两类对称函数的 Schur 凸性

孙明保

湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006

E-mail: sun_mingbao@163.com

收稿日期: 2013-10-09; 接受日期: 2014-01-15

国家自然科学基金 (批准号: 10871061 和 11271118)、湖南省自然科学基金 (批准号: 12JJ3002)、湖南省教育厅资助科研 (批准号: 11A043) 和湖南省重点学科建设 (批准号: 201176) 资助项目

摘要 本文用一种新方法研究两类对称函数的 Schur 凸性. 首先, 对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 讨论 Guan (2007) 定义的对称函数

$$F_n(x, r) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}}$$

的 Schur 凸性, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数; 推广褚玉明等人 (2009) 的主要结果, 因而用新方法推广并解决 Guan (2007) 提出的一个公开问题. 然后, 对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 研究本文定义的对称函数

$$G_n(x, r) = G_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

的 Schur 凸性、Schur 乘性凸性和 Schur 调和凸性, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 作为应用, 用 Schur 凸函数自变量的双射变换得到其他几类对称函数的 Schur 凸性, 用控制理论建立一些不等式, 特别地, 由此给出 Sharp 不等式和 Ky Fan 不等式一个共同的推广, 导出 Safta 猜想在高维空间的推广.

关键词 对称函数 Schur 凸 Schur 乘性凸 Schur 调和凸 控制理论

MSC (2010) 主题分类 05E05, 26B25, 52A40

1 引言

本文记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{R}_-^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 记

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

英文引用格式: Sun M B. The Schur convexity for two classes of symmetric functions (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 633–656, doi: 10.1360/N012013-00157

$$\alpha + x = (\alpha + x_1, \alpha + x_2, \dots, \alpha + x_n),$$

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right).$$

此外, 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 记

$$\log x = (\log x_1, \log x_2, \dots, \log x_n), \quad x^\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha).$$

最近, 一些对称函数的 Schur 凸性、Schur 乘性凸性和 Schur 调和凸性及其应用被许多作者所研究, 例如, 见参考文献 [1-5].

对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < 1, i = 1, 2, \dots, n\}$, $r \in \mathbb{N}$ 且 $r \leq n$, Guan [6] 定义了如下对称函数:

$$F_n(x, r) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}}, \quad (1.1)$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 为正整数. Guan [6] 讨论了 $F_n(x, r)$ 的 Schur 凸性和 Schur 几何凸性, 用控制理论建立了一些有趣的不等式, 并提出了如下公开问题.

公开问题 A 若 $n \geq 5$ 且 $r \in \{3, \dots, n-2\}$, 则函数 $F_n(x, r)$ 是 Schur 凸或 Schur 凹?

Chu 等人 [7] 对 $F_n(x, r)$ 的 Schur 凸性作了进一步的讨论, 特别地, 解决了 Guan [6] 提出的公开问题 A, 并建立了下面的主要结果.

定理 1.1 若 $n \geq 2$ 且 $r \in \{2, \dots, n\}$, 则函数 $F_n(x, r)$ 在 $[0, \frac{r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{r-1}{2(n-1)}, 1)^n$ 上 Schur 凸.

一个自然的问题是, 对 $x \in (-\infty, 0]^n \cup (1, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 函数 $F_n(x, r)$ 是 Schur 凸或 Schur 凹? 本文用一种新方法研究了函数 $F_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ 上的 Schur 凸性, 推广了定理 1.1, 因而推广且解决了 Guan [6] 提出的公开问题 A.

对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ 和 $r \in \{1, \dots, n\}$, Hamy 对称函数 [8] $H_n(x, r)$ 定义为

$$H_n(x, r) = H_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r x_{i_j} \right)^{\frac{1}{r}},$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 为正整数. 对应的 r 阶 Hamy 平均为

$$\sigma_n(x, r) = \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \frac{1}{C_n^r} H_n(x, r),$$

其中

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

显然, $\sigma_n(x, 1)$ 是 x 的算术平均

$$A_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$\sigma_n(x, n)$ 是 x 的几何平均

$$G_n(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

为方便起见, 我们也用 $H_n(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ 表示 x 的调和平均.

关于 Hamy 对称函数及其平均的研究, Hara 等人^[8] 建立了下面经典的算术 - 几何平均不等式的加细:

$$G_n(x) = \sigma_n(x, n) \leq \sigma_n(x, n-1) \leq \cdots \leq \sigma_n(x, 2) \leq \sigma_n(x, 1) = A_n(x).$$

Ku 等人^[9] 给出了一些有趣的不等式, 其中包括 $(\sigma_n(x, r))^{\frac{1}{r}}$ 是对数凹的事实, 更多相关的结果可见文献 [10]. 文献 [11] 讨论了 Hamy 对称函数 $H_n(x, r)$ 的 Schur 凸性及其推广. 对 $r \in \{1, \dots, n\}$, Chu 和 Lv^[12] 证明了 $H_n(x, r)$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上 Schur 调和凸.

受文献 [5-7, 13] 的启发, 对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 我们定义下面的对称函数:

$$G_n(x, r) = G_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (1.2)$$

其中 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数.

本文的另一个主要目的是用类似于对称函数 $F_n(x, r)$ 的 Schur 凸性的讨论方法研究对称函数 $G_n(x, r)$ 的 Schur 凸性、Schur 乘性凸性和 Schur 调和凸性. 作为应用, 用 Schur 凸函数自变量的双射变换导出其他几类对称函数的 Schur 凸性, 其中包含文献 [13-15] 的主要结果; 用控制理论建立一些不等式. 特别地, 由此给出 Sharpiro 不等式和 Ky Fan 不等式一个共同的推广, 导出 Safta 猜想^[16, 17] 在高维空间的推广.

本文除引言外, 分成 3 节. 第 2 节回忆一些定义, 引用和建立一些引理; 第 3 节用第 2 节的结果证明本文的一些主要结果; 最后, 第 4 节用控制理论给出一些应用.

2 定义与引理

为方便起见, 我们回忆一些定义.

定义 2.1 设 f 是定义在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的实函数, 若对 Ω 中任意满足控制关系 $x \prec y$ 的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 恒有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

则称 f 是 Ω 上的 Schur 凸函数. 其中控制关系 $x \prec y$ 是指

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]},$$

$x_{[i]}$ 表示 x 中第 i 个最大分量. 若 $-f$ 是 Ω 上的 Schur 凸函数, 则称 f 是 Ω 上的 Schur 凹函数.

上述 Schur 凸函数的概念由 Schur^[18] 于 1923 年引入. 它在分析不等式^[19-23]、多面体等周问题^[24]、线性回归^[25]、组合优化^[26]、图和矩阵^[27]、gamma 和 digamma 函数^[28]、可靠性和有效性^[29]、信息安全^[30]、随机排序^[31] 和其他相关领域均有重要应用. 定义 2.1 可见于许多文献, 如文献 [32-35]. 跟随 Schur, 文献 [36, 37] 引入了下面的 Schur 乘性凸函数定义.

定义 2.2 设 f 是定义在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$ 上的实函数, 若对 Ω 中任意满足控制关系 $\log x \prec \log y$ 的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 恒有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

则称 f 是 Ω 上的 Schur 乘性凸函数. 若 $\frac{1}{f}$ 是 Ω 上的 Schur 乘性凸函数, 则称 f 是 Ω 上的 Schur 乘性凹函数.

最近, Chu 和 Lv^[12] 引入了 Schur 调和凸函数概念.

定义 2.3 设 f 是定义在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$ 上的实函数, 若对 Ω 中任意满足控制关系 $\frac{1}{x} \prec \frac{1}{y}$ 的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 恒有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (2.1)$$

则称 f 是 Ω 上的 Schur 调和凸函数. 若不等式 (2.1) 反向, 则称 f 是 Ω 上的 Schur 调和凹函数.

为了建立本文的主要结果, 需引用和证明如下若干引理.

引理 2.4 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是对称凸集并具有非空的内部 $\text{int } \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Schur 凸 (或凹) 函数. 若对 $y \in \Omega'$, $a, b \in \mathbb{R}$, 由 $x = ay + b$ ($a \neq 0$) 定义的变换 $T: \Omega' \rightarrow \Omega$ 是双射, 记 $\varphi(y) = f(ay + b) = f(x)$, 则 $\varphi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Schur 凸 (或凹) 函数, 其中 Ω' 是对称集意指对任意 $n \times n$ 置换矩阵 P 和 $x \in \Omega$ 恒有 $Px \in \Omega$.

证明 我们只给出 φ 在 Ω' 上 Schur 凸情形的证明, 因为 φ 在 Ω' 上 Schur 凹情形的证明是类似的.

由条件, 易导出 Ω' 是对称凸集并具有非空的内部. 对任意 $y', y'' \in \Omega'$, $y' \prec y''$, 因 T 是双射, 从而存在唯一的点 $x', x'' \in \Omega$ 使得 $x' = ay' + b$, $x'' = ay'' + b$ 且 $x' = ay' + b \prec ay'' + b = x''$. 注意到 f 在 Ω 上是 Schur 凸, 所以有 $f(x') \leq f(x'')$. 进一步我们得

$$\varphi(y') = f(x') \leq f(x'') = \varphi(y''),$$

因此, φ 在 Ω' 上 Schur 凸. □

引理 2.5^[32] 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是对称凸集并具有非空的内部 $\text{int } \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的对称函数. 若 f 在 $\text{int } \Omega$ 上可微, 则 f 在 Ω 上 Schur 凸当且仅当不等式

$$(x_i - x_j) \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) \geq 0 \quad (2.2)$$

对所有的 $i, j = 1, 2, \dots, n$ 和 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } \Omega$ 成立. f 在 Ω 上 Schur 凹当且仅当不等式 (2.2) 反向, 其中 f 在 Ω 上是对称函数意指对任意 $n \times n$ 置换矩阵 P 和 $x \in \Omega$ 恒有 $f(Px) = f(x)$.

注 2.6 由于 f 是对称的, 引理 2.5 中的 Schur 条件, 即不等式 (2.2) 可简化为

$$(x_1 - x_2) \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) \geq 0.$$

引理 2.7^[36, 37] 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$ 是对称乘性凸集并具有非空的内部 $\text{int } \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ 是连续的对称函数. 若 f 在 $\text{int } \Omega$ 上可微, 则 f 在 Ω 上 Schur 乘性凸当且仅当不等式

$$(\log x_1 - \log x_2) \left(x_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) \geq 0 \quad (2.3)$$

对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } \Omega$ 成立. f 在 Ω 上 Schur 乘性凹当且仅当不等式 (2.3) 反向, 其中 Ω 是乘性凸集意指对任意 $x, y \in \Omega$ 恒有 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \in \Omega$.

引理 2.8^[12] 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$ 是对称调和凸集并具有非空的内部 $\text{int } \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ 是连续的对称函数. 若 f 在 $\text{int } \Omega$ 上可微, 则 f 在 Ω 上 Schur 调和凸当且仅当不等式

$$(x_1 - x_2) \left(x_1^2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) \geq 0 \quad (2.4)$$

对所有的 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } \Omega$ 成立. f 在 Ω 上 Schur 调和凹当且仅当不等式 (2.4) 反向, 其中 Ω 是调和凸集意指对任意 $x, y \in \Omega$ 恒有 $\frac{2xy}{x+y} \in \Omega$.

引理 2.9 ^[38] 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = s_n$. 若 $c \geq s_n$, 则

$$\frac{c-x}{nc/s_n-1} = \left(\frac{c-x_1}{nc/s_n-1}, \frac{c-x_2}{nc/s_n-1}, \dots, \frac{c-x_n}{nc/s_n-1} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

由引理 2.9 可得下面的引理.

引理 2.10 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = s_n$. 若 $c \leq s_n$, 则

$$\frac{c-x}{nc/s_n-1} = \left(\frac{c-x_1}{nc/s_n-1}, \frac{c-x_2}{nc/s_n-1}, \dots, \frac{c-x_n}{nc/s_n-1} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

引理 2.11 ^[38] 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = s_n$. 若 $c \geq 0$, 则

$$\frac{c+x}{nc/s_n+1} = \left(\frac{c+x_1}{nc/s_n+1}, \frac{c+x_2}{nc/s_n+1}, \dots, \frac{c+x_n}{nc/s_n+1} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

由引理 2.11 可导出下面的引理.

引理 2.12 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = s_n$. 若 $c \leq 0$, 则

$$\frac{c+x}{nc/s_n+1} = \left(\frac{c+x_1}{nc/s_n+1}, \frac{c+x_2}{nc/s_n+1}, \dots, \frac{c+x_n}{nc/s_n+1} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

引理 2.13 ^[39] 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = s_n$. 若 $0 \leq \lambda \leq 1$, 则

$$\frac{s_n - \lambda x}{n - \lambda} = \left(\frac{s_n - \lambda x_1}{n - \lambda}, \frac{s_n - \lambda x_2}{n - \lambda}, \dots, \frac{s_n - \lambda x_n}{n - \lambda} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

通过简单的计算, 容易推出下面的引理 2.14 和 2.15.

引理 2.14 设 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $g(x) = \frac{1}{x(1-x)}$, 则

- (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;
- (2) $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 或 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

引理 2.15 设 $x \in (0, 1)$, $r \geq 1$ 且 $f(x, r) = x^{1-\frac{1}{r}}(1-x)^{1+\frac{1}{r}}$, 则

- (1) 对于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 有 $\frac{\partial f(x, r)}{\partial x} < 0$, 对于 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 有 $\frac{\partial^2 f(x, r)}{\partial x^2} < 0$;
- (2) $g(x, r) = \frac{x}{f(x, r)}$ 关于 x 在 $(0, 1)$ 上单调递增;
- (3) $h(x, r) = \frac{x^2}{f(x, r)}$ 关于 x 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

3 主要结果

本节将证明本文的主要结果.

定理 3.1 对于 $x \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

- (1) 函数 $F_n(x, r)$ 在 $[0, \frac{r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{r-1}{2(n-1)}, 1]^n$ 上 Schur 凸;
- (2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $F_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹 (或凸), 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸 (或凹).

证明 (1) 根据引理 2.5 和注 2.6, 我们只需要讨论

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_2} \right)$$

对所有 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 的非负性和非正性. 下面分 3 种情形给予证明:

情形 1 若 $r = 1$, 则由 (1.1) 有

$$F_n(x, 1) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1-x_i}. \quad (3.1)$$

由 (3.1) 得

$$P_n(x, 1) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial F_n(x, 1)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x, 1)}{\partial x_2} \right) = (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)], \quad (3.2)$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

应用引理 2.14 到 (3.2) 的右边知, 对于 $x \in (0, 1)^n$ 有 $P_n(x, 1) \geq 0$, 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 得 $F_n(x, 1)$ 在 $[0, 1]^n$ 上 Schur 凸.

情形 2 若 $n \geq 2, r = n$, 则由 (1.1) 有

$$F_n(x, n) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1-x_i}. \quad (3.3)$$

由 (3.3) 得

$$P_n(x, n) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial F_n(x, n)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x, n)}{\partial x_2} \right) = (x_1 - x_2)[g(x_1) - g(x_2)]F_n(x, n), \quad (3.4)$$

其中

$$g(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

应用引理 2.14 到 (3.4) 的右边知, 对于 $x \in (0, \frac{1}{2})^n$ 有 $P_n(x, n) \leq 0$, 而对于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)^n$ 有 $P_n(x, n) \geq 0$, 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $F_n(x, n)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{1}{2}, 1]^n$ 上 Schur 凸.

情形 3 若 $n \geq 3, 2 \leq r \leq n-1$, 则根据 r 阶初等对称函数 $E_n(x, r)$ ^[10] 的定义, 对 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$ 有 $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; 0) = 1$, 那么, 由 (1.1) 得

$$\begin{aligned} F_n(x, r) &= \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) \\ &\quad + \frac{x_1}{1-x_1} F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-1) + F_{n-1}(x_2, \dots, x_n; r) \\ &= \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) \\ &\quad + \frac{x_2}{1-x_2} F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-1) + F_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n; r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (3.5) 可得

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_2} \right) = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)^2(1-x_2)^2} [h(x_1) - h(x_2)], \quad (3.6)$$

其中

$$h(x) = (x^2 - x)F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) - (1-x)^2 F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-1).$$

注意到

$$F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) = \frac{1}{n-r} \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \left(\sum_{j=2}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right), \quad (3.7)$$

直接计算得

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x-1)F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) - 2(x-1)F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-1) \\ &= \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \left[\frac{(2x-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} - 2(x-1) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$h''(x) = 2 \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \left(\frac{1}{n-r} \sum_{j=2}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} - 1 \right), \quad (3.9)$$

记 $A = \frac{r-1}{2(n-1)}$, 则由 (3.8) 有

$$H = \frac{2A-1}{n-r}(r-1)\frac{1-A}{A} - 2(A-1) = 0. \quad (3.10)$$

由 (3.9), 对于 $x \in (0, 1)$ 和 $x_i \in (0, \frac{r-1}{n-1})$ ($i = 3, 4, \dots, n$) 有 $h''(x) \geq 0$, 因此, 对于 $x_i \in (0, \frac{r-1}{n-1})$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 函数 $h'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 进一步, 由 (3.8) 和 (3.10) 知, 对 $x, x_i \in (0, A)$ ($i = 3, 4, \dots, n$) 有

$$\begin{aligned} h'(x) &\leq h'(A) = \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \left[\frac{(2A-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} - 2(A-1) \right] \\ &\leq HF_{n-2}(A, A, \dots, A; r-1) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

再由 (3.8) 和 (3.10) 知, 对 $x_i \in (A, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 我们有

$$\begin{aligned} h'(A) &= \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \left[\frac{(2A-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} - 2(A-1) \right] \\ &\geq HF_{n-2}(A, A, \dots, A; r-1) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

而由 (3.8) 得

$$h'(1) = F_{n-2}(x_3, x_4, \dots, x_n; r-2) > 0. \quad (3.13)$$

注意到 $h'(x)$ 关于 x 是线性函数, 由 (3.12) 和 (3.13), 对 $x, x_i \in (A, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 我们导出

$$h'(x) \geq \max\{h'(A), h'(1)\} \geq 0. \quad (3.14)$$

分别由 (3.11) 和 (3.14) 知, 若 $x_i \in (0, A)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 则函数 $h(x)$ 在 $(0, A)$ 上单调递减; 而如果 $x_i \in (A, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 则函数 $h(x)$ 在 $(A, 1)$ 上单调递增. 进一步由 (3.6) 知, 对于 $x \in (0, A)^n$ 有 $P_n(x, r) \leq 0$, 而对于 $x \in (A, 1)^n$ 有 $P_n(x, r) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $F_n(x, r)$ 在 $[0, \frac{r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{r-1}{2(n-1)}, 1]^n$ 上 Schur 凸.

(2) 这里只给出 r 是偶数情形的证明, 因为 r 是奇数情形的证明是类似的. 根据引理 2.5 和注 2.6, 我们仅需要讨论

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x, r)}{\partial x_2} \right)$$

对所有 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (1, +\infty)^n$ 的非负性和非正性. 下面分两种情形给予证明:

情形 1 若 $n \geq 2, r = n$, 则应用引理 2.14 到 (3.4) 的右边知, 对于 $x \in (-\infty, 0)^n$ 有 $P_n(x, n) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)^n$ 有 $P_n(x, n) \geq 0$, 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $F_n(x, n)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

情形 2 若 $n \geq 3, 2 \leq r \leq n-1$, 则由 (3.8) 知, 对于 $x \in (-\infty, 0)$ 有 $h'(x) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)$ 有 $h'(x) \geq 0$, 因此, 函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 进一步由 (3.6) 知, 对于 $x \in (-\infty, 0)^n$ 有 $P_n(x, r) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)^n$ 有 $P_n(x, r) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $F_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

这就完成了定理 3.1 的证明. $\square$

在 (1.1) 中以 $1 - x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$F_n(1 - x, r) = K_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{1 - x_{i_j}}{x_{i_j}}, \quad (3.15)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n \cup \mathbb{R}_+^n, r \in \{1, 2, \dots, n\}, i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.1 即得下面的推论 3.2.

推论 3.2 对于 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (0, +\infty)^n, n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 函数 $K_n(x, r)$ 在 $(0, \frac{2n-r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凸, 在 $[\frac{2n-r-1}{2(n-1)}, 1]^n$ 上 Schur 凹;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $K_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0)^n$ 上 Schur 凸 (或凹), 在 $[1, +\infty)^n$ 上 Schur 凹 (或凸).

在 (1.1) 中以 $-x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$(-1)^r F_n(-x, r) = L_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 + x_{i_j}}, \quad (3.16)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, -1)^n \cup (-1, +\infty)^n, r \in \{1, 2, \dots, n\}, i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.1 即得下面的推论 3.3.

推论 3.3 对于 $x \in (-\infty, -1)^n \cup (-1, +\infty)^n, n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $L_n(x, r)$ 在 $(-1, -\frac{r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凸 (或凹), 在 $[-\frac{r-1}{2(n-1)}, 0)^n$ 上 Schur 凹 (或凸);

(2) 函数 $L_n(x, r)$ 在 $(-\infty, -1)^n$ 上 Schur 凸, 在 $[0, +\infty)^n$ 上 Schur 凹.

在 (1.1) 中以 $1 + x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$(-1)^r F_n(1 + x, r) = M_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{1 + x_{i_j}}{x_{i_j}}, \quad (3.17)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n \cup \mathbb{R}_+^n, r \in \{1, 2, \dots, n\}, i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.1 即得下面的推论 3.4.

推论 3.4 对于 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (0, +\infty)^n, n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $M_n(x, r)$ 在 $[-1, -\frac{2n-r-1}{2(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹 (或凸), 在 $[-\frac{2n-r-1}{2(n-1)}, 0)^n$ 上 Schur 凸 (或凹);

(2) 函数 $M_n(x, r)$ 在 $(-\infty, -1]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[0, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

注 3.5 容易看出定理 3.1 是定理 1.1 (即文献 [7] 中的主要结果) 的推广, 这里给出了它一个新的证明, 因此, 我们用一新方法推广且解决了 Guan^[6] 提出的公开问题, 这是本文的第一个目的. 另外, 推论 3.2 和 3.4 是文献 [14] 的主要结果, 且推论 3.2 是 Xia 和 Chu^[15] 所得的 $K_n(x, r)$ 在 $(0, 1]^n$ 上 Schur 凸性的推广, 而推论 3.3 是 Xia 等人^[13] 所得的 $L_n(x, r)$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上 Schur 凸性的推广. 值得一提的是, 定理 3.1 和推论 3.2–3.4 的证明是新的且有趣的.

本文的另一个主要目的是用类似定理 3.1 和推论 3.2–3.4 的证明方法讨论对称函数 $G_n(x, r)$ 的 Schur 凸性、Schur 乘性凸性和 Schur 调和凸性, 并建立下面的定理 3.6–3.11.

定理 3.6 对于 $x \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

- (1) 函数 $G_n(x, r)$ 在 $[0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1)^n$ 上 Schur 凸;
- (2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $G_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹 (或凸), 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸 (或凹).

证明 (1) 根据引理 2.5 和注 2.6, 我们只需要讨论

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right)$$

对所有 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 的非负性和非正性. 因为 $r = 1$ 的情形已在定理 3.1 的证明中给出, 下面仅分两种情形给予证明:

情形 1 若 $n \geq 2$, $r = n$, 则由 (1.2) 有

$$G_n(x, n) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - x_i} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.18)$$

由 (3.18) 得

$$P_n(x, n) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{n} (x_1 - x_2) [g(x_1) - g(x_2)] G_n(x, n), \quad (3.19)$$

其中

$$g(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

应用引理 2.14 到 (3.19) 的右边知, 对于 $x \in (0, \frac{1}{2})^n$ 有 $P_n(x, n) \leq 0$, 而对于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)^n$ 有 $P_n(x, n) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $G_n(x, n)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{1}{2}, 1]^n$ 上 Schur 凸.

情形 2 若 $n \geq 3$, $2 \leq r \leq n-1$, 注意到 r 阶初等对称函数 $E_n(x, r)$ ^[10] 定义为

$$E_n(x, r) = E_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r x_{i_j},$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是正整数, 且 $E_n(x, 0) = E_n(x_1, x_2, \dots, x_n; 0) = 1$. 设

$$u_i = \left(\frac{x_i}{1 - x_i} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则由 (1.2) 有

$$G_n(x, r) = \left[\frac{x_1 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right]^{\frac{1}{r}} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{x_1}{1-x_1} \right)^{\frac{1}{r}} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1) + G_{n-1}(x_2, \dots, x_n; r) \\
 & = \left[\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]^{\frac{1}{r}} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) \\
 & + \left(\frac{x_2}{1-x_2} \right)^{\frac{1}{r}} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1) + G_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n; r). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

由 (3.20) 可得

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{r} \frac{x_1 - x_2}{f(x_1, r)f(x_2, r)} [p(x_1, r) - p(x_2, r)], \quad (3.21)$$

其中 $f(x, r) = x^{1-\frac{1}{r}}(1-x)^{1+\frac{1}{r}}$, 而

$$p(x, r) = (x^2 - x)E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) - f(x, r)E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1).$$

注意到

$$E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) = \frac{1}{n-r} \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[\sum_{j=2}^r \left(\frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \right], \quad (3.22)$$

直接计算得

$$\frac{\partial f(x, r)}{\partial x} = 2x^{-\frac{1}{r}}(1-x)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{r-1}{2r} - x \right), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(x, r)}{\partial x} & = (2x-1)E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) - \frac{\partial f(x, r)}{\partial x} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1) \\
 & = \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{(2x-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \left(\frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\partial f(x, r)}{\partial x} \right], \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 p(x, r)}{\partial x^2} = 2E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) - \frac{\partial^2 f(x, r)}{\partial x^2} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1). \quad (3.25)$$

记

$$B = \frac{n(r-1)}{2r(n-1)},$$

则 $0 < B < \frac{1}{2}$. 由 (3.23) 得

$$S = (2B-1) \frac{r-1}{n-r} \left(\frac{1-B}{B} \right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\partial f(B, r)}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

应用引理 2.15 到 (3.25) 的右边知, 若 $x_i \in (0, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 则不等式 $\frac{\partial^2 p(x, r)}{\partial x^2} > 0$ 对所有的 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 成立. 因此, $\frac{\partial p(x, r)}{\partial x}$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上关于 x 单调递增. 进一步由 (3.24) 和 (3.26) 知, 对 $x, x_i \in (0, B)$ ($i = 3, 4, \dots, n$) 有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(x, r)}{\partial x} & < \frac{\partial p(B, r)}{\partial x} = \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{(2B-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \left(\frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\partial f(B, r)}{\partial x} \right] \\
 & \leq SG_{n-2}(B, B, \dots, B; r-1) = 0, \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

而对 $x \in (B, \frac{1}{2})$ 和 $x_i \in (B, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, r)}{\partial x} &> \frac{\partial p(B, r)}{\partial x} = \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{(2B-1)}{n-r} \sum_{j=2}^r \left(\frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\partial f(B, r)}{\partial x} \right] \\ &\geq SG_{n-2}(B, B, \dots, B; r-1) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

应用引理 2.15 到 (3.24) 的右边知, 不等式 $\frac{\partial p(x, r)}{\partial x} > 0$ 对所有的 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $x_i \in (B, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$) 成立. 因此, 分别由 (3.27) 和 (3.28) 知, 若 $x_i \in (0, B)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 则 $p(x, r)$ 在 $(0, B)$ 上关于 x 单调递减; 若 $x_i \in (B, 1)$ ($i = 3, 4, \dots, n$), 则 $p(x, r)$ 在 $(B, 1)$ 上关于 x 单调递增. 进一步由 (3.21) 知, 对于 $x \in (0, B)^n$ 有 $P_n(x, r) \leq 0$, 而对于 $x \in (B, 1)^n$ 有 $P_n(x, r) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $G_n(x, r)$ 在 $[0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹, 在 $[\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1]^n$ 上 Schur 凸.

(2) 这里只给出 r 是偶数情形的证明, 因为 r 是奇数情形的证明是类似的. 根据引理 2.5 和注 2.6, 我们仅需要讨论

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right)$$

对所有 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (1, +\infty)^n$ 的非负性和非正性. 下面分 3 种情形给予证明:

情形 1 若 $n \geq 2, r = n$, 则应用引理 2.14 到 (3.19) 的右边知, 对于 $x \in (-\infty, 0)^n$ 有 $P_n(x, n) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)^n$ 有 $P_n(x, n) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $F_n(x, n)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

情形 2 若 $n \geq 3, r = 2$, 则由 (1.2) 有

$$\begin{aligned} G_n(x, 2) &= \left[\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=3}^n \left[\left(\frac{x_1}{1-x_1} \right) \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + G_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n; 2) \\ &= \left[\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=3}^n \left[\left(\frac{x_2}{1-x_2} \right) \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + G_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n; 2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

由 (3.29) 可得

$$P_n(x, 2) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, 2)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, 2)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x_1 - x_2}{\varphi(x_1, 2)\varphi(x_2, 2)} [q(x_1) - q(x_2)], \quad (3.30)$$

其中

$$\varphi(x, r) = \left(\frac{x}{x-1} \right)^{1-\frac{1}{r}} (x-1)^2, \quad q(x) = x^2 - x + \varphi(x, 2) \sum_{i=3}^n \left(-\frac{x_i}{1-x_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

直接计算得

$$\frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial x} = 2 \left(\frac{x}{x-1} \right)^{-\frac{1}{r}} \left(\frac{1-r}{2r} + x \right), \quad (3.31)$$

$$q'(x) = 2x - 1 + \frac{\partial \varphi(x, 2)}{\partial x} \sum_{i=3}^n \left(-\frac{x_i}{1-x_i} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

由 (3.31) 和 (3.32) 易知, 对于 $x \in (-\infty, 0)$ 有 $\frac{\partial \varphi(x, 2)}{\partial x} \leq 0$ 和 $q'(x) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)$ 有 $\frac{\partial \varphi(x, 2)}{\partial x} \geq 0$ 和 $q'(x) \geq 0$, 因此得 $q(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 进一步由 (3.30)

知, 对于 $x \in (-\infty, 0)^n$ 有 $P_n(x, 2) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)^n$ 有 $P_n(x, 2) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $G_n(x, 2)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

情形 3 若 $n \geq 4, 3 \leq r \leq n-1$, 则由 (1.2) 有

$$\begin{aligned} G_n(x, r) &= \left[\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]^{\frac{1}{r}} \sum_{3 \leq i_3 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=3}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad + \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\frac{x_1}{1-x_1} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} + G_{n-1}(x_2, \dots, x_n; r) \\ &= \left[\frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right]^{\frac{1}{r}} \sum_{3 \leq i_3 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=3}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad + \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\frac{x_2}{1-x_2} \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} + G_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n; r). \end{aligned} \quad (3.33)$$

由 (3.33) 可得

$$P_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(\frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{r} \frac{x_1 - x_2}{\varphi(x_1, r) \varphi(x_2, r)} [q(x_1, r) - q(x_2, r)], \quad (3.34)$$

其中

$$\varphi(x, r) = \left(\frac{x}{x-1} \right)^{1-\frac{1}{r}} (x-1)^2,$$

而

$$q(x, r) = (x^2 - x) \sum_{3 \leq i_3 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=3}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} + \varphi(x, r) \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(- \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}},$$

直接计算得

$$\frac{\partial q(x, r)}{\partial x} = (2x-1) \sum_{3 \leq i_3 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=3}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial x} \sum_{3 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(- \prod_{j=2}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (3.35)$$

由 (3.31) 和 (3.35) 知, 对于 $x \in (-\infty, 0)$ 有 $\frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial x} \leq 0$ 和 $\frac{\partial q(x, r)}{\partial x} \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)$ 有 $\frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial x} \geq 0$ 和 $\frac{\partial q(x, r)}{\partial x} \geq 0$, 因此得 $q(x, r)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上关于 x 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上关于 x 单调递增. 进一步由 (3.34) 知, 对于 $x \in (-\infty, 0)^n$ 有 $P_n(x, r) \leq 0$, 而对于 $x \in (1, +\infty)^n$ 有 $P_n(x, r) \geq 0$. 因此, 由引理 2.5 和注 2.6 知, $G_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(1, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

这就完成了定理 3.6 的证明. $\square$

在 (1.2) 中以 $1-x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$G_n(1-x, r) = N_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1-x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.36)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.6 即得下面的定理 3.7.

定理 3.7 对于 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (0, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 函数 $N_n(x, r)$ 在 $(0, \frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}]^n$ 上 Schur 凸, 在 $[\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 1]^n$ 上 Schur 凹;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $N_n(x, r)$ 在 $(-\infty, 0)^n$ 上 Schur 凸 (或凹), 在 $[1, +\infty)^n$ 上 Schur 凹 (或凸).

在 (1.2) 中以 $-x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$(-1)^r G_n(-x, r) = S_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1+x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.37)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, -1)^n \cup (-1, +\infty)^n$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.6 即得下面的定理 3.8.

定理 3.8 对于 $x \in (-\infty, -1)^n \cup (-1, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $S_n(x, r)$ 在 $(-1, -\frac{n(r-1)}{2r(n-1)})^n$ 上 Schur 凸 (或凹), 在 $[-\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 0]^n$ 上 Schur 凹 (或凸);

(2) 函数 $S_n(x, r)$ 在 $(-\infty, -1)^n$ 上 Schur 凸, 在 $[0, +\infty)^n$ 上 Schur 凹.

在 (1.2) 中以 $1+x_{i_j}$ 代替 x_{i_j} , 得

$$(-1)^r G_n(1+x, r) = T_n(x, r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1+x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.38)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n \cup \mathbb{R}_+^n$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1, i_2, \dots, i_n$ 为正整数. 由引理 2.4 和定理 3.6 即得下面的定理 3.9.

定理 3.9 对于 $x \in (-\infty, 0)^n \cup (0, +\infty)^n$, $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则 $T_n(x, r)$ 在 $[-1, -\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}]^n$ 上 Schur 凹 (或凸), 在 $[-\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 0)^n$ 上 Schur 凸 (或凹);

(2) 函数 $T_n(x, r)$ 在 $(-\infty, -1]^n$ 上 Schur 凹, 在 $(0, +\infty)^n$ 上 Schur 凸.

定理 3.10 对于 $n \geq 2$, 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $G_n(x, r)$ 在 $[0, 1]^n$ 上 Schur 乘性凸.

证明 根据引理 2.7, 我们只需要证明

$$Q_n(x, r) = (\log x_1 - \log x_2) \left(x_1 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) \geq 0 \quad (3.39)$$

对所有的 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立. 下面分 3 种情形给予证明:

情形 1 若 $r = 1$, 则由 (3.1) 有

$$\begin{aligned} Q_n(x, 1) &= (\log x_1 - \log x_2) \left(x_1 \frac{\partial G_n(x, 1)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial G_n(x, 1)}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(\log x_1 - \log x_2)(1 - x_1 x_2)}{(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

情形 2 若 $n \geq 2$, $r = n$, 则由 (3.18) 得

$$\begin{aligned} Q_n(x, n) &= (\log x_1 - \log x_2) \left(x_1 \frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(x_1 - x_2)(\log x_1 - \log x_2)}{(1 - x_1)(1 - x_2)} G_n(x, n) \geq 0. \end{aligned}$$

情形 3 若 $n \geq 3, 2 \leq r \leq n-1$, 则由 (3.20) 和引理 2.15 得

$$\begin{aligned} Q_n(x, r) &= (\log x_1 - \log x_2) \left(x_1 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) (\log x_1 - \log x_2)}{(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2} \left[\frac{x_1 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right]^{\frac{1}{r}-1} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) \\ &\quad + \frac{1}{r} (\log x_1 - \log x_2) [g(x_1, r) - g(x_2, r)] E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1) \geq 0. \end{aligned}$$

由上述情形 1-3 即得 (3.39) 对所有的 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立, 因此, $G_n(x, r)$ 在 $[0, 1]^n$ 上 Schur 乘性凸. 定理 3.10 证毕. $\square$

定理 3.11 对于 $n \geq 2$ 且 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, $G_n(x, r)$ 在 $[0, 1]^n$ 上 Schur 调和凸.

证明 根据引理 2.8, 我们只需要证明

$$R_n(x, r) = (x_1 - x_2) \left(x_1^2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) \geq 0 \quad (3.40)$$

对所有的 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立. 下面分 3 种情形给予证明:

情形 1 若 $r = 1$, 则由 (3.1) 有

$$R_n(x, 1) = (x_1 - x_2) \left(x_1^2 \frac{\partial G_n(x, 1)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial G_n(x, 1)}{\partial x_2} \right) = \frac{(x_1 - x_2)^2 [x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)]}{(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2} \geq 0.$$

情形 2 若 $n \geq 2, r = n$, 则由 (3.18) 得

$$R_n(x, n) = (x_1 - x_2) \left(x_1^2 \frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial G_n(x, n)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{n} \frac{(x_1 - x_2)^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} G_n(x, n) \geq 0.$$

情形 3 若 $n \geq 3, 2 \leq r \leq n-1$, 则由 (3.20) 和引理 2.15 得

$$\begin{aligned} R_n(x, r) &= (x_1 - x_2) \left(x_1^2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial G_n(x, r)}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2}{(1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2} \left[\frac{x_1 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \right]^{\frac{1}{r}-1} E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-2) \\ &\quad + \frac{1}{r} (x_1 - x_2) [h(x_1, r) - h(x_2, r)] E_{n-2}(u_3, u_4, \dots, u_n; r-1) \geq 0. \end{aligned}$$

由上述情形 1-3 即得 (3.40) 对所有的 $x \in (0, 1)^n$ 和 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立, 因此, $G_n(x, r)$ 在 $[0, 1]^n$ 上 Schur 调和凸. 定理 3.11 证毕. $\square$

4 应用

本节将利用定理 3.6-3.11 和控制理论建立若干不等式.

定理 4.1 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), s_n = \sum_{i=1}^n x_i, 0 \leq \lambda \leq 1$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 假定 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$. 若 $x \in [0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)}]^n$, 则

$$G_n(x, r) \leq G_n\left(\frac{c_1 - x}{nc_1/s_n - 1}, r\right), \quad (4.1)$$

$$G_n(x, r) \leq G_n\left(\frac{c_2 + x}{nc_2/s_n + 1}, r\right), \quad (4.2)$$

$$G_n(x, r) \leq G_n\left(\frac{s_n - \lambda x}{n - \lambda}, r\right), \quad (4.3)$$

$$G_n(x, r) \leq G_n\left(\frac{s_n + \lambda x}{n + \lambda}, r\right), \quad (4.4)$$

而如果 $x \in [\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1]^n$, 则不等式 (4.1)–(4.4) 反向;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则对 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$ 和 $x \in (-\infty, 0]^n$ 不等式 (4.1)–(4.4) 成立 (或反向), 而对 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$ 和 $x \in (1, +\infty)^n$ 不等式 (4.1)–(4.4) 反向 (或成立).

证明 由定理 3.6 和引理 2.9–2.13 及如下事实即得定理 4.1,

$$\frac{s_n + \lambda x}{n + \lambda} = \left(\frac{s_n + \lambda x_1}{n + \lambda}, \frac{s_n + \lambda x_2}{n + \lambda}, \dots, \frac{s_n + \lambda x_n}{n + \lambda} \right) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n) = x. \quad (4.5)$$

定理 4.1 证毕. $\square$

类似地, 分别由定理 3.7–3.9、引理 2.9–2.13 和 (4.5), 可得下面的定理 4.2–4.4.

定理 4.2 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), s_n = \sum_{i=1}^n x_i, 0 \leq \lambda \leq 1$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 假定 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$, 若 $x \in (0, \frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}]^n$, 则

$$N_n(x, r) \geq N_n\left(\frac{c_1 - x}{nc_1/s_n - 1}, r\right), \quad (4.6)$$

$$N_n(x, r) \geq N_n\left(\frac{c_2 + x}{nc_2/s_n + 1}, r\right), \quad (4.7)$$

$$N_n(x, r) \geq N_n\left(\frac{s_n - \lambda x}{n - \lambda}, r\right), \quad (4.8)$$

$$N_n(x, r) \geq N_n\left(\frac{s_n + \lambda x}{n + \lambda}, r\right), \quad (4.9)$$

而如果 $x \in [\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 1]^n$, 则不等式 (4.6)–(4.9) 反向;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则对 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$ 和 $x \in (-\infty, 0]^n$ 不等式 (4.6)–(4.9) 成立 (或反向), 而对 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$ 和 $x \in [1, +\infty)^n$ 不等式 (4.6)–(4.9) 反向 (或成立).

定理 4.3 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), s_n = \sum_{i=1}^n x_i, 0 \leq \lambda \leq 1$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 假定 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$. 若 r 是偶数 (或奇数), 则不等式

$$S_n(x, r) \geq S_n\left(\frac{c_1 - x}{nc_1/s_n - 1}, r\right), \quad (4.10)$$

$$S_n(x, r) \geq S_n\left(\frac{c_2 + x}{nc_2/s_n + 1}, r\right), \quad (4.11)$$

$$S_n(x, r) \geq S_n\left(\frac{s_n - \lambda x}{n - \lambda}, r\right), \quad (4.12)$$

$$S_n(x, r) \geq S_n\left(\frac{s_n + \lambda x}{n + \lambda}, r\right) \quad (4.13)$$

对 $x \in (-1, -\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}]^n$ 成立 (或反向), 而如果 $x \in [-\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 0]^n$, 则不等式 (4.10)–(4.13) 反向 (或成立);

(2) 若 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$ 和 $x \in (-\infty, -1)^n$, 则不等式 (4.10)–(4.13) 成立, 而如果 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$ 和 $x \in [0, +\infty)^n$, 则不等式 (4.10)–(4.13) 反向.

定理 4.4 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), s_n = \sum_{i=1}^n x_i, 0 \leq \lambda \leq 1$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 假定 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$. 若 r 是偶数 (或奇数), 则不等式

$$T_n(x, r) \leq T_n\left(\frac{c_1 - x}{nc_1/s_n - 1}, r\right), \quad (4.14)$$

$$T_n(x, r) \leq T_n\left(\frac{c_2 + x}{nc_2/s_n + 1}, r\right), \quad (4.15)$$

$$T_n(x, r) \leq T_n\left(\frac{s_n - \lambda x}{n - \lambda}, r\right), \quad (4.16)$$

$$T_n(x, r) \leq T_n\left(\frac{s_n + \lambda x}{n + \lambda}, r\right) \quad (4.17)$$

对 $x \in [-1, -\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}]^n$ 成立 (或反向), 而如果 $x \in [-\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 0]^n$, 则不等式 (4.14)–(4.17) 反向 (或成立);

(2) 若 $c_1 \leq s_n, c_2 \leq 0$ 和 $x \in (-\infty, -1]^n$, 则不等式 (4.14)–(4.17) 成立, 而如果 $c_1 \geq s_n, c_2 \geq 0$ 和 $x \in (0, +\infty)^n$, 则不等式 (4.14)–(4.17) 反向.

定理 4.5 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 若 $x \in [0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)}]^n$, 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[\frac{A_n(x)}{A_n(1-x)} \right], \quad (4.18)$$

而如果 $x \in [\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1]^n$, 则不等式 (4.18) 反向;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则对 $x \in (-\infty, 0]^n$ 不等式 (4.18) 成立 (或反向), 而对 $x \in (1, +\infty)^n$ 不等式 (4.18) 反向 (或成立).

证明 容易验证

$$(A_n(x), A_n(x), \dots, A_n(x)) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.19)$$

由定理 3.6 和 (4.19) 即得定理 4.5. □

注 4.6 在定理 4.1 中取 $\lambda = 0$ 也能导出定理 4.5.

类似地, 分别在定理 4.2–4.4 中取 $\lambda = 0$, 或分别用定理 3.7–3.9 和 (4.19), 则有下面的定理 4.7–4.9.

定理 4.7 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 若 $x \in (0, \frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}]^n$, 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1 - x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[\frac{1 - A_n(x)}{A_n(x)} \right], \quad (4.20)$$

而如果 $x \in [\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 1]^n$, 则不等式 (4.20) 反向;

(2) 若 r 是偶数 (或奇数), 则对 $x \in (-\infty, 0)^n$ 不等式 (4.20) 成立 (或反向), 而对 $x \in [1, +\infty)^n$ 不等式 (4.20) 反向 (或成立).

定理 4.8 设 $n \geq 2, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则下面的不等式 (4.21) 对 $x \in (-1, -\frac{n(r-1)}{2r(n-1)})^n$ 成立 (或反向),

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1+x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[\frac{A_n(x)}{1+A_n(x)} \right], \quad (4.21)$$

而如果 $x \in [-\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 0]^n$, 则 (4.21) 反向 (或成立);

(2) 若 $x \in (-\infty, -1)^n$, 则 (4.21) 成立, 而如果 $x \in [0, +\infty)^n$, 则 (4.21) 反向.

定理 4.9 设 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(1) 若 r 是偶数 (或奇数), 则下面的不等式 (4.22) 对 $x \in [-1, -\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)})^n$ 成立 (或反向),

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1+x_{i_j}}{x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[\frac{1+A_n(x)}{A_n(x)} \right], \quad (4.22)$$

而如果 $x \in [-\frac{r(n-2)+n}{2r(n-1)}, 0]^n$, 则不等式 (4.22) 反向 (或成立);

(2) 若 $x \in (-\infty, -1]^n$, 则 (4.22) 成立, 而如果 $x \in (0, +\infty)^n$, 则 (4.22) 反向.

注 4.10 在定理 4.5(1) 中取 $r = 1$, 则得著名的 Shapiro 不等式^[40]

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1-x_i} \geq \frac{nA_n(x)}{1-A_n(x)} \quad (4.23)$$

对 $x \in [0, 1)^n$ 成立. 这个不等式的证明、改进和推广可见文献 [33, 40] 及其参考文献. 在定理 4.5(1) 中取 $r = n$, 则得著名的 Ky Fan 不等式^[41]

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1-x_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{A_n(x)}{A_n(1-x)} \quad (4.24)$$

对 $x \in (0, \frac{1}{2}]^n$ 成立. 不等式 (4.24) 已引起一些数学家的兴趣, 它的不同的证明、推广、加强和变形可见综述文献 [42] 及其参考文献. 易见定理 4.5 是 Shapiro 不等式 (4.23) 和 Ky Fan 不等式 (4.24) 一个共同的推广. 在定理 4.8(2) 中取 $r = n$, 则得下面的不等式:

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{A_n(x)}{A_n(1+x)} \quad (4.25)$$

对 $x \in (0, +\infty)^n$ 成立, 不等式 (4.25) 可参见文献 [43], Govardarica 和 Jovanović^[44] 给出了它的一个证明, 易知定理 4.8 是 (4.25) 的一个推广; 而在定理 4.8(2) 中取 $r = n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 则得 Weierstrass 不等式^[45, 第 260 页]

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} + 1 \right) \geq (n+1)^n. \quad (4.26)$$

因此, 定理 4.8 也是 (4.26) 的一个推广.

定理 4.11 若 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1)^n$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left[\frac{G_n(x)}{1-G_n(x)} \right]. \quad (4.27)$$

证明 容易验证

$$\log(G_n(x), G_n(x), \dots, G_n(x)) \prec \log(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.28)$$

由定理 3.10 和 (4.28) 即得定理 4.11. $\square$

在定理 4.11 中取 $r = n$, 则有下列的推论.

推论 4.12 若 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, 则

$$G_n(1-x) \leq 1 - G_n(x).$$

定理 4.13 若 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ 以及 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1+x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left[\frac{1}{1+H_n(x)} \right], \quad (4.29)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1-x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left[\frac{H_n(x)}{1-H_n(x)} \right]. \quad (4.30)$$

证明 容易验证

$$\left(\frac{1}{H_n(x)}, \frac{1}{H_n(x)}, \dots, \frac{1}{H_n(x)} \right) \prec \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right). \quad (4.31)$$

分别由定理 3.8(2) 和定理 3.11, 并应用 (4.31), 可得定理 4.13. $\square$

定理 4.14 设 $A \in M_n(C)$ ($n \geq 2$) 是复矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的 n 个特征值. 若 A 是正定的 Hermit 矩阵, I 表示 $n \times n$ 单位矩阵, 则对于 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{\lambda_{i_j}}{1+\lambda_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n+\operatorname{tr} A} \right), \quad (4.32)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1+\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left(\frac{n+\operatorname{tr} A}{\operatorname{tr} A} \right), \quad (4.33)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{\lambda_{i_j}}{\operatorname{tr} A - \lambda_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left(\frac{\sqrt[n]{\det A}}{\operatorname{tr} A - \sqrt[n]{\det A}} \right), \quad (4.34)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \lambda_{i_j} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left[\frac{\sqrt[n]{\det A}}{\sqrt[n]{\det(I+A)} - \sqrt[n]{\det A}} \right], \quad (4.35)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{\lambda_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{n!}{(n-r)!r!} \left(\frac{n}{\operatorname{tr} A} \right). \quad (4.36)$$

证明 容易验证

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}, \frac{\operatorname{tr} A}{n}, \dots, \frac{\operatorname{tr} A}{n} \right) \prec \left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \right), \quad (4.37)$$

$$\log \left(\frac{\sqrt[n]{\det A}}{\operatorname{tr} A}, \frac{\sqrt[n]{\det A}}{\operatorname{tr} A}, \dots, \frac{\sqrt[n]{\det A}}{\operatorname{tr} A} \right) \prec \log \left(\frac{\lambda_1}{\operatorname{tr} A}, \frac{\lambda_2}{\operatorname{tr} A}, \dots, \frac{\lambda_n}{\operatorname{tr} A} \right), \quad (4.38)$$

$$\log \left(\sqrt[n]{\frac{\det A}{\det(I+A)}}, \sqrt[n]{\frac{\det A}{\det(I+A)}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{\det A}{\det(I+A)}} \right) \prec \log \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}, \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}, \dots, \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \right), \quad (4.39)$$

$$\left(\frac{\operatorname{tr}(A+I)}{n}, \frac{\operatorname{tr}(A+I)}{n}, \dots, \frac{\operatorname{tr}(A+I)}{n} \right) \prec (1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \dots, 1+\lambda_n). \quad (4.40)$$

因此, 分别由定理 3.8(2) 和 3.9(2), 并应用 (4.37), 可得 (4.32) 和 (4.33); 由定理 3.10 并应用 (4.38) 和 (4.39) 可得 (4.34) 和 (4.35); 而 (4.36) 则由定理 3.11 和 (4.40) 得到. $\square$

1981 年, Safta^[16, 17] 提出了下面的猜想:

设 AA_1, BB_1 和 CC_1 是 $\triangle ABC$ 的三条任意 Cevian 线, 其中点 A_1, B_1 和 C_1 分别位于边 BC, CA 和 AB 上. 若 $AA_1 \cap B_1C_1 = P, BB_1 \cap A_1C_1 = Q, CC_1 \cap A_1B_1 = R$, 则

$$\frac{AP}{PA_1} + \frac{BQ}{QB_1} + \frac{CR}{RC_1} \geq 3. \quad (4.41)$$

Zhang^[46] 证明了不等式 (4.41), 并得到了这个猜想在高维空间的推广和改进. 本文得到了关于 n 维单形的一些几何不等式, 其中包含这个猜想在高维空间的一个推广.

定理 4.15 设 $\mathcal{A} = A_1A_2 \cdots A_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 维单形, P 是 $\mathcal{A}$ 中的任意内点. 若 B_i 是直线 A_iP 与超平面 $\sum_i = A_1A_2 \cdots A_{i-1}A_{i+1} \cdots A_{n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) 的交点, C_i 是直线 A_iP 与超平面 $\Omega_i = B_1B_2 \cdots B_{i-1}, B_{i+1} \cdots B_{n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) 的交点, 则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_iC_i}{C_iB_i} \geq n^2 - 1, \quad (4.42)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{C_iB_i}{A_iC_i} \geq \frac{n+1}{n-1}. \quad (4.43)$$

证明 设 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$ 是点 P 的重心坐标, 易知点 B_i 的重心坐标是 $B_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{n+1})$. 假设 $\frac{A_iC_i}{C_iB_i} = \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, n+1$), 那么, $\frac{C_iB_i}{A_iC_i} = \frac{1}{\theta_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n, n+1$), 我们得点 C_i 的重心坐标是

$$C_i \left(\frac{\theta_1}{1+\theta_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1-\lambda_i}, \dots, \frac{\theta_{i-1}}{1+\theta_{i-1}} \cdot \frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i}, \frac{1}{1+\theta_i}, \frac{\theta_{i+1}}{1+\theta_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{1-\lambda_i}, \dots, \frac{\theta_{n+1}}{1+\theta_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_i} \right).$$

因为点 C_i 位于超平面 Ω_i 内, 因此有

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_i & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_i & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \frac{1-\lambda_i}{\theta_i} & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.44)$$

应用行列式的性质, 我们导出

$$\theta_i = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{\theta_i} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (4.46)$$

注意到 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, 分别由 (4.45) 和定理 3.7(1) 中 $r = 1$ 的情形与 (4.46) 和定理 3.6(1) 中 $r = 1$ 情形, 并应用如下事实:

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \prec (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}),$$

得不等式 (4.42) 和 (4.43). 定理 4.15 证毕. $\square$

注 4.16 不等式 (4.42) 作为特殊情形包含在文献 [46] 中. 容易看出 Safta 猜想是 (4.42) 中 $n = 2$ 的特殊情形, 因此, (4.42) 是 Safta 猜想在高维空间中的一个推广, 而类似 (4.42) 的不等式 (4.43) 是关于 n 维单形的新不等式. 特别地, 它在 2 维平面三角形的情形类似于不等式 (4.41), 因此, 它是有趣的.

定理 4.17 在定理 4.15 同样的条件下, 若 $r \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, 则

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{A_{i_j} B_{i_j}}{C_{i_j} B_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)! r!} n, \quad (4.47)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \left(\prod_{j=1}^r \frac{C_{i_j} B_{i_j}}{A_{i_j} B_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)! r!} n^{-1}. \quad (4.48)$$

证明 由 (4.45) 和 (4.46) 以及明显的事实

$$A_i B_i = A_i C_i + C_i B_i,$$

我们有

$$\frac{A_i B_i}{C_i B_i} = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{\lambda_i} + 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.49)$$

$$\frac{C_i B_i}{A_i B_i} = n \left(\frac{\lambda_i}{n-1+\lambda_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (4.50)$$

注意到 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, 分别由 (4.49) 和定理 3.9(2) 与 (4.50) 和定理 3.8(2), 并应用如下事实:

$$\left(\frac{1}{n^2-1}, \frac{1}{n^2-1}, \dots, \frac{1}{n^2-1} \right) \prec \left(\frac{\lambda_1}{n-1}, \frac{\lambda_2}{n-1}, \dots, \frac{\lambda_{n+1}}{n-1} \right),$$

得不等式 (4.47) 和 (4.48). 定理 4.17 证毕. $\square$

在定理 4.17 中取 $r = n+1$, 则得下面的推论 4.18.

推论 4.18 在定理 4.15 同样的条件下, 有

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i B_i} \geq n^{n+1}. \quad (4.51)$$

注 4.19 不等式 (4.51) 是文献 [46, 定理 2] 的结果, 因此, (4.47) 是 (4.51) 的推广, 而不等式 (4.48) 是关于 n 维单形的新不等式. 特别地, 它在 2 维平面三角形的情形是有趣的.

定理 4.20 设 $\mathcal{A} = A_1 A_2 \cdots A_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 维单形, P 是 $\mathcal{A}$ 中的任意内点. 若 B_i 是直线 $A_i P$ 与超平面 $\sum_i = A_1 A_2 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_{n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) 的交点, 则对于 $r \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ 有

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left[\frac{n(r-1) P B_{i_j}}{2r(n-1) A_{i_j} B_{i_j} - n(r-1) P B_{i_j}} \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \left[\frac{n(r-1)}{2r(n^2-1) - n(r-1)} \right], \quad (4.52)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left[\frac{2r(n-1)A_{i_j}B_{i_j}}{(nr+n-2r)PB_{i_j}} - 1 \right]^{\frac{1}{r}} \geq \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \left[\frac{2r(n^2-1)}{nr+n-2r} - 1 \right], \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left[\frac{n(r-1)PA_{i_j}}{2r(n-1)A_{i_j}B_{i_j} - n(r-1)PA_{i_j}} \right]^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \left[\frac{n^2(r-1)}{2r(n^2-1) - n^2(r-1)} \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left[\frac{2r(n-1)A_{i_j}B_{i_j}}{(nr+n-2r)PA_{i_j}} - 1 \right]^{\frac{1}{r}} \geq \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \left[\frac{2r(n^2-1)}{n(nr+n-2r)} - 1 \right], \quad (4.55)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{PB_{i_j}}{A_{i_j}B_{i_j} + PB_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} \left(\frac{1}{n+2} \right), \quad (4.56)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{A_{i_j}B_{i_j}}{PB_{i_j}} + 1 \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} (n+2), \quad (4.57)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{PA_{i_j}}{A_{i_j}B_{i_j} + PA_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} \left(\frac{n}{2n+1} \right), \quad (4.58)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{j=1}^r \left(\frac{A_{i_j}B_{i_j}}{PA_{i_j}} + 1 \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} \left(\frac{2n+1}{n} \right). \quad (4.59)$$

证明 容易验证

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{PB_i}{A_iB_i} = 1, \quad \frac{PA_i}{A_iB_i} = 1 - \frac{PB_i}{A_iB_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n(r-1)}{2r(n^2-1)}, \frac{n(r-1)}{2r(n^2-1)}, \dots, \frac{n(r-1)}{2r(n^2-1)} \right) \\ & \prec \left(\frac{n(r-1)PB_1}{2r(n-1)A_1B_1}, \frac{n(r-1)PB_2}{2r(n-1)A_2B_2}, \dots, \frac{n(r-1)PB_{n+1}}{2r(n-1)A_{n+1}B_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\frac{n(r-1)PB_i}{2r(n-1)A_iB_i} \in \left(0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n(2nr-r-1)}{2r(n^2-1)}, \frac{n(2nr-r-1)}{2r(n^2-1)}, \dots, \frac{n(2nr-r-1)}{2r(n^2-1)} \right) \\ & \prec \left(1 - \frac{(nr+n-2r)PB_1}{2r(n-1)A_1B_1}, 1 - \frac{(nr+n-2r)PB_2}{2r(n-1)A_2B_2}, \dots, 1 - \frac{(nr+n-2r)PB_{n+1}}{2r(n-1)A_{n+1}B_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$1 - \frac{(nr+n-2r)PB_i}{2r(n-1)A_iB_i} \in \left(\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n^2(r-1)}{2r(n^2-1)}, \frac{n^2(r-1)}{2r(n^2-1)}, \dots, \frac{n^2(r-1)}{2r(n^2-1)} \right) \\ & \prec \left(\frac{n(r-1)PA_1}{2r(n-1)A_1B_1}, \frac{n(r-1)PA_2}{2r(n-1)A_2B_2}, \dots, \frac{n(r-1)PA_{n+1}}{2r(n-1)A_{n+1}B_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\frac{n(r-1)PA_i}{2r(n-1)A_iB_i} \in \left(0, \frac{n(r-1)}{2r(n-1)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.65)$$

$$\left(\frac{r(n^2-2)-n(n-2r)}{2r(n^2-1)}, \frac{r(n^2-2)-n(n-2r)}{2r(n^2-1)}, \dots, \frac{r(n^2-2)-n(n-2r)}{2r(n^2-1)}\right) \\ \prec \left(1 - \frac{(nr+n-2r)PA_1}{2r(n-1)A_1B_1}, 1 - \frac{(nr+n-2r)PA_2}{2r(n-1)A_2B_2}, \dots, 1 - \frac{(nr+n-2r)PA_{n+1}}{2r(n-1)A_{n+1}B_{n+1}}\right), \quad (4.66)$$

$$1 - \frac{(nr+n-2r)PA_i}{2r(n-1)A_iB_i} \in \left(\frac{n(r-1)}{2r(n-1)}, 1\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4.67)$$

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) \prec \left(\frac{PB_1}{A_1B_1}, \frac{PB_2}{A_2B_2}, \dots, \frac{PB_{n+1}}{A_{n+1}B_{n+1}}\right), \quad (4.68)$$

$$\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}\right) \prec \left(\frac{PA_1}{A_1B_1}, \frac{PA_2}{A_2B_2}, \dots, \frac{PA_{n+1}}{A_{n+1}B_{n+1}}\right). \quad (4.69)$$

因此, 分别由 (4.60)–(4.61)、(4.62)–(4.63)、(4.64)–(4.65) 和 (4.66)–(4.67), 并应用定理 3.6(1), 可得 (4.52)–(4.55); 而分别由 (4.68) 和 (4.69), 并应用定理 3.8(2) 和 3.9(2), 可得 (4.56)–(4.59).

注 4.21 Mitrinović 等人 [16, 第 473–479 页] 建立了关于 $\frac{PA_i}{A_iB_i}$ 和 $\frac{PB_i}{A_iB_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) 的一系列不等式. 显然, 定理 4.20 中的不等式是不同于它们的不等式.

致谢 衷心感谢审稿人对本文所提出的有益修改建议.

参考文献

- 1 Chu Y M, Wang G D, Zhang X H. The Schur multiplicative and harmonic convexities of the complete symmetric function. *Math Nachr*, 2011, 284: 653–663
- 2 Chu Y M, Xia W F, Zhang X H. The Schur concavity, Schur multiplicative and harmonic convexities of the second dual form of the Hamy symmetric function with applications. *J Multivariate Anal*, 2012, 105: 412–421
- 3 Guan K Z, Guan R. Some properties of a generalized Hamy symmetric function and its applications. *J Math Anal Appl*, 2011, 376: 494–505
- 4 Jiang W D. Some properties of dual form of the Hamy's symmetric function. *J Math Inequal*, 2007, 1: 117–125
- 5 Xia W F, Chu Y M. On Schur convexity of some symmetric functions. *J Inequal Appl*, 2010, 2010: 543250
- 6 Guan K Z. Some properties of a class of symmetric functions. *J Math Anal Appl*, 2007, 336: 70–80
- 7 褚玉明, 夏卫锋, 赵铁洪. 一类对称函数的 Schur 凸性. *中国科学 A 辑*, 2009, 39: 1267–1277
- 8 Hara T, Uchiyama M, Takahasi S E. A refinement of various mean inequalities. *J Inequal Appl*, 1998, 2: 387–395
- 9 Ku H T, Ku M C, Zhang X M. Inequalities for symmetric means, symmetric harmonic means, and their applications. *Bull Austral Math Soc*, 1997, 56: 409–420
- 10 Bullen P S. *Handbook of Means and their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 2003
- 11 Guan K Z. The Hamy symmetric function and its generalization. *Math Inequal Appl*, 2006, 9: 797–805
- 12 Chu Y M, Lv Y P. The Schur harmonic convexity of the Hamy symmetric function and its applications. *J Inequal Appl*, 2009, 2009: 838529
- 13 Xia W F, Wang G D, Chu Y M. Schur convexity and inequalities for a class of symmetric functions. *Int J Pure Appl Math*, 2010, 58: 435–452
- 14 Sun M B, Chen N B, Li S H, et al. Schur-convexity for two class of symmetric functions and its applications. *Chin Ann Math Ser B*, in press, 2013
- 15 Xia W F, Chu Y M. Schur convexity and Schur multiplicative convexity for a class of symmetric functions with applications. *Ukrainian Math J*, 2009, 61: 1541–1555
- 16 Mitrinović D S, Pečarić J E, Volenec V. *Recent Advances in Geometric Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1989
- 17 Safta I. Problem C: 14. *Gaz Mat*, 1981, 86: 224
- 18 Schur I. Über eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen auf der determinantentheorie. *Sitzungsber der Berl Math Ges*, 1923, 22: 9–20

- 19 Chan N N. Schur-convexity for A-optimal designs. *J Math Anal Appl*, 1987, 122: 1–6
- 20 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Some simple inequalities satisfied by convex functions. *Messenger Math*, 1929, 58: 145–152
- 21 Qi F, Sándor J, Dragomir S S, et al. Notes on the Schur-convexity of the extended mean values. *Taiwanese J Math*, 2005, 9: 411–420
- 22 Shi H N. Schur-convex functions related to Hadamard-type inequalities. *J Math Inequal*, 2007, 1: 127–136
- 23 Stepniak C. An effective characterization of Schur-convex functions with applications. *J Convex Anal*, 2007, 14: 103–108
- 24 Zhang X M. Schur-convex functions and isoperimetric inequalities. *Proc Amer Math Soc*, 1998, 126: 461–470
- 25 Stepniak C. Stochastic ordering and Schur-convex functions in comparison of linear experiments. *Metrika*, 1989, 36: 291–298
- 26 Hwang F K, Rothblum U G. Partition-optimization with Schur convex sum objective functions. *SIAM J Discrete Math*, 2004, 18: 512–524
- 27 Constantine G M. Schur convex functions on the spectra of graphs. *Discrete Math*, 1983, 45: 181–188
- 28 Merkle M. Convexity, Schur-convexity and bounds for the gamma function involving the digamma function. *Rocky Mountain J Math*, 1998, 28: 1053–1066
- 29 Hwang F K, Rothblum U G, Shepp L. Monotone optimal multipartitions using Schur convexity with respect to partial orders. *SIAM J Discrete Math*, 1993, 6: 533–547
- 30 Forcina A, Giovagnoli A. Homogeneity indices and Schur-convex functions. *Statistica (Bologna)*, 1982, 42: 529–542
- 31 Shaked M, Shanthikumar J G, Tong Y L. Parametric Schur convexity and arrangement monotonicity properties of partial sums. *J Multivariate Anal*, 1995, 53: 293–310
- 32 Marshall A W, Olkin I. *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. New York: Academic Press, 1979
- 33 Mitrinović D S. *Analytic Inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1970
- 34 Pečarić J E, Proschan F, Tong Y L. *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. New York: Academic Press, 1992
- 35 王伯英. 控制不等式基础. 北京: 北京师范大学出版社, 1990
- 36 Guan K Z. A class of symmetric functions for multiplicatively convex function. *Math Inequal Appl*, 2007, 10: 745–753
- 37 Chu Y M, Zhang X M, Wang G D. The Schur geometrical convexity of the extended mean values. *J Convex Anal*, 2008, 15: 707–718
- 38 Guan K Z. Schur-convexity of the complete symmetric function. *Math Inequal Appl*, 2006, 9: 567–576
- 39 Wu S H. Generalization and sharpness of the power means inequality and their applications. *J Math Anal Appl*, 2005, 312: 637–652
- 40 匡继昌. 常用不等式, 第 3 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2004
- 41 Beckenbach E F, Bellman R. *Inequalities*. Berlin: Springer-Verlag, 1961
- 42 Alzer H. The inequality of Ky Fan and related results. *Acta Appl Math*, 1995, 38: 305–354
- 43 El-Newehi E, Proschan F. Unified treatment of some inequalities among ratios of means. *Proc Amer Math Soc*, 1981, 81: 388–390
- 44 Govedarica V, Jovanović M. On the inequalities of Ky Fan, Wang-Wng and Alzer. *J Math Anal Appl*, 2002, 270: 709–712
- 45 Bullen P S. *A Dictionary of Inequalities*. Harlow: Longman, 1998
- 46 Zhang H F. Generalization and sharpening of Safta's conjecture in the n-dimensional space. *J Geom*, 2000, 68: 214–217

The Schur convexity for two classes of symmetric functions

SUN MingBao

Abstract The main aim of this paper is to investigate the Schur convexity for two classes of symmetric functions by using a new method. Firstly, for $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ and $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, we

discuss the Schur convexity of the symmetric functions $F_n(x, r)$, which is defined by Guan (2007) as

$$F_n(x, r) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}},$$

where $i_1, i_2, \dots, i_n$ are positive integers, generalize the main results of Chu et al. (2009), thus by using a new method, generalize and solve an open problem proposed by Guan (2007). Then, for $x = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, 1)^n \cup (1, +\infty)^n$ and $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, we investigate the Schur convexity, Schur multiplicative convexity and Schur harmonic convexity of the symmetric function $G_n(x, r)$, which is defined by

$$G_n(x, r) = G_n(x_1, x_2, \dots, x_n; r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left(\prod_{j=1}^r \frac{x_{i_j}}{1 - x_{i_j}} \right)^{\frac{1}{r}},$$

where $i_1, i_2, \dots, i_n$ are positive integers. As applications, by a bijective transformation of independent variable for a Schur convex function, we obtain the Schur convexity for some other symmetric functions, and establish some inequalities by use of the theory of majorization, in particular, we give from our results a common generalization of the Sharpiro's inequality and the Ky Fan's inequality, and derive a generalization of Safta's conjecture in the n -dimensional space and others.

Keywords symmetric functions, Schur convex, Schur multiplicative convex, Schur harmonic convex, theory of majorization

MSC(2010) 05E05, 26B25, 52A40

doi: 10.1360/N012013-00157