中 国 科 学 (A 辑)
第 29 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1999 年 1 月

反全纯对合与四维流形的近复结构 *

高红铸
(北京师范大学数学系, 北京 100875)

摘要 设 σ 是近复流形 X 上的一个反全纯对合, 讨论了 $Y=X/\sigma$ 上近复结构的存在性问题.

关键词 四维流形 反全纯对合 近复结构

1 主要结果

设 X 是一个近复流形, X 上的一个反全纯(全纯)对合是指一个光滑对合 $\sigma: X \to X$, 它在切丛 TX 上诱导的映射 σ_* 满足 $\sigma_* \circ J = -J \circ \sigma_*$ ($\sigma_* \circ J = J \circ \sigma_*$), 其中 J 是 X 上的近复结构. 反全纯对合的一个典型例子是复共轭. 在复曲面对应的拓扑流形上寻找有奇异微分结构的例子是一个很重要的问题. 最早的例子由文献[1]给出: $CP^2 \# 9\overline{CP^2}$ 拓扑同胚但不微分同胚于 Dolgachev 曲面 $D_{2,3}$. 随后其他一些有奇异微分结构的流形相继被发现. 注意到若 σ 是复曲面 X 上的全纯对合, 则 X/σ 上有复结构. 自然地, 若 X 是复曲面, σ 是 X 上的反全纯对合, 则可以讨论 $Y=X/\sigma$ 上的拓扑, 特别地, Y 上是否还有复结构? 文献[2]通过研究这个问题找到了一批新的具有奇异微分结构的例子.

设 X 是紧致连通的四维近复流形, σ 是 X 上的反全纯对合. 记 $\Sigma = \mathrm{fix}(\sigma)$ 是 σ 的不动点集, 则 Σ 是 X 的二维子流形[3]. 从而 $Y=X/\sigma$ 是光滑四维流形.

通过计算 $Y=X/\sigma$ 的 Donaldson 不变量, 可以证明

命题 1[2] 设 X 是单连通复曲面, $b_2^+(X) \geqslant 2$, 如果 $\Sigma = \mathrm{fix}(\sigma)$ 是亏格大于 1 的可定向连通曲面, 则 $Y=X/\sigma$ 上无复结构.

文献[4]利用 Seiberg-Witten 理论证明了

命题 2 设 X 是 Kähler 曲面, $K_X^2 > 0$, $b_2^+(X) \geqslant 4$, 如果 σ 是 X 上没有不动点的反全纯对合, 则 $Y=X/\sigma$ 的 Seiberg-Witten 不变量为 0.

作为命题 2 的推论, 若 X 是单连通复曲面, $\mathrm{fix}(\sigma) = \varnothing$, 则 $Y=X/\sigma$ 上无复结构.

对于单连通复曲面, 以下几种情形尚未解决:

(i) $\mathrm{fix}(\sigma)$ 不连通;

(ii) $\mathrm{fix}(\sigma)$ 是连通的不可定向曲面;

(iii) $\mathrm{fix}(\sigma)$ 是连通的定向曲面, 但亏格是 0 或 1;

1998-07-03 收稿, 1998-09-07 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19771010)

(iv) $b_2^+(X)=1$ 或 $b_2^+(X)=3$, 但 $\mathrm{fix}(\sigma)=\emptyset$.

例 1　$X=\mathrm{CP}^2$, σ 是 X 上的复共轭, 则 $\mathrm{fix}(\sigma)=\mathrm{RP}^2$, $Y=X/\sigma=S^4$.

例 2　$X=\mathrm{CP}^1\times\mathrm{CP}^1$, σ: $([x_1,y_1],[x_2,y_2])\mapsto([\bar{x}_1,\bar{y}_1],[\bar{x}_2,\bar{y}_2])$, 此时,

$$\mathrm{fix}(\sigma)=S^1\times S^1,\quad Y=X/\sigma=S^4.$$

例 3　$X=\mathrm{CP}^1\times\mathrm{CP}^1$, σ: $([x_1,y_1],[x_2,y_2])\mapsto([\bar{x}_2,\bar{y}_2],[\bar{x}_1,\bar{y}_1])$, 此时,

$$\mathrm{fix}(\sigma)=S^2,\quad Y=X/\sigma=\overline{\mathrm{CP}}^2.$$

在这 3 个例子中, 商空间均无复结构, 甚至没有近复结构. 由此启发从近复结构的角度考虑该问题. 本文证明了在 X 满足一定的条件时, 对 X 上任意反全纯对合 σ, $Y=X/\sigma$ 上均无近复结构, 从而也没有复结构. 需要说明的是这个结论与命题 1 和 2 互不包含.

本文的主要结果如下:

定理 1　设 X 是四维近复流形, 其近复结构为 J, σ 是 X 上的反全纯对合. 若 $b_2^+(X)-b_1(X)\neq 3(\mathrm{mod}\ 4)$, 则 $Y=X/\sigma$ 上无近复结构.

由于有理曲面的 b_2^+ 等于 1, 故立刻有: 对所有有理曲面 X, $Y=X/\sigma$ 上无近复结构.

定理 2　设 X 是四维近复流形, $H_1(X,\mathrm{Z})$ 无二阶元, σ 是 X 上的反全纯对合. 设 $\mathrm{fix}(\sigma)$ 是空集或可定向曲面, 若 $c_1(X)=0$, 则 $Y=X/\sigma$ 上有近复结构.

定理的证明需要以下熟知的 Ehresmann-Wu 关于四维流形上近复结构的刻画.

命题 3[5]　设 Y 是光滑的定向闭四维流形, Y 上有近复结构当且仅当存在一个示性类 $c\in H^2(Y,\mathrm{Z})$, 满足 $c\circ c=2\chi(Y)+3\sigma(Y)$, 其中 $\chi(Y)$ 和 $\sigma(Y)$ 分别表示 Y 的 Euler 示性数和符号差.

2　几个基本关系

设 X, σ 如定理 1 和 2 所述. 记 $Y=X/\sigma$, $\Sigma=\mathrm{fix}(\sigma)$. 假设 Σ 非空, 则 Σ 是一曲面[3]. 设 $p: X\to Y$ 是自然投影, 给 Y 定向使得 p 是保定向映射. p 是带分歧点的二重覆盖, 其不动点集即为 Σ, 故有 Euler 数的关系

$$\chi(X)=2\chi(Y)-\chi(\Sigma).\tag{2.1}$$

由文献[3] 中定理 22.4 的证明, 近复结构 J 诱导了 Σ 的切丛到法丛间的同构 $J: T\Sigma\to N\Sigma$, 这个同构是局部反定向的, 从而有 Euler 类的关系 $e(T\Sigma)=-e(N\Sigma)$ (如果 Σ 不可定向则采用局部系数上同调), 故在 X 中,

$$\chi(\Sigma)=e(T\Sigma)[\Sigma]=-e(N\Sigma)[\Sigma].\tag{2.2}$$

另一方面, 由 Atiyah-Singer 的 G-符号差定理[6],

$$e(N\Sigma)[\Sigma]=\mathrm{sign}(X,\sigma).\tag{2.3}$$

由于 σ 是 X 上的保定向对合, 故 $\mathrm{sign}(X,\sigma)$ 可以定义为 $H^2(X,\mathrm{R})$ 上如下的对称双线性型的符号差:

$$x\circ y=(x\cup\sigma^*(y))[X],\qquad x,y\in H^2(X,\mathrm{R}).\tag{2.4}$$

下面计算这个双线性型的符号差. 除非特别指明, 本节中均采用实系数上同调群.

设 $\Sigma=\bigcup\Sigma_i$, 其中 Σ_i 是 Σ 的连通分支. 记 Σ_i 在 X 中的闭管状邻域为 A_i^X, 它们两两互不相交, 记 $A^X=\bigcup A_i^X$, $B^X=\overline{X-A^X}$, $E^X=A^X\cap B^X$, $E^X=\bigcup E_i^X$, 则 A_i^X 可以看作 Σ_i 上的 D^2-丛, E_i^X

是 A_i^X 的边界, 是 Σ_i 上的 S^1-丛. 记 $A_i^Y=p(E_i^X)$, $A^Y=p(A^X)=\bigcup A_i^Y$, $B^Y=p(B^X)$, $E_i^Y=p(E_i^X)$, $E^Y=p(E^X)$, 则 A_i^Y 是 Σ_i 在 Y 中的管状邻域, $B^Y=\overline{Y-A^Y}$, $E^Y=A^Y\cap B^Y$. p 限制在 B^X 上是二重覆盖. $p: X\to Y$ 诱导了以下实系数上同调序列间的映射,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\to H^1(Y,B^Y) & \xrightarrow{j_Y} & H^1(Y) & \xrightarrow{i_Y} & H^1(B^Y) & \xrightarrow{\delta_Y} & H^2(Y,B^Y) & \xrightarrow{j_Y} & H^2(Y) & \xrightarrow{i_Y} & H^2(B^Y) & \xrightarrow{\delta_Y} & H^3(Y,B^Y)\to \\
\cong\downarrow p_1^* & & \downarrow p_2^* & & t^*\uparrow\ \downarrow p_3^* & & \cong\downarrow p_4^* & & \downarrow p_5^* & & t^*\uparrow\ \downarrow p_6^* & & \cong\downarrow p_7^* \\
\to H^1(X,B^X) & \xrightarrow{j_X} & H^1(X) & \xrightarrow{i_X} & H^1(B^X) & \xrightarrow{\delta_X} & H^2(X,B^X) & \xrightarrow{j_X} & H^2(X) & \xrightarrow{i_X} & H^2(B^X) & \xrightarrow{\delta_X} & H^3(X,B^X)\to
\end{array} \tag{2.5}$$

其中 p_j^* 由覆盖 p 诱导, $t^*: H^*(B^X,Z)\to H^*(B^Y,Z)$ 是覆盖空间的转换同态, 它满足[7]

$$\begin{cases} p^*t^*(x)=x+\sigma^*(x), & \forall x\in H^*(B^X,Z), \\ t^*p^*(y)=2y, & \forall y\in H^*(B^Y,Z). \end{cases} \tag{2.6}$$

从而在相差一个二阶元的意义下, $p^*: H^*(B^Y,Z)\to H^*(B^X,Z)$ 是单射. 特别地, 现在讨论实系数同调群, 故 p_3^*, p_6^* 是单射, t^* 满. 除了 t^* 外, 以上图表是交换的. 对合 σ^* 作用在下面一行正合序列上, 与 i_X, j_X, δ_X 交换. 下面一行序列中每一项均可分解成 σ^* 的 $+1$ 或 -1 特征子空间的直和.

由交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
H^3(Y,B^Y) & \xrightarrow{\phi_Y} & H^3(A^Y,E^Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & H_1(A^Y) \\
\downarrow p_7^* & & \downarrow p_8^* & & \uparrow p_9^* \\
H^3(X,B^X) & \xrightarrow{\phi_X} & H^3(A^X,E^X) & \xrightarrow{\psi_X} & H_1(A^X)
\end{array}$$

(其中 ϕ 是切除映射, ψ 是 Poincaré-Lefschetz 对偶(如果 Σ 不可定向, 则相应的同调群用局部系数)), 知 ϕ_X, ϕ_Y, ψ_X, ψ_Y 都是同构. $p: A^X\to A^Y$ 是同伦等价, 因而 p_9^* 是同构, 所以 p_8^*, p_7^* 均是同构. 类似地 p_4^*, p_1^* 亦为同构.

引理 1 p_5^* 是单同态, 并且 $H^2(X)=H_+^2(X)\oplus H_-^2(X)=p_5^*H^2(Y)\oplus H_-^2(X)$, 其中 $H_+^2(X)$, $H_-^2(X)$ 分别是 $H^2(X)$ 的 $+1$ 和 -1 特征子空间.

证 假设对某个 $y\in H^2(Y)$, $p_5^*(y)=0$, 则 $p_6^*\circ i_Y(y)=i_X\circ p_5^*(y)=0$. 由 p_6^* 单, 故 $i_Y(y)=0$. 从而存在某个 $z\in H^2(Y,B^Y)$, 使得 $j_Y(z)=y$. 下面证明 $z\in \mathrm{im}\,\delta_Y$, 从而可推出 $y=0$. 由于 $j_X\circ p_4^*(z)=p_5^*\circ j_Y(z)=p_5^*(y)=0$, 故 $p_4^*(z)\in\ker j_X=\mathrm{im}\,\delta_X$, 故存在 $u\in H^1(B_X)$, 使得 $\delta_X(u)=p_4^*(z)$. 考虑 $t^*(u)\in H^1(B^Y)$, 注意到 p_4^* 是同构, 故 $H^2(X,B^X)$ 属于 σ^* 的 $+1$ 特征子空间, 所以 $p_4^*\circ\delta_Y(t^*(u))=\delta_X\circ p_3^*(t^*(u))=\delta_X(u+\sigma^*(u))=\delta_X(u)+\sigma^*\circ\delta_X(u)=2\delta_X(u)=2p_4^*(z)$.

由 p_4^* 是同构, 推出 $z=\delta_Y\circ t^*(u/2)\in\mathrm{im}\,\delta_Y$, 从而 $y=j_Y(z)=0$, 故 p_5^* 单.

下面证明 $p_5^*H^2(Y)=H_+^2(X)$. $p_5^*H^2(Y)\subset H_+^2$ 显然. 反之, 任取 $x\in H_+^2$, 则 $\sigma^*(x)=x$. $\sigma^*\circ i_X(x)=i_X\circ\sigma^*(x)=i_X(x)$, 所以 $i_X(x)\in H^2(B^X)$ 的 $+1$ 特征子空间. 由于 t^* 满, p_6^* 单, 故 $H^2(B^X)=\mathrm{im}\,p_6^*\oplus\ker t^*$, 但由 (2.6) 式, $\ker t^*$ 是 $H^2(B^X)$ 的 -1 特征子空间, 故 $i_X(x)\in\mathrm{im}\,p_6^*$. 从而存在 $y\in H^2(B^X)$, 使得 $p_6^*(y)=i_X(x)$. 所以

$$\delta_X\circ p_6^*(y)=\delta_X\circ i_X(x)=0=p_7^*\circ\delta_Y(y).$$

由 p_7^* 是同构，故 $\delta_Y(y)=0$，即 $y\in\ker\delta_Y=\mathrm{im}\,i_Y$．取 $z\in H^2(Y)$，使得 $i_Y(z)=y$，则有

$$i_X(x)=p_6^*(y)=p_6^*\circ i_Y(z)=i_X\circ p_5^*(z).$$

由此知 $x-p_5^*(z)\in\ker i_X=\mathrm{im}\,j_X$，所以

$$x-p_5^*(z)=j_X(u)$$

对某个 $u\in H^2(X,B^X)$．注意到 p_4^* 是同构，故存在 $v\in H^2(Y,B^Y)$，使得 $p_4^*(v)=u$．因此

$$x=p_5^*(z)+j_X(u)=p_5^*(z)+j_X\circ p_4^*(v)=p_5^*(z)+p_5^*\circ j_Y(v)=p_5^*(z+j_Y(v)),$$

即 $x\in\mathrm{im}\,p_5^*$．

3　定理的证明

定理 1 的证　设 $u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_m$ 是对应于引理 1 中 $H^2(X)$ 的直和分解的一组基，其中 u_i,v_j 分别为 $+1$ 和 -1 特征子空间的基．注意 σ 保定向，故 σ^* 诱导 $H^4(X)$ 的恒等映射．所以 $u_i\cup v_j=\sigma^*(u_i\cup v_j)=\sigma^*(u_i)\cup\sigma^*(v_j)=u_i\cup(-v_j)$，即 $u_i\cup v_j=0$．所以对称双线性型(2.4)式的矩阵为

$$\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & & \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 & & & & \\ & & & & -v_1^2 & -v_1v_2 & \cdots & -v_1v_m \\ & 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & -v_mv_1 & -v_mv_2 & \cdots & -v_m^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix},$$

其符号差 $\mathrm{sign}(X,\sigma)=\sigma(M_1)-\sigma(M_2)$，其中 $\sigma(M_i)$ 是矩阵 M_i 的符号差．注意到 $\sigma(M_1)$ 恰好是 Y 的符号差，故

$$\mathrm{sign}(X,\sigma)=\sigma(Y)-\sigma(M_2). \tag{3.1}$$

但 $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ 恰好是 X 上通常的二次型矩阵，故

$$\sigma(X)=\sigma(M_1)+\sigma(M_2)=\sigma(Y)+\sigma(M_2). \tag{3.2}$$

由(2.2)、(2.3)、(3.1)和(3.2)式得

$$\sigma(Y)=(\sigma(X)+\mathrm{sign}(X,\sigma))/2=(\sigma(X)-\chi(\Sigma))/2. \tag{3.3}$$

假如 Y 上有近复结构，由 Ehresmann-Wu 的定理，存在示性类 $c\in H^2(Y,Z)$，使得

$$c\circ c=2\chi(Y)+3\sigma(Y).$$

由于 c 是示性类，故 $c\circ c=\sigma(Y)\bmod 8$，因而 $2\chi(Y)+3\sigma(Y)=\sigma(Y)\bmod 8$．将(2.1)和(3.3)式代入，得

$$\chi(X)+\sigma(X)=0\bmod 8,$$

即

$$1-b_1+b_2^+=0\bmod 4$$

或

$$b_2^+ - b_1 = 3 \bmod 4.$$

为证明定理 2, 需要以下引理.

引理 2 设 X, Y, σ 如定理 1, p: $X \to Y$ 是投影, 则 $x \in \mathrm{H}^2(X, \mathrm{Z})$满足 $\sigma^*(x) = x$ 的充分必要条件是$x \in p^*\mathrm{H}^2(Y, Z)$.

证 充分性显然.

必要性: 先设 $\mathrm{fix}(\sigma) = \emptyset$, 此时 p: $X \to Y$ 是二重覆盖. 因为 $x \in \mathrm{H}^2(X, \mathrm{Z})$满足 $\sigma^*(x) = x$, 从而存在第一陈类为 x 的X 上的复线丛L, 以及 L 上的等变映射 σ^*, 使得以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma^*} & L \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

把 X 中的x 与$\sigma(x)$等同, 同时利用 σ^*等同x 上的纤维L_x 与$\sigma(x)$上的纤维 $L_{\sigma(x)}$, 得到 Y 上的一个复线丛 $\bar{L}$, 其局部平凡性由二重覆盖 p: $X \to Y$ 及复线丛π: $L \to X$ 的局部平凡性给出. 从而 $p^*\mathrm{e}(\bar{L}) = \mathrm{e}(L) = x$, 故 $x \in p^*\mathrm{H}^2(Y, \mathrm{Z})$.

若 $\mathrm{fix}(\sigma) \neq \emptyset$, 设 $x \in \mathrm{H}^2(X, \mathrm{Z})$并且 $\sigma^*(x) = x$, 注意到(2.5)式的交换图对整系数同样成立, 并且 p_1^*, p_4^* 和 p_7^* 还是同构, 但 t^*不一定满, p_3^* 和 p_6^* 不一定单.

因为 $\sigma^* \circ i_X(x) = i_X \circ \sigma^*(x) = i_X(x)$, 并且 p_6: $B^X \to B^Y$ 是二重覆盖, 由已证明过的 $i_X(x) \in \mathrm{im} p_6^*$, 即存在 $y \in \mathrm{H}^2(B^Y, \mathrm{Z})$, 使得 $p_6^*(y) = i_X(x)$. 同引理 1 中证明 $p_5^*\mathrm{H}^2(Y) = \mathrm{H}_+^2$ 的后一部分完全相同, 有 $x \in \mathrm{im} p_5^*$(那里的 p_5^* 即这里的 p^*).

定理 2 的证 设 $\mathrm{c}_1(X) = 0$. 由上节的计算可知, $\chi(Y) = (\chi(X) + \chi(\Sigma))/2$, $\sigma(Y) = (\sigma(X) - \chi(\Sigma))/2$. 要证明 Y 上有近复结构, 只要找到 $c \in \mathrm{H}^2(Y, \mathrm{Z})$, 满足 $c = \mathrm{w}_2(Y) \bmod 2$, 并且

$$c \circ c = 2\chi(Y) + 3\sigma(Y) = (2\chi(X) + 3\sigma(X) - \chi(\Sigma))/2 = (\mathrm{c}_1(X) \circ \mathrm{c}_1(X) - \chi(\Sigma))/2 = -\chi(\Sigma)/2. \tag{3.4}$$

考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^2(Y, \mathrm{Z}) & \xrightarrow{r} & \mathrm{H}^2(Y, \mathrm{Z}_2) \\ p^*\downarrow & & \downarrow p^* \\ \mathrm{H}^2(X, \mathrm{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X, \mathrm{Z}_2) \end{array}$$

其中 r 是模 2 运算. 由文献[8]中定理 1 的推论 2 知, $\mathrm{w}_2(X) = p^*\mathrm{w}_2(Y) + \phi(1)$, 其中 ϕ 是以下同调群同态的复合, $1 \in \mathrm{H}^0(\Sigma)$是生成元,

$$\mathrm{H}^0(\Sigma) \xrightarrow{T} \mathrm{H}^2(A^X, E^X) \xrightarrow{i} \mathrm{H}^2(X, B^X) \xrightarrow{j} \mathrm{H}^2(X),$$

这里 T 是 Thom 同构, 它把 1 映为 Σ上法丛的 Thom 类, A^X, E^X, B^X 如上节, 分别是 Σ 在X 中的闭管状邻域, 其边界及余集的闭包, i 是切除同构, j 是包含映射诱导的同态. 由 Thom 类的定义, 知 $\phi(1) = [\Sigma]_X \bmod 2$. 因此有 $\mathrm{w}_2(X) = p^*\mathrm{w}_2(Y) + [\Sigma]_X \bmod 2$. 因为 $p_*([\Sigma] \cap [X]) = p_*([\Sigma]_X) = [\Sigma] \in \mathrm{H}_2(Y, \mathrm{Z})$, 这里$[\Sigma]$ 表示 Σ 在Y 中的同调类, $p_*(p^*[\Sigma]_Y \cap [X]) = [\Sigma]_Y \cap p_*[X] = [\Sigma]_Y \cap 2[Y] = 2[\Sigma] \in \mathrm{H}_2(Y, \mathrm{Z})$, 所以 $p_*((p^*[\Sigma]_Y - 2[\Sigma]_X) \cap$

$[X])=0$．又由 $\sigma^*[\Sigma]_X=[\Sigma]_X$，知存在 $a\in H^2(Y,Z)$，使得 $[\Sigma]_X=p^*(a)$，故 $p_*(p^*([\Sigma]_Y-2a)\cap[X])=0$．

考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} p^*H^2(Y,Z) & \xrightarrow{\cap[X]} & p^*H^2(Y,Z)\cap[X] \\ \uparrow p^* & & \downarrow p_* \\ H^2(Y,Z) & \xrightarrow{\cap 2[Y]} & H_2(Y,Z) \end{array}$$

因为 p^* 和 $\cap 2[\Sigma]$ 模挠元是单的，而 $\cap[X]$ 是同构，故 p_* 模挠元是单的．由此可见 $[\Sigma]_Y-2a$ 是挠元．故 $a=([\Sigma]_Y+t)/2$，其中 $t\in\mathrm{Tor}\,H^2(Y,Z)$．因而有

$$w_2(X)=p^*w_2(Y)+[\Sigma]_X(\mathrm{mod}\ 2)=$$

$$p^*\left[w_2(Y)+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)(\mathrm{mod}\ 2)\right],$$

这里 $[\Sigma]_Y$ 表示 Σ 在 Y 中的上同调类．

因为 Y 是可定向闭四维流形，故存在 $u\in H^2(Y,Z)$，使得 $r(u)=w_2(Y)$．从而

$$r\circ p^*\left(u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)=p^*\circ r\left(u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)=$$

$$p^*\left(w_2(Y)+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)(\mathrm{mod}\ 2)\right)=w_2(X)=0,$$

故 $p^*\left(u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)$ 是 $H^2(X,Z)$ 中的偶元，即存在一个 $x\in H^2(X,Z)$，使得 $p^*\left(u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)=2x$．显然 $\sigma^*(x)=x$．由引理 2，存在 $v\in H^2(Y,Z)$，使得 $p^*(v)=x$．从而 $p^*\left(u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)-2v\right)=0$．由引理 1，$p^*$ 在实上同调上是单射，故它限制在 $H^2(Y,Z)$ 的自由部分是单射，由此可知，$u+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)-2v\in\mathrm{Tor}\,H^2(Y,Z)$．令 $c=u-2v$，则 $c\in H^2(Y,Z)$，$c=u=w_2(Y)\mathrm{mod}\ 2$．注意到 $c+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)$ 是挠元，故 $\left(c+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)\circ[\Sigma]_Y=0$，并且 $\left(c+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)\circ\left(c+\frac{1}{2}([\Sigma]_Y+t)\right)=0$．由此两式知 $c\circ c=[\Sigma]_Y\circ[\Sigma]_Y/4=[\Sigma]_X\,\tilde{\circ}\,[\Sigma]_X/2$，这里"$\circ$"表示 Y 中上同调的上积而"$\tilde{\circ}$"表示 X 中的上积．由(2.2)式，立刻有

$$c\circ c=-\chi(\Sigma)/2,$$

即(3.4)式成立．从而定理 2 在 Σ 非空时得证．当 Σ 是空集时，证明完全类似，只需将涉及 Σ 的地方换成零即可．

例 4　考虑 CP^3 中的超曲面 $S_{2d}=\{(z_0,z_1,z_2,z_3)\in CP^3\mid z_0^{2d}+z_1^{2d}+z_2^{2d}+z_3^{2d}=0\}$．定义 $\sigma:CP^3\to CP^3$ 为 $\sigma(z)=\bar{z}$，则 σ 限制在 S_{2d} 上是到自身的反全纯对合，它没有不动点．$c_1(S_{2d})=(4-2d)h|_{S_{2d}}$，其中 $h\in H^2(CP^3,Z)$ 对偶于超平面 $CP^2\subset CP^3$（见文献[9]）．由定理 2，知当 $d=2$ 时 S_{2d}/σ 上有近复结构．此时 S_4 是一个 K_3 曲面．由 S_4 单连通知，$\pi_1(S_4/\sigma)=Z_2$．由(2.1)和(3.3)式易知 $b_2(S_4/\sigma)=10$，符号差 $\sigma(S_4/\sigma)=-8$．由 $p^*c_1(S_4/\sigma)=$

$p^{*}w_2(S_4/\sigma) \bmod 2 = w_2(S_4) = 0$，故 $p^{*}c_1(S_4/\sigma)$ 是 $H^2(S_4, Z)$ 中的偶元，由引理 2 及 p^{*} 在 $H^2(S_4/\sigma, Z)$ 的自由部分是单射，知 $c_1(S_4/\sigma)$ 与 $H^2(S_4/\sigma, Z)$ 中的某个偶类至多相差一个挠元，故 S_4/σ 的相交形式是偶的，因此 S_4/σ 的相交形式是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-E_8)$.

致谢 作者与李邦河研究员、唐梓洲教授进行了很多有益的讨论，特此致谢.

参 考 文 献

1 Donaldson S. Irrationality and the h-cobordism conjecture. J Diff Geom, 1987, 26: 141～168
2 Wang Shuguang. Smooth structures on complex surfaces with fundamental group Z_2. Proc Amer Math Soc, 1997, 125(1): 287～292
3 Conner P E, Floyd E E. Differentiable Periodic Maps. Berlin: Springer-Verlag, 1964
4 Wang Shuguang. A vanishing theorem for Seiberg-Witten invariants. Math Research Letters, 1995, 2: 305～310
5 Wu W T. Sur les espaces fibres. Publication de L' institute de mathematique de L' universite de Strasbourg, 1 183. Strasbourg: Actual Scient Ind, 1952
6 Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operator: III. Ann of Math, 1968, 87: 546～604
7 Massey W S. Proof of conjecture of Whitney. Pacific J of Math, 1969, 31: 143～156
8 Brand N. Necessary conditions for the existence of branched coverings. Inv Math, 1979, 54: 1～10
9 Donaldson S. The Geometry of Four Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990