \in M_x(T)$, $x \in \text{Supp}(\mu)$ 和 $\forall \nu \in M_y(T)$, $y \notin \text{Supp}(\nu)$, 回答了周作领等提出的公开问题. $M_x(T)$ 在弱 * 拓扑中是紧致连通集, 所以, 要么是单点集, 要么是不可数集. 如果 $x \in QW(T) \setminus W(T)$, 则 $M_x(T)$ 是不可数集. 一个自然的问题是, 怎么刻画 $M_x(T)$ 是单点集的点 x (这时 x 称为拟正则点). 本文给出 $M_x(T)$ 是单点集的充要条件.

关键词 不变测度 真拟弱几乎周期点 拟正则点 specification 性质**MSC (2010) 主题分类** 54H20, 37A05, 37B20

1 引言

X 为紧致度量空间, $T: X \rightarrow X$ 为连续映射, 我们称 (X, T) 为动力系统. 令 $\mathcal{B}(X)$ 为 X 上的 Borel σ -代数, $M(X)$ 为 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上所有概率测度的集合. $M(X, T) \subset M(X)$ 为 T 的所有不变测度的集合. 赋 $M(X)$ 以弱 * 拓扑, 即 $\mu_n \rightarrow \mu$ 当且仅当 $\forall f \in C(X)$, $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$. 在弱 * 拓扑下, $M(X)$ 为紧致可度量凸空间, $M(X, T)$ 为 $M(X)$ 的闭凸子集.

设 $\mu \in M(X)$, μ 的支撑集记为 S_μ 或 $\text{Supp}(\mu)$. 对 $x \in X$, δ_x 表示支撑集是 $\{x\}$ 的点测度. 令 $\theta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$, $n = 1, 2, \dots$, 则概率测度集合 $\{\theta_n\}$ 在 $M(X)$ 中的极限点为 T 的不变测度, 记所有这种不变测度的集合为 $M_x(T)$. 如果 $\mu \in M_x(T)$, 则称 μ 为 x 生成的一个不变测度.

文献 [1, 2] 分别引进了弱几乎周期点和拟弱几乎周期点的概念. 设 $E \subset X$ 非空, 其特征函数记为 χ_E . 对 $x \in X$, 记

$$\underline{P}_x(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(T^i(x)), \quad \overline{P}_x(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(T^i(x)).$$

如果 $\underline{P}_x(E) = \overline{P}_x(E)$, 则记为 $P_x(E)$, 称它是在 T 作用下 x 进入 E 的概率. 点 x 称为弱几乎周期点, 如果 $\forall \epsilon > 0$, $\underline{P}_x(V_\epsilon(x)) > 0$, 其中 $V_\epsilon(x)$ 为 x 的 ϵ 邻域. 点 x 称为拟弱几乎周期点, 如果 $\forall \epsilon > 0$,

英文引用格式: Wang X Y, He W H, Huang Y. Proper quasi-weakly almost periodic points and quasi-regular points (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 1185–1192, doi: 10.1360/012013-1

$\overline{P}_x(V_\epsilon(x)) > 0$. 所有的弱几乎周期点和所有的拟弱几乎周期点分别记为 $W(T)$ 和 $QW(T)$. 集合 $E \subset X$ 称为 x 的极小吸引中心, 如果它是闭的 T -不变集, 满足 $\forall \epsilon > 0, P_x(V_\epsilon(E)) = 1$, 且没有真子集亦如此. x 的极小吸引中心表示为 C_x . 由文献 [3], $C_x = \overline{\bigcup_{m \in M_x(T)} S_m}$. 文献 [2] 证明了对回复点 $x \in X$, 以下成立:

$$x \in W(T) \Leftrightarrow x \in C_x = S_m, \quad \forall m \in M_x(T) \Leftrightarrow S_m = \omega_T(x), \quad \forall m \in M_x(T), \quad (1.1)$$

$$x \in QW(T) \Leftrightarrow x \in C_x \Leftrightarrow C_x = \omega_T(x) \Leftrightarrow \omega_T(x) = \overline{\bigcup_{m \in M_x(T)} S_m}, \quad (1.2)$$

其中 $\omega_T(x)$ 表示点 x 的 ω -极限点集.

Zhou 和 Feng^[4] 提出了一个问题: (X, T) 为动力系统, $x \in QW(T) \setminus W(T)$ 为真拟弱几乎周期点, 是否有

$$\exists \mu \in M_x(T), \quad S_\mu = C_x? \quad (1.3)$$

最近, He 等人^[5] 构造了两个例子说明两种情况都是可能的, 即满足上述条件的系统存在, 同样也存在紧致系统 (X, T) 和 $x \in QW(T)$, 使得 $S_\mu \neq C_x, \forall \mu \in M_x(T)$. 同时, Obadalová 和 Smítal^[6] 也给了两个例子说明两种情况都可能发生, 并给出了满足条件 (1.3) 的点存在的一个等价条件. 文献 [5, 6] 中的例子都是在符号动力系统 (Σ_2, σ) 中建立的. 本文利用文献 [7] 中的结果证明, 如果动力系统 (X, T) 具有 specification 性质, 则存在点 $x \in QW(T) \setminus W(T)$ 满足条件 (1.3), 也存在 $y \in QW(T) \setminus W(T)$ 不满足条件 (1.3). 进一步还说明前者是 X 中的剩余集, 后者是稠密的不可数集. 因为符号动力系统 (Σ_2, σ) 具有 specification 性质, 所以, 我们的结果更有一般性.

因为 $M_x(T)$ 是 $M(X, T)$ 的非空闭的连通子集^[8], 所以, $M_x(T)$ 要么为单点集, 要么为不可数集. 如果 $x \in QW(T) \setminus W(T)$, 则 $M_x(T)$ 是不可数集. 而当 $M_x(T)$ 为单点集时, x 称为拟正则点 (quasi-regular point). 所有的拟正则点构成的集合记为 $Q(T)$, 有 $\mu(Q(T)) = 1, \forall \mu \in M(X, T)$ ^[9]. Sigmund^[7] 证明了如果 (X, T) 满足 specification 性质, 则任何一个 $\mu \in M(X, T)$ 都可以由某个 $x \in Q(T)$ 生成. Sigmund^[8] 又进一步证明了在一个紧致系统 (X, T) 中, 任取一个 $\mu \in M(X, T)$, μ 都可以由 (X, T) 的某一扩充 (extension) 中的一个拟正则点生成. 所以, 拟正则点对动力系统来讲具有重要的意义. 本文给出一个点 x 是拟正则点的充要条件, 刻画了这类点的轨道分布特征.

本文中的一些记号如下: (X, ϱ) 为紧致度量空间, ϱ 为距离. 对于集合 $A \subset X$, $\mathcal{L}(A)$ 表示它的极限点 (凝聚点) 集, A^c 表示它的补集, A° 表示它的内部, $\overline{A}$ 表示它的闭包, $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ 表示它的边界. 对于点 $x \in X$ 和 $\epsilon > 0$, $V_\epsilon(x)$ 表示以 x 为中心, ϵ 为半径的开邻域, 即 $V_\epsilon(x) = \{y \in X : \varrho(x, y) < \epsilon\}$. $V_\epsilon(A) = \{x \in X : \varrho(x, A) < \epsilon\}$ 表示集合 A 的 ϵ 邻域. 对两个非空集合 $A, B \subset X$, 它们的 Hausdorff 距离为 $\varrho_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \cup B \subset V_r(A) \cap V_r(B)\}$. 另外记 $\varrho_*(A, B) = \inf\{\varrho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Specification 性质是由 Bowen^[10] 首先引进的, 本文中采用文献 [7] 的定义. 称 (X, T) 具有 specification 性质: 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在整数 $M(\epsilon) > 0$, 使得对任意的点 $x_1, x_2 \in X$ 和连续的整数区间 $A_1 = [a_1, b_1], A_2 = [a_2, b_2]$, 其中 $a_2 - b_1 > M(\epsilon)$, 以及整数 $p > b_2 - a_1 + M(\epsilon)$, 存在周期为 p 的周期点 $x \in X$ 使得

$$\varrho(T^j(x), T^j(x_1)) < \epsilon, \quad j \in A_1,$$

$$\varrho(T^j(x), T^j(x_2)) < \epsilon, \quad j \in A_2.$$

满足该性质的动力系统具有拓扑混合性, 且周期点稠密. 文献 [7] 中罗列了一些满足 specification 性质的例子. 特别地, 符号动力系统具有该性质.

2 真拟弱几乎周期点

本文都假定 (X, T) 为非平凡系统, 即 X 不是单点集.

引理 2.1 [7] 设动力系统 (X, T) 具有 specification 性质, $V \subset M(X, T)$ 为非空闭的连通集, 则存在 $x \in X$ 满足 $M_x(T) = V$.

定理 2.2 若动力系统 (X, T) 具有 specification 性质, 则存在 $x \in QW(T) \setminus W(T)$ 和 $\mu \in M_x(T)$ 使得 $S_\mu = C_x$.

证明 因为 (X, T) 非平凡且具有 specification 性质, 所以, X 不是单个周期轨. 令 $P(T) \subset X$ 为 T 的周期点集. 定义映射 $\gamma: P(T) \rightarrow M(X, T)$ 如下: 对周期为 p 的周期点 x ,

$$\gamma(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{T^i(x)},$$

即 $\gamma(x)$ 是在周期轨道 $\{x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)\}$ 上等分布的概率测度. 取 X 中稠密的周期点序列 $(a_n)_{n \geq 1}$, 不妨设 $\gamma(a_i) \neq \gamma(a_j)$, $1 \leq i < j$. 令

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \gamma(a_n), \quad (2.1)$$

则有 $\mu \in M(X, T)$ 且 $\text{Supp}(\mu) = X$. 令

$$V = \{\theta\mu + (1 - \theta)\gamma(a_1) : 0 \leq \theta \leq 1\}, \quad (2.2)$$

则 V 是 $M(X, T)$ 中非空闭的连通子集. 由引理 2.1, 存在 $x \in X$ 满足 $M_x(T) = V$. 因为 $\text{Supp}(\mu) = X$, 所以, $x \in \text{Supp}(\mu) = C_x$, 由 (1.2) 知, $x \in QW(T)$. 又有 $x \notin \text{Supp}(\gamma(a_1))$, 由 (1.1) 知, $x \notin W(T)$.

定理 2.3 若动力系统 (X, T) 具有 specification 性质, 则存在 $x \in QW(T) \setminus W(T)$ 使得 $S_\mu \neq C_x$, $\forall \mu \in M_x(T)$.

证明 定义 $\gamma: P(T) \rightarrow M(X, T)$ 如上. 令 $(x_i)_{i \geq 1}$ 为 X 中的一个稠密点列. 取一个周期轨 $\{y_1, y_2, \dots, y_Q\} \subset X$, 其周期为 Q . 定义整数序列

$$(s_n)_{n \geq 1} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, \dots\},$$

对 $i \geq 0$, 当 $n = \frac{i(i+1)}{2} + 1$ 时, 有 $s_n = 1$; 在其他处有 $s_{n+1} = s_n + 1$.

对任意的 $n \geq 1$, 令 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. 由 specification 性质, 存在正整数 M_n (只与 ϵ_n 有关), 使得对点 y_1 , $T^{-(nQM_n + M_n)}(x_{s_n})$ (如果不只一点, 可取任何一个) 和连续整数段 $A_1 = \{j : 0 \leq j < nQM_n\}$ 及整数 $nQM_n + M_n$, 存在周期为 $p_n = nQM_n + 3M_n$ 的周期点 a_n 使得

$$\begin{aligned} \varrho(T^j(a_n), T^j(y_1)) &< \epsilon_n, \quad j \in A_1, \\ \varrho(T^{nQM_n + M_n}(a_n), x_{s_n}) &< \epsilon_n. \end{aligned}$$

则有在弱 * 拓扑中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\gamma(a_n) \rightarrow \gamma(y_1). \quad (2.3)$$

我们将在后面利用定理 3.2 给出 (2.3) 的证明. 因为所有 a_n 的轨道的并在 X 中稠密, 下面的式子可以直接得到,

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} \text{Supp}(\gamma(a_n))} = X. \quad (2.4)$$

不妨设 $\gamma(a_i) \neq \gamma(a_j)$, $1 \leq i < j$. 令

$$V_n = \{\theta\gamma(a_n) + (1-\theta)\gamma(a_{n+1}) : 0 \leq \theta \leq 1\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

$$V = \{\gamma(y_1)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} V_n, \quad (2.6)$$

则有 V 是 $M(X, T)$ 的非空闭 (因为 $\gamma(a_n) \rightarrow \gamma(y_1)$) 的连通子集. 由引理 2.1, 存在 $x \in X$ 使得 $M_x(T) = V$. 由 (1.2) 和 (2.4) 知, $x \in QW(T)$. 因为 $x \notin P(T)$, 所以, 有 $x \notin \text{Supp}(\mu), \forall \mu \in V$. 从而, 有 $x \notin W(T)$ 且 $\text{Supp}(\mu) \neq C_x, \forall \mu \in V$.

注 2.4 满足定理 2.2 和 2.3 的真拟弱几乎周期点都在 X 中稠且不可数. 稠密性是显然的, 下面讨论不可数性. 在定理 2.2 中, 把 (2.1) 中 $\gamma(a_1)$ 和 $\gamma(a_2)$ 前面的参数对换, 得到和 μ 不同的全支撑不变测度 μ' . 而 μ 和 μ' 的凸组合是不可数的, 且都是全支撑不变测度. 代入到 (2.2) 中, 则 (2.2) 中的 V 有不可数多个, 从而, 满足 $M_x(T) = V$ 的 x 有不可数多个. 对定理 2.3 中的周期点列 $(a_n)_{n \geq 1}$, 在 (2.5) 中, 用 $\gamma(a_1)$ 和 $\gamma(a_4)$ 的凸组合来代替 $\gamma(a_1)$, 则对应不可数多个 V_1 . 其他 V_n 保持不变, 那么, (2.6) 中对应的 V 就有不可数多个, 从而, 满足 $M_x(T) = V$ 的 x 有不可数多个.

在紧致系统 (X, T) 中, 我们已经知道了对任意的 $\mu \in M(X, T)$, 都有 $\mu(W(T)) = 1$, 周作领^[1] 称这样的集合为绝对测度 1 集. 也就是说, 在不变测度意义下, 弱几乎周期点是最多的点. 但是在拓扑意义下, 弱几乎周期点集却可能“很小”. 下面将说明, 对满足 specification 性质的动力系统, 弱几乎周期点集 $W(T)$ 是第一纲集, 而满足定理 2.2 的点集是剩余集. 我们首先需要一引理.

引理 2.5^[11] 设 (X, T) 是满足 specification 性质的动力系统, 那么, 集合 $\{x : M_x(T) = M(X, T)\}$ 是 X 中的剩余集.

定理 2.6 设 (X, T) 是满足 specification 性质的动力系统, 那么, 集合 $\{x \in QW(T) \setminus W(T) : \exists \mu \in M_x(T) \text{ s.t. } S_\mu = C_x\}$ 是 X 中的剩余集.

证明 记 $\tilde{W}(T) = \{x \in QW(T) : \exists \mu \in M_x(T) \text{ s.t. } S_\mu = C_x\}$. 由引理 2.5, 只要说明

$$\tilde{W}(T) \setminus W(T) \supset \{x : M_x(T) = M(X, T)\}$$

即可. 考虑到 $M(X, T)$ 中存在具有满支撑的测度 μ , 所以, 如果 x 满足 $M_x(T) = M(X, T)$, 则有 $\mu \in M_x(T)$ 且 $x \in \text{Supp}(\mu) = C_x$, 从而, $x \in \tilde{W}(T)$. 但是 $x \notin W(T)$, 因为对于 $M(X, T)$ 中的任何一个周期轨测度 ν , $x \notin \text{Supp}(\nu)$. 证毕. $\square$

如果 $x \in QW(T) \setminus W(T)$, 因为 $x \in \overline{\bigcup_{\mu \in M_x(T)} S_\mu}$ 且 $\exists \mu \in M_x(T)$, $x \notin S_\mu$, 所以, $M_x(T)$ 不是单点集. 由于 $M_x(T)$ 为紧致连通集, 所以, $M_x(T)$ 为不可数集. 从测度来讲, 集合 $QW(T) \setminus W(T)$ 实际上很小. 对任意的不变测度 $\mu \in M(X, T)$, 有 $\mu(QW(T) \setminus W(T)) = 0$. 而只生成一个不变测度的拟正则点, 在测度意义下却很多, 有 $\mu(Q(T)) = 1, \forall \mu \in M(X, T)$. 下面讨论 $M_x(T)$ 为单点集的条件.

3 拟正则点的特征

首先需要一引理.

引理 3.1^[12] 设 $\mu_n, \mu \in M(X)$, $n \geq 1$, 则以下条件等价:

- (1) $\mu_n \rightarrow \mu$;
- (2) 对任意闭集 $F \subset X$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$;
- (3) 对任意开集 $U \subset X$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$;

(4) 若 $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(\partial A) = 0$, 则 $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$.

定理 3.2 (X, ϱ) 为紧致度量空间, $\mu_n \in M(X)$ 是 X 上的概率测度序列, 则以下三个条件等价:

(1) 序列 μ_n 在 $M(X)$ 中收敛, 即存在 $\mu \in M(X)$, 当 $n \rightarrow \infty$, 有 $\mu_n \rightarrow \mu$.

(2) 对任意非空闭集 E , 存在 E 的开邻域列 $(U_j)_{j \geq 1}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(U_j, E) = 0$ 使得对任意 $j \geq 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu_n(U_j)$ 收敛.

(3) 对任意非空开集 U , 存在 U 中闭子集列 $(E_j)_{j \geq 1}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(E_j^c, U^c) = 0$ 使得对任意 $j \geq 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu_n(E_j)$ 收敛.

另外, 当 (1) 成立时, 对 (2) 中的 E 和 $(U_j)_{j \geq 1}$, 有 $\mu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j)$. 对 (3) 中的 U 和 $(E_j)_{j \geq 1}$, 有 $\mu(U) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E_j)$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu_n \rightarrow \mu$. E 为 X 中任意非空闭集. 易知, 对任意两个正实数 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, 有 $\partial V_{\epsilon_1}(E) \cap \partial V_{\epsilon_2}(E) = \emptyset$, 即 E 的不同的 ϵ 邻域边界不交. 由概率测度 μ 满足可数可加性, 正实数集 $\{r : \mu(\partial V_r(E)) \neq 0\}$ 是可数的. 从而, 存在收敛到 0 的正实数列 $(r_j)_{j \geq 1}$, 使得 $\mu(\partial V_{r_j}(E)) = 0, \forall j$. 令 $U_j = V_{r_j}(E)$, 据引理 3.1(4), $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j) = \mu(U_j)$. (2) 得证.

(2) $\Rightarrow$ (3) 当 U 是开集时, U^c 为闭集, 则存在开集序列 $(U_j)_{j \geq 1}$ 满足条件 (2), 即 $U^c \subset U_j$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(U_j, U^c) = 0$$

使得对任意 $j \geq 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu_n(U_j)$ 收敛. 则对开集 U , 闭集序列 $(U_j^c)_{j \geq 1}$ 满足条件 (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) 类似可得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 证明分为两步.

第 1 步 设 E 和 $(U_j)_{j \geq 1}$ 满足 (2). 则极限 $\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j)$ 存在且与 $(U_j)_{j \geq 1}$ 的选取无关.

不妨设 (2) 中的序列 $(U_j)_{j \geq 1}$ 满足条件 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset E$. 因为对某个 j , 存在 $p > j$ 使得 $U_j \supset U_p$. 否则可取点列 $\{x_k : x_k \in U_{j+k} \setminus U_j\}_{k \geq 1}$, 有 $\varrho(x_k, E) \rightarrow 0$. 因为 U_j 为开集, 所以, $\mathcal{L}(x_k)_{k \geq 1} \cap U_j = \emptyset$; 又有 E 为闭集, 所以, $\mathcal{L}(x_k)_{k \geq 1} \subset E$, 产生矛盾. 注意到极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j)$ 存在, 该值随 j 的增大而单调递减, 则下有确界, 所以, $\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j)$ 存在. 如果有另外一个开集序列 $U'_1 \supset U'_2 \supset \cdots \supset E$ 满足条件 (2), 按相同的讨论, 对任意的 j , 存在 $p > j$ 使得 $U_j \supset U'_p, U'_j \supset U_p$. 所以,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U'_j). \quad (3.1)$$

这说明上述极限与 $(U_j)_{j \geq 1}$ 的选取无关.

对 X 中的闭集 E , 定义

$$\nu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j), \quad (3.2)$$

根据刚才的讨论, ν 是 X 的所有非空闭集的集合上的实值函数.

第 2 步 设 Λ 是概率测度序列 $(\mu_n)_{n \geq 1}$ 在 $M(X)$ 中的所有极限点的集合, 因为 $M(X)$ 是紧致度量空间, 所以, Λ 是非空的. 我们将证明 Λ 是单点集.

令 $\mu \in \Lambda$, 即存在正整数列 n_k 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$. 对于闭集 $E \subset X$, 类似于 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明, 我们可以得到存在 E 的开邻域列 $(V_j)_{j \geq 1}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(V_j, E) = 0$ 且有 $\mu(\partial V_j) = 0$, 使得对任意 $j \geq 1$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\mu_{n_k}(V_j) \rightarrow \mu(V_j)$. 那么, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(V_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(V_j) = \mu(E). \quad (3.3)$$

由第 1 步的讨论知,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(V_j) = \nu(E). \quad (3.4)$$

联立 (3.3) 和 (3.4) 得到

$$\mu(E) = \nu(E). \quad (3.5)$$

这说明对任意的闭集 E 和 $\mu, \mu' \in \Lambda$, 都有 $\mu(E) = \mu'(E) = \nu(E)$. 再由 μ 和 μ' 的正则性, 我们得到

$$\mu(B) = \mu'(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

所以, $\mu = \mu'$, 从而, Λ 是单点集.

最后, 当 (1) 成立时, 对条件 (2) 中的 E 和 $(U_j)_{j \geq 1}$, 由 (3.5) 得到

$$\mu(E) = \nu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j).$$

同样可以证明, 对条件 (3) 中的 U 和 $(E_j)_{j \geq 1}$, 有

$$\mu(U) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E_j).$$

注 3.3 定理 3.2 与引理 3.1 的区别在于给定一个测度序列 μ_n , 要证明它是收敛的, 如果利用引理 3.1, 就要先找到一个测度 μ , 然后再对开集或闭集 E , 比较 $\mu(E)$ 和 $\mu_n(E)$ 的极限来判断; 但是利用定理 3.2, 就不需要先找到一个 μ , 只要说明满足一些条件的开集或闭集 E 的测度 $\mu_n(E)$ 的极限存在就可以了. 如在 (2.3) 中, 要证明 $\gamma(a_n) \rightarrow \gamma(y_1)$. 因为给出了要收敛到的极限 $\gamma(y_1)$, 所以, 可以用引理 3.1 来证明. 我们这里利用定理 3.2 来证明, 可以看到区别.

(2.3) 的证明 取任意非空闭集 $E \subset X$, 设基数 $\text{Card}(E \cap \{y_1, \dots, y_Q\}) = k$, $0 \leq k \leq Q$. 令 $r = \varrho_*(E, \{y_1, \dots, y_Q\} \setminus E)$. 设 $\frac{1}{M} < \frac{r}{2}$. 当 $n > m > M$ 时, 有

$$\begin{aligned} \gamma(a_n)(V_{\frac{1}{m}}(E)) &\geq \frac{knM_n}{nQM_n + 3M_n} \rightarrow \frac{k}{Q}, \quad n \rightarrow \infty, \\ \gamma(a_n)(V_{\frac{1}{m}}(E)) &\leq \frac{knM_n + 3M_n}{nQM_n + 3M_n} \rightarrow \frac{k}{Q}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

所以,

$$\gamma(a_n)(V_{\frac{1}{m}}(E)) \rightarrow \frac{k}{Q}, \quad n \rightarrow \infty, \quad m = M+1, M+2, \dots$$

满足定理 3.2(2). 所以, 存在概率测度 μ 使得 $\gamma(a_n) \rightarrow \mu$. 因为

$$\mu(\{y_i\}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(a_n)(V_{\frac{1}{m}}(y_i)) = \frac{1}{Q} = \gamma(y_1)(\{y_i\}), \quad i = 1, 2, \dots, Q,$$

所以, $\mu = \gamma(y_1)$.

利用定理 3.2, 我们得到拟正则点的轨道分布的刻画, 就是下面的推论.

推论 3.4 (X, T) 为动力系统, $x \in X$, 则以下三个条件等价:

(1) x 为拟正则点;

(2) 对任意非空闭集 E , 存在 E 的开邻域列 $(U_j)_{j \geq 1}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(U_j, E) = 0$ 使得对任意 $j \geq 1$, $P_x(U_j)$ 存在;

(3) 对任意非空开集 U , 存在 U 中闭子集列 $(E_j)_{j \geq 1}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_H(E_j^c, U^c) = 0$ 使得对任意 $j \geq 1$, $P_x(E_j)$ 存在.

另外, 当 (1) 成立时, 设 $M_x(T) = \{\mu\}$, 则对 (2) 中的 E 和 $(U_j)_{j \geq 1}$, 有 $\mu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} P_x(U_j)$. 对 (3) 中的 U 和 $(E_j)_{j \geq 1}$, 有 $\mu(U) = \lim_{j \rightarrow \infty} P_x(E_j)$.

证明 在定理 3.2 中令 $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$, 有

$$P_x(E_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E_j), \quad P_x(U_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j),$$

可得结论. $\square$

推论 3.5 (X, T) 为动力系统, $x \in X$, 如果对每个非空开集 $U \subset X$, 有 $P_x(U)$ 存在, 则 x 为拟正则点.

注 3.6 不变测度是遍历论研究的主要对象. 在文献 [8] 中, 称一个动力系统 (X', T') 是 (X, T) 的扩充, 如果存在 T' -不变闭集 $E \subset X'$ 使得 T 和 $T'|_E$ 拓扑共轭. 文献 [8] 证明了对任何一个不变测度 $\mu \in M(X, T)$, 都存在 (X, T) 的某个扩充中的拟正则点生成它. 特别地, 如果 (X, T) 满足 specification 性质, 则对任何一个不变测度 $\mu \in M(X, T)$, 都存在 X 中的一个拟正则点生成它. 所以, 拟正则点对不变测度来讲至关重要. 推论 3.4(2) 和 3.4(3) 给出了一个点是拟正则点的拓扑意义下的描述. 该类点生成的轨道的分布是“基本上稳定的”. 推论 3.5 要求点的轨道分布在每一个开集里面都稳定, 这样看起来最简洁, 但它是拟正则点的充分而非必要条件, 以下是反例.

例 3.7 定义整数列 $(s_i)_{i \geq 0}$ 如下:

$$s_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 1, & 4^{2n} \leq i < 4^{2n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ -1, & 4^{2n+1} \leq i < 4^{2n+2}, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

在线段 $I = [-1, 1]$ 上, 令

$$f^i(1) = \frac{s_i}{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad f(0) = 0,$$

则 f 是点 1 的轨道闭包 $\{1, f^1(1), f^2(1), \dots, 0\}$ 上的连续函数. 根据 Tietze 扩张定理可以将它扩张成整个线段 I 上的连续函数 $f: I \rightarrow I$. 因为 $\omega_f(1) = \{0\}$ 为单点集, 所以, 点 1 生成的不变测度只有一个为 δ_0 . 但是对开区间 $(0, 1)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{2n}} \sum_{i=0}^{4^{2n}-1} \chi_{(0,1)}(f^i(1)) < \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{2n+1}} \sum_{i=0}^{4^{2n+1}-1} \chi_{(0,1)}(f^i(1)) > \frac{3}{4},$$

所以, $P_1((0, 1))$ 不存在.

致谢 对两位审稿人表示衷心的感谢, 他们中肯的意见使得本文进一步完善. 我们在注 2.4 中说明了满足定理 2.2 的点是稠密不可数的, 一位审稿人指出这个结论可以加强为 X 中的剩余集, 这样就有了定理 2.6. 原来我们在定理 3.2 中证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 是基于泛函分析的方法, 篇幅上比较长. 另一位审稿人给我们提供了简洁的证明方法, 我们现在看到的 (2) $\Rightarrow$ (1) 中第 2 步证明就是基于审稿人给出的意见.

参考文献

- 1 周作领. 弱几乎周期点和测度中心. 中国科学 A 辑, 1992, 35: 572–581

- 2 周作领, 何伟弘. 轨道结构的层次与拓扑半共轭. 中国科学 A 辑, 1995, 25: 457–464
- 3 周作领. 测度中心与极小吸引中心. 科学通报, 1992, 23: 2115–2118
- 4 Zhou Z Z, Feng L. Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy. Nonlinearity, 2004, 17: 493–502
- 5 He W H, Yin J D, Zhou Z L. On quasi-weakly almost periodic points. Sci China Math, 2013, 56: 597–606
- 6 Obadalová L, Smítal J. Counterexamples to the open problem by Zhou and Feng on the minimal centre of attraction. Nonlinearity, 2012, 25: 1443–1449
- 7 Sigmund K. On dynamical systems with the specification property. Trans Amer Math Soc, 1974, 190: 285–299
- 8 Sigmund K. On minimal centers of attraction and generic points. J Reine Angew Math, 1977, 295: 72–79
- 9 Oxtoby J. Ergodic sets. Bull Amer Math Soc (NS), 1952, 58: 116–136
- 10 Bowen R. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. Trans Amer Math Soc, 1971, 154: 377–397
- 11 Denker M, Grillenberger C, Sigmund K. Ergodic Theory on Compact Spaces. New York: Springer-Verlag, 1976
- 12 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag, 1982

Proper quasi-weakly almost periodic points and quasi-regular points

WANG XiaoYi, HE WeiHong & HUANG Yu

Abstract Let X be a compact metric space and $T : X \rightarrow X$ be a continuous map. Denote by $M(X)$ the set of all Borel probability measures on X . For $x \in X$, let $M_x(T)$ be the set of all limit points of the sequence $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$ in $M(X)$, where δ_x is the atomic probability measure with support $\{x\}$. Denote by $W(T)$ and $QW(T)$ the sets of all weakly almost periodic points and quasi-weakly almost periodic points of T , respectively. We proved that if T has specification property, then there exist $x, y \in QW(T) \setminus W(T)$, respectively, with the properties that $\exists \mu \in M_x(T)$, $x \in \text{Supp}(\mu)$ and $\forall \nu \in M_y(T)$, $y \notin \text{Supp}(\nu)$. This answers the open problem proposed by Zhou and Feng. On the other hand, it is well known that $M_x(T)$ is a nonempty closed connected subset of $M(X)$ in the weak* topology. If $x \in QW(T) \setminus W(T)$, $M_x(T)$ will be uncountable. A natural problem is how to characterize the point x with $M_x(T)$ being a singleton. We give a characterization of such x 's.

Keywords invariant measures, proper quasi-weakly almost periodic points, quasi-regular points, specification property

MSC(2010) 54H20, 37A05, 37B20

doi: 10.1360/012013-1