



论文

边界元法计算声辐射时几乎奇异积分的处理方法

孙锐, 胡宗军*, 牛忠荣, 周焕林

合肥工业大学土木与水利工程学院, 合肥 230009

* 联系人, E-mail: huzongjun@hfut.edu.cn

收稿日期: 2016-11-29; 接受日期: 2017-01-18; 网络出版日期: 2017-05-03

国家自然科学基金资助项目(编号: 11672098)

摘要 针对边界元法中几乎奇异积分计算难题, 本文提出一种基于6节点三角形等参数单元的三维高阶单元半解析算法. 通过对三维声场基本解中的三角函数进行Taylor级数展开, 分离出基本解中的奇异积分项. 根据单元的几何特性, 构造出与奇异积分核函数具有相同奇异性的近似奇异核函数, 对奇异积分项应用扣除法, 将奇异积分核函数分为规则核函数和近似奇异核函数两项. 规则核函数积分无奇异性, 应用常规Gauss数值积分就能够准确计算; 近似奇异核函数积分由导出的半解析公式计算, 即在局部极坐标系 $\rho\theta$ 下分离积分变量, 导出对变量 ρ 积分的解析计算列式, 应用常规Gauss数值积分计算变量 θ 积分, 从而建立一种三维声场边界元法几乎奇异积分的半解析算法. 算例结果表明, 本文高阶单元半解析算法比双线性元算法更加有效且算法稳定, 能够有效、准确地计算距离单元非常近的近边界点处的声压.

关键词 边界元法, 声辐射, 几乎奇异积分, 半解析算法, 6节点三角形单元

PACS: 43.55.Ka, 02.70.pt, 02.60.Cb

1 引言

边界元法在计算结构振动辐射声场时具有降维、单元划分少、计算速度快等优点. 边界元法在分析无限域、半无限域、应力集中等问题上优势明显^[1], 它被广泛应用于声场问题的研究^[2-6]. 当源点不在积分单元但趋近于积分单元时, 边界积分核函数将出现几乎奇异性, 此时常规Gauss数值积分不能准确计算几乎奇异积分. 如何准确高效地计算几乎奇异积分是边界元法发展的重要问题.

对于二维边界元法的几乎奇异积分问题, 许多学

者已经做出了大量的研究^[7-10]. 相比较二维问题, 处理三维问题中的几乎奇异积分难度要大的多. 目前, 对于三维边界元法几乎奇异积分问题, 已发展了许多数值处理技术与方法, 如双曲函数变换法^[11]、距离变换法^[12,13]、径向积分法^[14,15]、指数变换法^[16,17], 以及解析与半解析法^[18,19]等.

文献^[20]将单元子分自适应积分方法引入到近场声学边界元法中, 解决了传统声学边界元法计算近场声辐射问题时遇到的困难. 文献^[21]提出了一种新的变量转换方法, 计算了声场边界元法中的几乎奇异积分. 文献^[18]提出了一种线性元正则化算法, 将几

引用格式: 孙锐, 胡宗军, 牛忠荣, 等. 边界元法计算声辐射时几乎奇异积分的处理方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 094301
Sun R, Hu Z J, Niu Z R, et al. A method of treating the nearly singular integral in calculation of sound radiation with BEM (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 094301, doi: 10.1360/SSPMA2016-00498

乎强奇异、几乎超奇异面积分转化为沿单元围道的一系列线积分, 有效地解决了声场边界元法几乎奇异积分问题. 文献[19]提出了一种双线性单元半解析算法, 基于扣除法的思想, 消除了积分核函数的几乎奇异性.

以上方法多是基于低阶单元. 与低阶单元相比, 高阶单元具有单元划分少、计算效率高、计算结果更精确等优点. 其中基于三角形几何的高阶单元还具有几何适应性好、单元易于剖分等优点. 本文以6节点三角形等参数单元为例, 构造与积分核函数具有相同奇异性的近似核函数, 基于扣除法思想, 消除积分核函数的几乎奇异性, 从而建立一种能有效计算三维声场边界元法几乎奇异积分的半解析算法.

2 三维声场边界元理论

线性稳态声场控制方程为Helmholtz方程

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1a)$$

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad (1b)$$

$$q(\mathbf{x}) = \partial p(\mathbf{x}) / \partial n = -i\mu\omega\bar{v}_n(\mathbf{x}) = \bar{q}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (1c)$$

式中 k 称为波数, p 为 $\mathbf{x}$ 点的声压, Γ_p 为声场已知边界, Γ_q 为法向振速已知边界, Ω 为声场分析域, $\Gamma = \partial\Omega$ 为分析域边界, $v_n(\mathbf{x})$ 为声场域表面法向速度, μ 为声场介质密度. 应用Green第二恒等式可以推导出式(1a)的边界积分方程

$$C(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) = -\int_{\Gamma} \left[i\mu\omega v_n(\mathbf{x}) \Psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + p(\mathbf{x}) \frac{\partial \Psi^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (2)$$

和内点声压的积分方程

$$p(\mathbf{y}) = -\int_{\Gamma} \left[i\mu\omega v_n(\mathbf{x}) \Psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + p(\mathbf{x}) \frac{\partial \Psi^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{y}$ 为源点, $\mathbf{x}$ 为场点, $C(\mathbf{y})$ 为奇异性系数, 当源点 $\mathbf{y} \in \Gamma$ 且为光滑边界点时 $C(\mathbf{y})=1/2$, 当源点 $\mathbf{y} \in \Omega$ 为声场域内点时 $C(\mathbf{y})=1$. $i = \sqrt{-1}$, Ψ^* 和 $\partial \Psi^* / \partial n$ 分别为速度势函数基本解及其对边界法向量的方向导数, 显式如下:

$$\Psi^* = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) e^{-ikr} r_{,n}, \quad (5)$$

其中 $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 为源点 $\mathbf{y}$ 到场点 $\mathbf{x}$ 的距离. $r_j=x_j-y_j$ 为源点 $\mathbf{y}$ 到场点 $\mathbf{x}$ 的坐标差. 利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 和关系式 $r_{,n}=\partial r / \partial n=r_j n_j$, $r_j=r_j/r$, $r_n=r_n/r$ 将式(4)和(5)转化为

$$\Psi^* = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \cos(kr) - i \frac{\sin(kr)}{r} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\cos(kr)}{r^3} - \frac{\sin(kr)}{r^3} i + k \frac{\cos(kr)}{r^2} i + k \frac{\sin(kr)}{r^2} \right) r_n. \quad (7)$$

3 三角形6节点二次等参数单元

本文采用6节点三角形单元描述声场问题中的边界. 6节点二次等参数边界单元 Γ_e , 如图1所示, $x^1, x^2, \dots, x^6$ 为单元 Γ_e 的6个节点, 节点在整体坐标系下的坐标记为 x_j^m ($m=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, 3$). $\mathbf{y}$ 为源点, $\mathbf{x}$ 为场点, 整体坐标系坐标分别记为 y_j 和 x_j ($j=1, 2, 3$, 下文同). 以单元23边的中垂线为 ζ 轴, 以单元12边的中垂线为 η 轴, 两条垂线交点 o 为原点, 在单元 Γ_e 内建立局部斜角坐标系 $o\zeta\eta$.

设源点 $\mathbf{y}$ 到单元 Γ_e 的最短距离为 d , $\mathbf{y}$ 在单元 Γ_e 表面上的垂足点为 $\mathbf{x}^0$, 垂足点 $\mathbf{x}^0$ 在局部坐标系 $o\zeta\eta$ 中的坐标为 (ζ_0, η_0) , 在整体坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的坐标为 $x_j(\zeta_0, \eta_0)$. d 为 $\mathbf{y}$ 到 $\mathbf{x}^0$ 的距离. 采用多变量牛顿迭代法

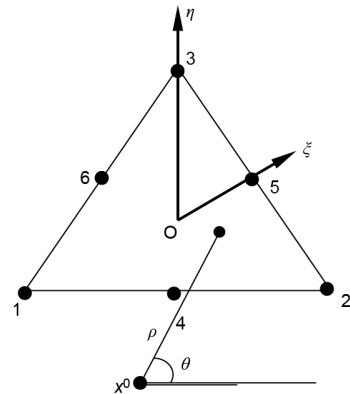


图1 单元 Γ_e 的局部坐标 $\zeta\eta$ 和 $\rho\theta$
Figure 1 Local coordinates $\zeta\eta$ and $\rho\theta$ of element Γ_e .

$$f(\xi, \eta) = r^2(\xi, \eta) = (x_j - y_j)(x_j - y_j). \quad (8)$$

选定初值 $\mathbf{x}^0(\xi_0, \eta_0)$, 迭代格式

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} - [\nabla'' f(\mathbf{x}^{(t)})]^{-1} \nabla' f(\mathbf{x}^{(t)}), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla' f(\mathbf{x}^{(t)}) &= \begin{bmatrix} f'_{,\xi} \\ f'_{,\eta} \end{bmatrix}, \\ \left[\nabla'' f(\mathbf{x}^{(t)}) \right] &= \begin{bmatrix} f''_{,\xi\xi} & f''_{,\xi\eta} \\ f''_{,\eta\xi} & f''_{,\eta\eta} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

计算逆矩阵

$$[\nabla'' f(\mathbf{x}^{(t)})]^{-1} = \frac{1}{f''_{,\xi\xi} f''_{,\eta\eta} - f''_{,\xi\eta} f''_{,\eta\xi}} \begin{bmatrix} f''_{,\eta\eta} & -f''_{,\xi\eta} \\ -f''_{,\eta\xi} & f''_{,\xi\xi} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中 $f'_{,\xi}$, $f'_{,\eta}$ 分别为距离函数对 ξ, η 的一阶导数, $f''_{,\xi\xi}$, $f''_{,\eta\eta}$, $f''_{,\xi\eta}$ 分别为距离函数对 ξ, η 的二阶导数. 依据迭代准则 $\|\mathbf{x}^{(t+1)}(\xi, \eta) - \mathbf{x}^{(t)}(\xi, \eta)\| \leq 1 \times 10^{-14}$, 求出最短距离 d , 确定垂足点 $\mathbf{x}^0$.

以垂足点 $\mathbf{x}^0$ 为极点, 极轴平行于单元12边在单元 Γ_e 内建立局部坐标系 $\rho\theta$, ρ 为垂足点 $\mathbf{x}^0$ 到单元上的点的距离.

单元 Γ_e 从总体坐标系 $ox_1x_2x_3$ 到局部坐标系 $o\xi\eta$ 的坐标变换

$$x_j(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^6 N_m(\xi, \eta) x_j^m, \quad (12)$$

其中 $N_m(\xi, \eta)$ ($m=1, 2, \dots, 6$)为总体坐标系 $ox_1x_2x_3$ 到局部坐标系 $o\xi\eta$ 转换的形函数, 具体表示为

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{2}{3} \left(2\xi + \eta + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \left(2\xi + \eta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\ N_2 &= \frac{2}{3} \left(\eta - \xi - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(\eta - \xi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \\ N_3 &= \frac{8}{3} \left(\eta + \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \left(\eta + \frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{12} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4 &= \frac{4}{3} \left(\eta - \xi - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(\eta + 2\xi - \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\ N_5 &= \frac{8}{3} \left(\eta + \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \left(\xi - \eta + \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\ N_6 &= \frac{8}{3} \left(\eta + \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\xi - \eta \right). \end{aligned} \quad (13)$$

节点在局部坐标系 $o\xi\eta$ 中的局部坐标 (ξ_m, η_m) 如表1所示.

从整体坐标系 $ox_1x_2x_3$ 到局部坐标系 $o\xi\eta$, 有积分关系

$$d\Gamma = J d\xi d\eta. \quad (14)$$

从局部坐标系 $o\xi\eta$ 到坐标系 $o\rho\theta$, 有坐标变换关系和积分关系

$$\rho \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi - \xi_0), \quad (15)$$

$$\rho \sin \theta = \eta - \eta_0 + \frac{1}{2} (\xi - \xi_0), \quad (16)$$

$$d\xi d\eta = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho d\rho d\theta, \quad (17)$$

其中 J 为从整体坐标系 $ox_1x_2x_3$ 到局部坐标系 $o\xi\eta$ 变换的雅可比, $\frac{2}{\sqrt{3}}\rho$ 为从局部坐标系 $o\xi\eta$ 到坐标系 $o\rho\theta$ 变换的雅可比. 单元 Γ_e 的外法向矢量 $\mathbf{n}$ 的各个分量为

$$n_j = J_j / J, \quad (18)$$

式中 J_j 为雅可比分量

$$J_j = \frac{\partial(x_k, x_l)}{\partial(\xi, \eta)} = x_{k,\xi} x_{l,\eta} - x_{k,\eta} x_{l,\xi}, \quad (19)$$

表 1 单元节点 $\mathbf{x}^m(\xi_m, \eta_m)$ 在局部坐标系 $o\xi\eta$ 中的局部坐标
Table 1 Local coordinates of element nodes $\mathbf{x}^m(\xi_m, \eta_m)$ in local coordinate system $o\xi\eta$

节点	ξ_m	η_m
1	-1/2	$-\sqrt{3}/6$
2	1/2	$-\sqrt{3}/6$
3	0	$\sqrt{3}/3$
4	0	$-\sqrt{3}/6$
5	1/4	$-\sqrt{3}/6$
6	-1/4	$-\sqrt{3}/6$

$$J(\xi, \eta) = \sqrt{J J_j}, \quad (20)$$

式中下标 $j, k, l=1, 2, 3, J_j(\xi, \eta), J_k(\xi, \eta)$ 在 $\mathbf{x}^0$ 处取值记为 J_j^0 和 J^0 . 设 $J'_{j,\rho}$ 为 J_j 对局部坐标 ρ 的一阶导数, $J'_{j,\rho}$ 的表达式为

$$J'_{j,\rho} = \frac{(\xi - \xi_0)J'_{j,\xi} + (\eta - \eta_0)J'_{j,\eta}}{\rho}, \quad (21)$$

式中 $J'_{j,\xi}, J'_{j,\eta}$ 分别为雅可比分量 J_j 对局部坐标 ξ, η 的一阶导.

4 三维声场边界元几乎奇异积分半解析算法

4.1 三维声场边界元法中的几乎奇异积分

应用最小距离 d 定义源点 $\mathbf{y}$ 到积分单元 Γ_e 的相对距离(即接近度)为

$$e = 2d/s, \quad (22)$$

式中 $s = \frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|^2 + |\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3|^2 + |\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1|^2}$ 为单元 Γ_e 的特征长度($|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|$ 代表点 $\mathbf{x}^1$ 与点 $\mathbf{x}^2$ 之间的距离, 余者类同), e 表征源点与单元 Γ_e 的接近程度.

应用Taylor公式将声场基本解式(6)和(7)中的三角函数展开并用其前二项(奇异项)进行加减组合, 将基本解化为多项式的形式

$$\Psi^* = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} (\cos(kr) - 1) + \frac{1}{r} - i \frac{\sin(kr)}{r} \right], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\left[\frac{\cos(kr) - 1 + (kr)^2/2}{r^3} + \frac{1 - (kr)^2/2}{r^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - i \left[\frac{\sin(kr) - (kr)}{r^3} + \frac{kr}{r^3} \right] + ikr \left[\frac{\cos(kr) - 1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right] \right. \\ &\quad \left. + kr \left[\frac{\sin(kr) - kr}{r^3} + \frac{kr}{r^3} \right] \right] r_n, \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $r_n = (\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j) \cdot \mathbf{n}_j$.

当源点 $\mathbf{y}$ 接近积分单元 Γ_e 时, 由式(23)和(24)可知, 积分方程式(2)和(3)的积分核函数中 $1/r^\alpha$ 趋向 ∞ 的度量依赖于接近度 e 趋向0的程度. 将式(23)和(24)代入积分方程式(2)和(3)后, 当接近度 e 趋向0时, 几乎奇异积分项可以归纳为如下形式:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_e} \frac{r_n}{r} d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_e} \frac{r_n}{r^3} d\Gamma, \quad (25)$$

此时, 对式(25)各项积分, Gauss数值积分将会失效.

4.2 几乎奇异积分半解析算法

当源点 $\mathbf{y}$ 趋近于积分单元 Γ_e 时, 对式(25)各几乎奇异积分项应用Subtraction法, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} d\Gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{1}{r} J - \frac{1}{\hat{r}} J^0 \right) \rho d\rho d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\hat{r}} J^0 \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{r_n}{r} d\Gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{r_n}{r} J - \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} J^0 \right) \rho d\rho d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} J^0 \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{r_n}{r^3} d\Gamma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{r_n}{r^3} J - \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} J^0 \right) \rho d\rho d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} J^0 \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (26c)$$

式中 $\hat{r}_n$ 是 r_n 的近似表达

$$r_n = (\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j) \cdot \mathbf{n}_j, \quad (27)$$

$$\hat{r}_n = \rho J'_{j,\rho} (\mathbf{x}_j^0 - \mathbf{y}_j) / J + J_j^0 (\mathbf{x}_j^0 - \mathbf{y}_j) / J, \quad (28)$$

其中 $J'_{j,\rho}$ 为 J_j 对局部坐标 ρ 的一阶导数 $J'_{j,\rho}$ 在点 $\mathbf{x}^0$ 处的值, J^0 为 J 在点 $\mathbf{x}^0$ 处的值. $\hat{r}$ 为源点与场点之间的距离函数 r 的近似值, 其中, $\hat{r}$ 的表达式为

$$\hat{r}^2 = d^2 + \frac{s^2}{4} \rho^2 H(\theta), \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} H(\theta) &= \frac{4}{s^2} \left\{ \frac{4}{3} \cos^2 \theta x'_{j,\xi} x'_{j,\xi} x'_{j,\xi} x'_{j,\xi} + \left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)^2 x'_{j,\eta} x'_{j,\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right) \cos \theta x'_{j,\xi} x'_{j,\eta} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{4}{3} (\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)^2 x_j^1 + \frac{4}{3} (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta)^2 x_j^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{3} (2 \sin \theta)^2 x_j^3 + \frac{8}{3} (\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta) (\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) x_j^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{8}{3} (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) (2 \sin \theta) x_j^5 \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{8}{3}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)(2\sin\theta)x_j^0 \left\{ (x_j^0 - y_j) \right\}, \quad (30)$$

式中 $x_{j,\xi}^0, x_{j,\eta}^0$ 分别为场点坐标对局部坐标 ξ, η 的一阶导数在垂足点 $\mathbf{x}^0$ 处的值. 式(26)中等号右端第一项积分为规则积分, 可用常规Gauss数值积分直接计算, 等号右端第二项积分为几乎奇异积分, 采用下文的半解析算法进行计算.

记源点 $\mathbf{y}$ 在单元上的垂足点 $\mathbf{x}^0$ 为 Q , 如图2所示, 将积分单元划分为 $Q12, Q23$ 和 $Q31$ 共3个三角形子域. 将式(26)中三角形单元 Γ_e 上的几乎奇异积分项化为3个三角形积分子域上积分之和, 即

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\iint_{\Delta Q12} + \iint_{\Delta Q23} + \iint_{\Delta Q31} \right) \frac{1}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\iint_{\Delta Q12} + \iint_{\Delta Q23} + \iint_{\Delta Q31} \right) \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} \rho d\rho d\theta J^0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\iint_{\Delta Q12} + \iint_{\Delta Q23} + \iint_{\Delta Q31} \right) \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} \rho d\rho d\theta J^0, \end{aligned} \quad (33)$$

定义

$$K_1(\rho, \theta) = \int_{\hat{r}} \frac{1}{\hat{r}} \rho d\rho, \quad (34a)$$

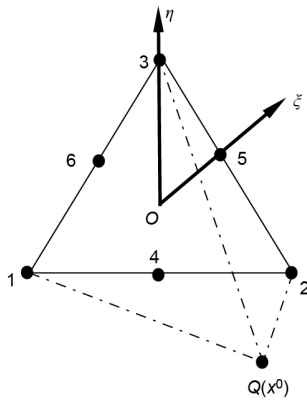


图2 单元划分为3个三角形子域
Figure 2 Element divided into three triangular sub-domains.

$$K_2(\rho, \theta) = \int_{\hat{r}} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} \rho d\rho, \quad (34b)$$

$$K_3(\rho, \theta) = \int_{\hat{r}} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} \rho d\rho, \quad (34c)$$

注意到式(22), 式(28)–(30), 关于 ρ 的积分 $K_1(\rho, \theta), K_2(\rho, \theta), K_3(\rho, \theta)$ 可完全解析, 即

$$K_1(\rho, \theta) = \int_{\hat{r}} \frac{1}{\hat{r}} \rho d\rho = \frac{2}{sH(\theta)} \sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K_2(\rho, \theta) &= \int_{\hat{r}} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} \rho d\rho \\ &= J_{j,\rho}^0 (x_j^0 - y_j) \frac{2}{sH(\theta)} \sqrt{H(\theta)} \\ &\quad \left[\frac{\rho \sqrt{H(\theta)}}{2} \sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{2} \ln \left(\sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2} + \rho \sqrt{H(\theta)} \right) \right] \\ &\quad + J_j^0 (x_j^0 - y_j) \frac{2}{sH(\theta)} \sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} K_3(\rho, \theta) &= \int_{\hat{r}} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} \rho d\rho \\ &= -J_{j,\rho}^0 (x_j^0 - y_j) \frac{8}{s^3 H(\theta) \sqrt{H(\theta)}} \frac{\rho \sqrt{H(\theta)}}{\sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2}} \\ &\quad + J_{j,\rho}^0 (x_j^0 - y_j) \ln \left(\sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2} + \rho \sqrt{H(\theta)} \right) \\ &\quad - J_j^0 (x_j^0 - y_j) \frac{8}{s^3 H(\theta)} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 H(\theta) + e^2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

将解析后的式(35)–(37)代入式(31)–(33), 则式(31)–(33)可化为关于 θ 的线积分, 即

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0 \\ &= J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (K_1(\rho_{12}(\theta), \theta) - K_1(0, \theta)) d\theta \\ &\quad + J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_2}^{\theta_3} (K_1(\rho_{23}(\theta), \theta) - K_1(0, \theta)) d\theta \\ &\quad + J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_3}^{\theta_1} (K_1(\rho_{31}(\theta), \theta) - K_1(0, \theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}} \rho d\rho d\theta J^0 \\ &= J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (K_2(\rho_{12}(\theta), \theta) - K_2(0, \theta)) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_2}^{\theta_3} (K_2(\rho_{23}(\theta), \theta) - K_2(0, \theta)) d\theta \\
 & +J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_3}^{\theta_1} (K_2(\rho_{31}(\theta), \theta) - K_2(0, \theta)) d\theta,
 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\Gamma_e} \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}^3} \rho d\rho d\theta J^0 \\
 & = J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (K_3(\rho_{12}(\theta), \theta) - K_3(0, \theta)) d\theta \\
 & \quad + J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_2}^{\theta_3} (K_3(\rho_{23}(\theta), \theta) - K_3(0, \theta)) d\theta \\
 & \quad + J^0 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta_3}^{\theta_1} (K_3(\rho_{31}(\theta), \theta) - K_3(0, \theta)) d\theta,
 \end{aligned} \quad (40)$$

式中, 各项积分限 $\rho_{12}(\theta)$, $\rho_{23}(\theta)$, $\rho_{31}(\theta)$, θ_1 , θ_2 , θ_3 可分别由三角形子域 Δ_{Q12} , Δ_{Q23} , Δ_{Q31} 几何特性确定. 其中 $\rho_{12}(\theta)$, $\rho_{23}(\theta)$, $\rho_{31}(\theta)$ 表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \rho_{12} &= -\frac{\sqrt{3}/6 + \eta_0 + \xi_0/2}{\sin\theta}, \\
 \rho_{31} &= \frac{\sqrt{3}\xi_0 + 1 - \sqrt{3}\eta_0}{\sqrt{3}\sin\theta - 3\cos\theta}, \\
 \rho_{23} &= \frac{-2\sqrt{3}\xi_0 + 1 - \sqrt{3}\eta_0}{\sqrt{3}\sin\theta + 3\cos\theta}.
 \end{aligned} \quad (41)$$

至此三维声场边界元法中几乎奇异面积分转化为关于 θ 的线积分. 由于对 θ 的线积分为规则积分, 可应用常规Gauss数值积分准确计算.

5 数值算例

本节给出三维声场问题边界元分析的若干经典算例, 展现本文6节点三角形高阶单元几乎奇异积分半解析算法的计算精度和效率. 算例中线性元算法^[18]首先将结构离散为4节点四边形线性单元, 然后将每个发生几乎奇异积分的四边形单元再划分为8个三角形线性子单元, 采用线性单元正则化算法计算几乎奇异积分. 双线性元算法^[19]应用4节点四边形双线性单元离散结构, 采用四边形双线性单元半解析算法计算几乎奇异积分. 本文半解析算法数值积分部分都是采用8点常规Gauss积分计算.

算例1 噪声辐射内问题. 如图3所示, 噪声在边长为1 m的立方体内传播, 计算频率 $f=5.45901$ Hz, 声波介质密度 $\mu=1.21$ kg/m³, 声波速度 $c=343$ m/s, 波数 $k=0.1$. 在 $x_1=1$ m的表面, $p=\mu cv_n$; 在 $x_1=0$ m的表面, 声场法向振

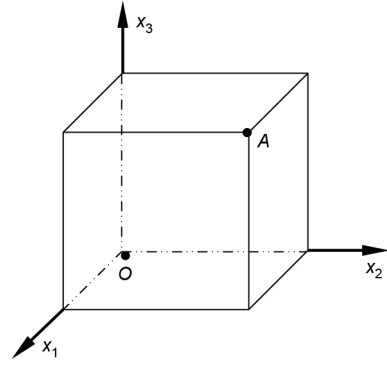


图3 声场立方体
Figure 3 Cubic domain of acoustic field.

速 $v_n=-1$ m/s. 立方体表面均匀划分48个6节点三角形二次等参元, 在角点 $A(1,1,1)$ 附近设置了若干近边界内点, 分别运用四边形双线性元半解析算法, 线性元正则化算法和本文提出的6节点三角形等参元半解析算法计算内点声压. 立方体域内声压解析解为 $p = \mu c e^{-ikx_1}$.

表2为角点 $A(1,1,1)$ 附近内点声压的计算结果. 数据表明线性元正则化算法只能计算接近度不小于 3.3×10^{-7} 处的内点声压, 双线性元算法能计算接近度不小于 3.3×10^{-9} 处的内点声压, 而本文半解析算法能精确计算有效接近度达到 3.3×10^{-13} 处的内点声压. 计算角点附近近边界内点声压时, 本文半解析算法与线性元正则化算法和四边形双线性元算法相比, 可以分别降低有效接近度达6个数量级和4个数量级.

算例2 脉动球源声辐射外问题. 如图4所示, 脉动球源半径 $a=1$ m, 声场介质密度 $\mu=1.21$ kg/m³, 声波速度 $c=343$ m/s, 计算频率 $f=54.5901$ Hz, 波数 $k=1$, 表面法向均匀径向振速为 v_n . 设 r 为场点到脉动球心的距离, 在 $r=1$ m脉动球的振速为 $v_n=1$ m/s. ω 为周期. 根据对称性, 取一半球体进行计算, 在边界点 $B(1,0,0)$ 外侧附近设置若干个近边界点, 分别应用线性正则化算法、四边形双线性元算法和本文半解析算法计算近边界点声压. 域外声压解析解为

$$p = \left(\frac{a^2}{r} \right) \frac{i\mu\omega}{1 + ika} e^{-ik(r-a)}. \quad (42)$$

计算时, 双线性元算法采用四边形双线性单元划分半球体表面, 单元总数为300个; 线性元算法采用三角形单元与四边形单元的混合单元半球体表面, 单元总数为304个; 本文算法以6节点三角形二次等参数单

表2 噪声立方体角点 $A(1,1,1)$ 附近内点声压值 p (Pa)Table 2 The pressure p (Pa) of the inner points closed to the inner point $A(1,1,1)$

坐标 $x_1=x_2=x_3$ (m)	接近度 e	线性元算法 ^[18]		双线性元算法 ^[19]		本文算法		精确解	
		实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部
0.9	3.3×10^{-1}	413.404	-36.146	413.680	-36.186	413.350	-37.302	413.350	-37.302
0.99	3.3×10^{-2}	413.111	-39.866	413.303	-39.932	412.997	-41.024	412.998	-41.021
0.999	3.3×10^{-3}	413.086	-40.235	413.008	-40.338	412.961	-41.384	412.961	-41.393
0.9999	3.3×10^{-4}	413.084	-40.278	412.055	-40.095	412.957	-41.429	412.957	-41.430
0.99999	3.3×10^{-5}	413.084	-40.283	412.829	-40.077	412.957	-41.433	412.957	-41.433
0.999999	3.3×10^{-6}	413.083	-40.284	412.808	-40.077	412.957	-41.433	412.957	-41.433
0.9999999	3.3×10^{-7}	413.083	-40.284	412.808	-40.076	412.957	-41.433	412.957	-41.433
0.99999999	3.3×10^{-8}	-	-	412.808	-40.076	412.957	-41.433	412.957	-41.433
0.999999999	3.3×10^{-9}	-	-	412.808	-40.076	412.957	-41.433	412.957	-41.433
0.9999999999	3.3×10^{-10}	-	-	-	-	412.953	-41.338	412.957	-41.433
0.99999999999	3.3×10^{-11}	-	-	-	-	412.953	-41.338	412.957	-41.433
0.999999999999	3.3×10^{-12}	-	-	-	-	412.953	-41.428	412.957	-41.433
0.9999999999999	3.3×10^{-13}	-	-	-	-	412.553	-41.393	412.957	-41.433
0.99999999999999	3.3×10^{-14}	-	-	-	-	418.143	-41.954	412.957	-41.433
0.999999999999999	3.3×10^{-15}	-	-	-	-	-	-	412.957	-41.433

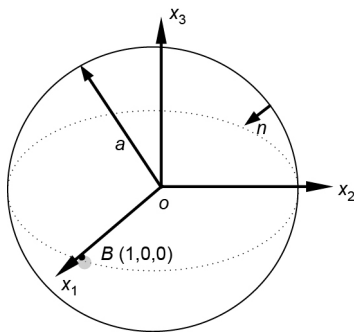


图4 脉动球声场外辐射

Figure 4 The external radiation of pulsating ball.

元划分半球体表面, 单元总数205个.

表3分别对比了各种算法在边界点 $B(1,0,0)$ 附近的声压计算结果. 计算结果表明, 线性元算法的有效接近度约为 5×10^{-6} , 当场点到单元的距离更近的时候结果将失真; 四边形双线性元算法的有效接近度约为 5×10^{-9} , 当场点到单元的距离更近的时候结果将失真; 而本文提出的半解析算法能够准确有效地计算接近度为 5×10^{-14} 处的外点声压, 而且划分的单元数目更少, 计算结果更精确. 本文半解析算法与线性元正则化算

法和四边形双线性元算法相比较可分别降低有效接近度达8个数量级和5个数量级, 足以证明本文算法的优越性.

算例3 振动球源外辐射声场问题. 如图5所示, 球源半径 $a=1$ m, 声场介质密度 $\mu=1.21$ kg/m³, 声波速度 $c=343$ m/s, 计算频率 $f=54.5901$ Hz, 波数 $k=1$, 球源中心以速度 $v_0=1$ m/s沿着中心线 x_3 来回振动. θ 为天顶角. 根据对称性, 取一半球体进行计算, 在边界点 $B(1,0,0)$ 附近设置若干个近边界点.

设 r 为场点到振动球心的距离, 各点声压解析式为

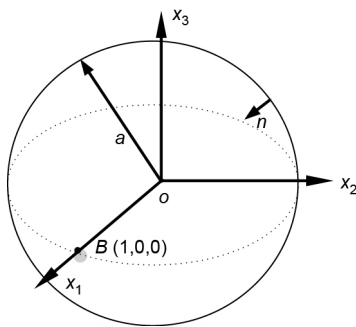
$$p = \mu c v_0 \frac{i k a^3 (1 + i k r)}{r^2 (2 + 2 i k a - (k a)^2)} e^{-i k (r - a)} \cos \theta. \quad (43)$$

计算时, 本文算法以6节点三角形二次等参数单元划分半球体表面, 单元总数205个. 图6中横轴表示接近度, 纵轴表示声压计算值与声压解析解的相对误差绝对值 Δ . 相对误差 Δ 计算公式

$$\Delta = \left| \frac{\text{声压计算值} - \text{声压解析值}}{\text{声压解析值}} \right|.$$

表 3 脉动球源边界点 $B(1,0,0)$ 附近外点声压值 p (Pa)**Table 3** The pressure p (Pa) of the points closed to pulsating sphere boundary $B(1,0,0)$

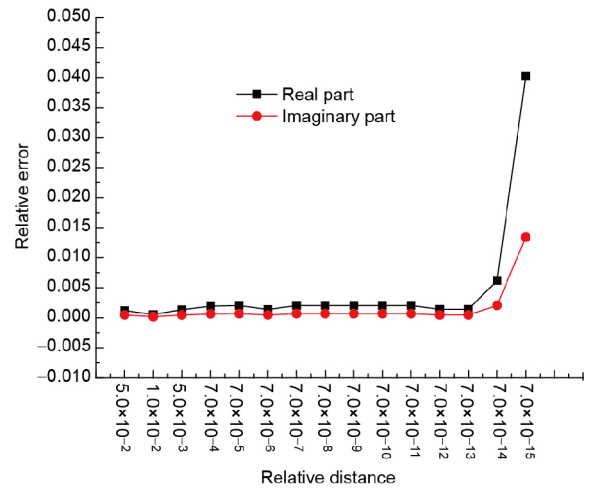
坐标 $x_2=x_3=0, x_1$ (m)	接近度 e	线性元算法 ^[18]		双线性元算法 ^[19]		本文算法		精确解	
		实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部	实部	虚部
1.1	2×10^{-2}	205.989	166.864	206.541	169.802	206.344	168.672	206.541	206.541
1.01	3×10^{-3}	207.079	202.070	207.500	203.257	207.424	203.317	207.505	207.505
1.001	1×10^{-3}	207.100	206.236	207.520	206.571	207.821	207.407	207.515	207.515
1.0001	5×10^{-4}	207.101	206.679	207.551	206.792	207.945	207.903	207.515	207.515
1.00001	5×10^{-5}	207.101	206.724	207.605	206.816	207.955	207.913	207.515	207.515
1.000001	5×10^{-6}	207.101	206.728	207.605	206.816	207.840	207.949	207.515	207.515
1.0000001	5×10^{-7}	—	—	207.605	207.569	207.965	207.965	207.515	207.515
1.00000001	5×10^{-8}	—	—	207.605	207.569	207.965	207.965	207.515	207.515
1.000000001	5×10^{-9}	—	—	207.605	207.569	207.965	207.965	207.515	207.515
1.0000000001	5×10^{-10}	—	—	—	—	207.965	207.965	207.515	207.515
1.00000000001	5×10^{-11}	—	—	—	—	207.965	207.965	207.515	207.515
1.000000000001	5×10^{-12}	—	—	—	—	207.845	207.955	207.515	207.515
1.0000000000001	5×10^{-13}	—	—	—	—	207.836	207.836	207.515	207.515
1.00000000000001	5×10^{-14}	—	—	—	—	208.830	208.830	207.515	207.515
1.000000000000001	5×10^{-15}	—	—	—	—	—	—	207.515	207.515

**图 5** 振动球声场外辐射**Figure 5** The external radiation of vibrating sphere.

计算结果表明, 对于边界点 B 附近, 本文算法能够准确接近度不低于 7×10^{-14} 处的内点声场声压, 如图6所示.

6 结论

几乎奇异积分, 特别是高阶单元下的几乎奇异积分计算难题一直是制约边界元法在工程中广泛应用的重要因素之一. 本文以三维声场问题为例, 建立了一种基于6节点三角形二次等参元的半解析算法, 准确计算了声场边界元法中的几乎奇异积分. 半解析算法通过基本解的Taylor级数展开, 分离基本解中的奇异

**图 6** (网络版彩图) B 点附近外点声压 p (Pa)**Figure 6** (Color online) The pressure p (Pa) of the points closed to boundary B .

部分和非奇异部分. 采用常规Gauss数值算法计算非奇异部分积分. 对几乎奇异部分的积分, 首先构造与奇异积分核函数具有相同奇异性的近似核函数, 基于扣除法, 将奇异积分转换为规则积分和几乎奇异积分两项之和. 通过常规Gauss数值积分计算规则积分项, 对几乎奇异积分项, 在极坐标系 $op\theta$ 中建立半解析计算列式. 本文给出的声场经典算例计算结果表明本文

高阶单元半解析算法可以准确计算三维声场边界元法中的各阶几乎奇异积分.

参考文献

- 1 Shen G X, Xiao H, Chen Y M. Boundary Element Method (in Chinese). Beijing: China Machine Press, 1998 [申光宪, 肖宏, 陈一鸣. 边界元法. 北京: 机械工业出版社, 1998]
- 2 Ciskowski R D, Brebbia C A. Boundary Element Methods in Acoustics. Southampton: Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, 1991
- 3 Cheng H, Gao Y, Zhang Y B, et al. Boundary element method for acoustic sensitivity analysis of Vibrating structures (in Chinese). Chin J Mech Eng, 2007, 44: 45–51 [程昊, 高煜, 张永斌, 等. 振动体声学灵敏度分析的边界元法. 机械工程学报, 2008, 44: 45–51]
- 4 Zheng C, Matsumoto T, Takahashi T, et al. Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equations for acoustic sensitivity analysis based on direct differentiation method. Eng Anal Bound Elem, 2011, 35: 1225–1235
- 5 Yan Z Y, Gao X W. Simulation of 3-D acoustic scattering using the pFFT boundary element method (in Chinese). Chin J Comput Mech, 2012, 29: 901–904 [闫再友, 高效伟. pFFT快速边界元方法模拟三维声散射. 计算力学学报, 2012, 29: 901–904]
- 6 Miao Y Y, Li T Y, Zhu X. An improved series expansion method on the multi-frequency analysis of acoustic boundary element. Chin J Acoust, 2016, 41: 485–493
- 7 Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs. Appl Math Modell, 2001, 25: 901–922
- 8 Padhi G S, Sheno R A, Moy S S J, et al. Analytic integration of kernel shape function product integrals in the boundary element method. Comp Struct, 2001, 79: 1325–1333
- 9 Shiah Y C, Shi Y X. Heat conduction across thermal barrier coatings of anisotropic substrates. Int Commun Heat Mass Transfer, 2006, 33: 827–835
- 10 Niu Z, Cheng C, Zhou H, et al. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM. Eng Anal Bound Elem, 2007, 31: 949–964
- 11 Johnston B M, Johnston P R, Elliott D. A new method for the numerical evaluation of nearly singular integrals on triangular elements in the 3D boundary element method. J Comp Appl Math, 2013, 245: 148–161
- 12 Ma H, Kamiya N. Distance transformation for the numerical evaluation of near singular boundary integrals with various kernels in boundary element method. Eng Anal Bound Elem, 2002, 26: 329–339
- 13 Qin X, Zhang J, Xie G, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular integrals on 3D boundary element. J Comp Appl Math, 2011, 235: 4174–4186
- 14 Gao X W. An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high order singular boundary integrals. Comp Methods Appl Mech Eng, 2010, 199: 2856–2864
- 15 Gao X W, Feng W Z, Yang K. A direct method for evaluating line integrals with arbitrary high order of singularities (in Chinese). Chin J Theor Appl Mech, 2014, 46: 428–435 [高效伟, 冯伟哲, 杨恺, 等. 边界元中计算任意高阶奇异线积分的直接法. 力学学报, 2014, 46: 428–435]
- 16 Gu Y, Dong H, Gao H, et al. An extended exponential transformation for evaluating nearly singular integrals in general anisotropic boundary element method. Eng Anal Bound Elem, 2016, 65: 39–46
- 17 Gu Y, Gao H, Chen W, et al. A general algorithm for evaluating nearly singular integrals in anisotropic three-dimensional boundary element analysis. Comp Methods Appl Mech Eng, 2016, 308: 483–498
- 18 Hu Z J, Niu Z R, Chen C Z. Regularization of nearly singular integrals in the boundary element method for three dimensional acoustic problems (in Chinese). J Univ Sci Tech China, 2009, 39: 638–643 [胡宗军, 牛忠荣, 程长征, 等. 三维声场问题边界元法中几乎奇异积分的正则化. 中国科学技术大学学报, 2009, 39: 638–643]
- 19 Hu Z J, Liu C, Niu Z R. A new semi-analytic algorithm of nearly singular integrals on high order boundary element for 3d acoustic BEM (in Chinese). J Appl Mech, 2015, 32: 743–749 [胡宗军, 刘翠, 牛忠荣. 三维声场边界元高阶单元几乎奇异积分半解析法. 应用力学学报, 2015, 32: 743–749]
- 20 Qu S, Li S, Chen H R, Bai R X, et al. Adaptive integration method based on sub-division technique for nearly singular integrals in near-field acoustics boundary element analysis. Wit Trans Modell Simul, 2014, 33: 27–45
- 21 Xie G, Zhou F, Zhang J, et al. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 3D boundary element method. Eng Anal Bound Elem, 2013, 37: 1169–1178

A method of treating the nearly singular integral in calculation of sound radiation with BEM

SUN Rui, HU ZongJun^{*}, NIU ZhongRong & ZHOU HuanLin

School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

For the nearly singular integral of three-dimensional acoustic boundary element method (BEM), based on the 6-noded triangular isoparametric element, a new semi-analytical algorithm of three-dimensional high order element is proposed in this paper. Using Taylor expansion of trigonometric functions in the three dimensional acoustic fundamental solutions, the singular part of the fundamental solutions is separated. Based on the geometric characteristics of the 6-noded triangular element, an approximate singular kernel function is constructed which has the same singularity as singular integral kernel function. Subtracting the approximate kernel function from the kernel function of the singular integral, the latter is decomposed into a regular kernel function and an approximate singular kernel function. The integral of the regular kernel function can be calculated accurately by using the conventional Gauss numerical quadrature. The integral of the new singular part is calculated by the semi-analytic formula derived in this paper. In the surface of the integral element, the local coordinate system $\rho\theta$ is established and the approximate singular integral is transformed into the integrals of variables ρ and θ which are already separated in $\rho\theta$ system. The integral with respect to polar variable ρ is expressed by the analytic formulations first. Then the new singular integral which is a surface integral is transformed into the line integral with respect to variable θ , which can be evaluated by the Gaussian quadrature. Consequently, the new semi-analytic algorithm is established to calculate the nearly singular surface integrals in 3D acoustic BEM. Some examples are given in the last part of this paper to show the accuracy and the effectiveness of the present algorithm. The computed results demonstrate that the semi-analytic algorithm with high order element presented in this paper is more effective than linear regularization BEM to solve nearly singular integrals for 3D acoustic BEM.

BEM, sound field radiation, nearly singular integral, semi-analytical algorithm, 6-noded triangular element

PACS: 43.55.Ka, 02.70.pt, 02.60.Cb

doi: [10.1360/SSPMA2016-00498](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00498)