中国科学: 数学 2011 年 第 41 卷 第 9 期: 837～848
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

Sasaki 几何中的能量泛函与典则度量

汪悦[①], 张希[②*]

① 中国计量学院理学院数学系，杭州 310018;
② 浙江大学理学院数学系，杭州 310027
E-mail: kellywong@cjlu.edu.cn, xizhang@zju.edu.cn

收稿日期: 2010-05-11; 接受日期: 2011-08-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10901147, 10771188, 10831008, 11071212) 资助项目

摘要 本文讨论了 Sasaki 几何中的能量泛函 E_k, 推导出其 Euler-Lagrange 方程, 进而证明其临界度量的唯一性定理. 另外, 我们得到了具有常横截 σ_k 曲率的 Sasaki 度量的唯一性结论.

关键词 Sasaki 流形 横截 Kähler-Einstein 常横截 σ_k 曲率

MSC (2000) 主题分类 53C24, 58J25

1 引言

对于一个奇数维 Riemann 流形 (M,g), 如果其锥流形 $(C(M),\tilde{g})=(M\times\mathbb{R}^+,r^2g+dr^2)$ 是 Kähler 流形, 则称 (M,g) 为一个 Sasaki 流形. 众所周知, 如果 (M,g) 是 Sasaki-Einstein 流形, 则 $(C(M),\tilde{g})$ 必定是 Calabi-Yau 锥. 由于 Sasaki 流形提供了许多新的奇数维 Einstein 流形的例子[1], 近年来 Sasaki 几何越来越受到理论物理学家和数学家的关注. 特别是近年来发现 Sasaki-Einstein 度量在超弦理论中的重要性[2–5]. 长期以来, 我们相信 Sasaki 几何中任意典则度量 (例如 Sasaki-Einstein) 应该是拟正则的, 即: 它可以看成是紧致 Kähler 轨形上的一个圆周丛. 最近, 第一个非拟正则的 Sasaki-Einstein 流形的例子被理论物理学家在研究著名的 CFT/ADS 对偶猜想时所发现, 随后, 人们发现许多维数超过 3 的奇数维紧致流形上存在着非拟正则的 Sasaki-Einstein 结构, 具体参见文献 [3–9]. 由此可见, 仅利用圆周丛逼近来研究典则 Sasaki 结构是不够的. 所以, 借鉴 Kähler 几何中的研究方法来研究典则 Sasaki 度量的存在性和唯一性是非常有趣的. 近来, 关于典则 Sasaki 度量的存在唯一性已有一些结果. 例如: Gauntlett 等[10] 研究了 Sasaki-Einstein 度量新的障碍; Futaki 等[11] 证明了在紧致 Toric Sasaki 流形上横截 Kähler-Ricci 孤立子的存在性; Guan 和本文第二作者[12] 研究了 Sasaki 度量空间中的测地方程, 得到了具有常数量曲率的 Sasaki 度量的唯一性结论; 本文第二作者[13] 证明了 Sasaki-Einstein 度量的存在性与某类能量泛函的正则性之间的等价关系. 在文献 [14] 中, Boyer 等研究了 Sasaki 几何中的 Calabi 泛函, 即在一个适当的 Sasaki 度量空间中, 考虑数量曲率函数的 L^2 范数. 在本文中, 我们研究 Sasaki 几何中的 E_k 泛函. Chen 和 Tian[15,16] 在 Kähler 几何的情形中引入了 E_k 泛函, 并用其得到在具有正的双全纯截面曲率的 Kähler-Einstein 流形上正规化的 Kähler-Ricci 流的收敛性结果. 因为 E_0 就是 Mabuchi 泛函的情形, 所以上述 E_k 泛函可看作 Mabuchi 能量泛函的推广. 受他们文章的启发, 我们将考虑 E_k 泛函的临界 Sasaki 度量, 得到临界度量的唯一性和具有常横截 σ_k 曲率的唯一性结论.

英文引用格式: Wang Y, Zhang X. Energy functionals and canonical metrics in Sasakian geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(9): 837–848, doi: 10.1360/012010-352

由于 Sasaki 流形有许多结构, 所以它可以从许多不同的观点来研究. 一个 Sasaki 流形 (M,g) 具有切触结构 (ξ,η,Φ), 并且具有一维的叶状结构 $\mathcal{F}_\xi$, 称为 Reeb 叶状结构, 该叶状结构具有横截 Kähler 结构. 这里, Killing 向量场 ξ 称为特征向量场, 或者 Reeb 向量场, η 称为切触 1- 形式, Φ 是 $(1,1)$ 型张量场, 其在切触子丛 $\mathcal{D}=\ker\eta$ 上定义了一个复结构. 在本文中, Sasaki 流形记作 (M,ξ,η,Φ,g), 流形 M 上的 Sasaki 结构记为 (ξ,η,Φ,g). 我们从横截 Kähler 几何的观点来研究紧致 Sasaki 流形, 通过固定 Reeb 叶状结构与其横截全纯结构, 来研究 Sasaki 结构的变换. 给定 M 上一个横截全纯结构, 可以定义横截 Levi-Civita 联络、横截全纯双截面曲率与横截 Ricci 曲率 Ric^T, 具体见下一节. 记 ρ^T 为相关的 Ricci 形式, 容易看出, ρ^T 是闭的基本 $(1,1)$- 形式, 其基本上同调类 $\frac{1}{2\pi}[\rho^T]_B=C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi)$ 则是基本第一 Chern 类. 一个 Sasaki 度量 (ξ,η,Φ,g), 如果存在某个常数 μ, 使得 $\rho^T=\mu d\eta=2\mu\omega^T$ 成立, 则该 Sasaki 度量称为横截 Kähler-Einstein (或 η-Einstein 的).

把 (M,ξ,η,Φ,g) 上全体光滑基本实函数 φ (即 $\xi\varphi\equiv 0$) 所构成的空间记为 $C_B^\infty(M,\xi)$. 令

$$\mathcal{H}(\xi,\eta,\Phi,g)=\{\varphi\in C_B^\infty(M,\xi):\eta_\varphi\wedge(d\eta_\varphi)^n\neq 0\}, \tag{1.1}$$

其中

$$\eta_\varphi=\eta+\sqrt{-1}\frac{1}{2}(\bar\partial_B-\partial_B)\varphi,\quad d\eta_\varphi=d\eta+\sqrt{-1}\partial_B\bar\partial_B\varphi. \tag{1.2}$$

空间 $\mathcal{H}(\xi,\eta,\Phi,g)$ 是可缩的, 我们把它简记为 $\mathcal{H}$. 对于任何 $\varphi\in\mathcal{H}$, 容易验证 $(\xi,\eta_\varphi,\Phi_\varphi,g_\varphi)$ 也是 M 上的 Sasaki 结构, 其中

$$\Phi_\varphi=\Phi-\xi\otimes(d_B^c\varphi)\circ\Phi,\quad g_\varphi=\frac{1}{2}d\eta_\varphi\circ(\mathrm{Id}\otimes\Phi_\varphi)+\eta_\varphi\otimes\eta_\varphi. \tag{1.3}$$

$(\xi,\eta_\varphi,\Phi_\varphi,g_\varphi)$ 和 (ξ,η,Φ,g) 在 $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ 上具有相同的横截全纯结构, 且在锥 $C(M)$ 上具有相同的全纯结构 (参见文献 [11, 命题4.2] 以及文献 [17]). 显然, 这些 Sasaki 结构的横截 Kähler 形式是在相同的基本 $(1,1)$ 类中. 我们称这样的类为 Sasaki 流形 (M,ξ,η,Φ,g) 的基本 Kähler 类. 值得注意的是, 在这样的形变下切触丛 $\mathcal{D}$ 会发生变化.

对于任意 $\varphi\in\mathcal{H}$, 其对应 Sasaki 度量 $(M,\xi,\eta_\varphi,\Phi_\varphi,g_\varphi)$ 的横截 Ricci 形式记为 $\rho^T(d\eta_\varphi)$, 横截 $\sigma_k(d\eta_\varphi)$ 曲率定义为

$$C_n^k(\rho^T(d\eta_\varphi))^k\wedge\left(\frac{1}{2}d\eta_\varphi\right)^{n-k}\wedge\eta_\varphi=\sigma_k(d\eta_\varphi)\left(\frac{1}{2}d\eta_\varphi\right)^n\wedge\eta_\varphi. \tag{1.4}$$

对于 $k=0,\dots,n$, 泛函 $E_{k,d\eta}(\varphi)$ 定义为

$$\begin{aligned}E_{k,d\eta}(\varphi)=&-\frac{1}{V}\sum_{i=0}^{n-k-1}\int_M\varphi(d\eta_\varphi)^i\wedge\rho^T(d\eta)^{k+1}\wedge(d\eta)^{n-i-k-1}\wedge\eta\\&-\frac{1}{V}\sum_{i=0}^{k}\int_M\log\left(\frac{(d\eta)^n\wedge\eta}{(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta_\varphi}\right)\rho^T(d\eta_\varphi)^i\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\rho^T(d\eta)^{k-i}\wedge\eta\\&+\frac{(n-k)\mu_k}{V(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\int_M\varphi(d\eta_\varphi)^i\wedge(d\eta)^{n-i}\wedge\eta,\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 V 和 μ_k 分别由下式定义,

$$V=\int_M(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta_\varphi=\int_M(d\eta)^n\wedge\eta, \tag{1.6}$$

$$\mu_k = \frac{\int_M \rho^T (d\eta_\varphi)^{k+1} \wedge (d\eta_\varphi)^{n-k-1} \wedge \eta_\varphi}{\int_M (d\eta_\varphi)^n \wedge \eta_\varphi}. \tag{1.7}$$

与 Kähler 几何情形一样, 容易验证 V 和 μ_k 不依赖于 $\varphi \in \mathcal{H}$ 的选取, 事实上, $(\frac{1}{2})^n V$ 是 (M,g) 的体积形式. 当 $k=0$ 时, E_0 恰好就是 Mabuchi 能量泛函, 在文献 [11] 中, 该能量已经在 Sasaki 情形得到了推广.

能量泛函 E_k 的临界 Sasaki 度量 $(\xi, \eta_\varphi, \Phi_\varphi, g_\varphi)$ 满足方程

$$\frac{1}{2}\triangle_\varphi \sigma_k(d\eta_\varphi) - \sigma_{k+1}(d\eta_\varphi) + 2^{k+1}\mu_k C_n^{k+1} = 0. \tag{1.8}$$

当 $k=0$ 时, $\sigma_1 =$ 常数, 即 E_0 的临界点是常数量曲率的 Sasaki 度量. 当 $k=n$ 时, 临界点度量满足曲率 $\sigma_n(d\eta_\varphi)$ 为常数. 所以很自然的要问, 是否存在 E_k 的临界点 Sasaki 度量, 它不是横截 Kähler-Einstein 的呢? 我们知道, 一个 Sasaki 度量 (ξ,η,Φ,g) 是横截 Kähler-Einstein 的必要条件是: 存在某个常数 λ, 使得基本第一 Chern 类为 $C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi) = 2\pi\lambda[d\eta]_B$. 在这个必要条件下, 我们得到 E_k 临界 Sasaki 度量的唯一性和具有常横截 σ_k 曲率的 Sasaki 度量的唯一性结论. 我们得到下面定理.

定理 1.1 设 (M,ξ,η,Φ,g) 是一个 Sasaki 流形, 存在常数 $\lambda > 0$ (或者 $\lambda < 0$) 使得 $C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi) = 2\pi\lambda[d\eta]_B$. 如果 (M,ξ,η,Φ,g) 是 E_k 能量泛函的临界度量, 且 $\rho^T \in \overline{\Gamma_{k+1}}$ $(-\rho^T \in \overline{\Gamma_{k+1}})$, 则 (M,ξ,η,Φ,g) 必定是横截 Kähler-Einstein 的. 另外, 如果 $\sigma_k(\rho^T) \equiv C$, $k=1,\ldots,n$, 则 (M,ξ,η,Φ,g) 必定也是横截 Kähler-Einstein 的.

上面 Γ_k 锥的定义详见第 4 节. 在 Kähler 情形, 在 Ricci $\geqslant 0$ 条件下, Tosatti [18] 得到在标准 Kähler 类中 E_k 能量泛函的临界 Kähler 度量的唯一性结果. 对于 $k=n$, Maschler [19] 证明了在标准 Kähler 类中 E_n 的临界 Kähler 度量 (即 $\sigma_n \equiv c$) 必定是 Kähler-Einstein 的. 在 Kähler 情形, 定理 1.1 给出了在标准 Kähler 类中具有常数 σ_k 的 Kähler 度量必定是 Kähler-Einstein 的. 所以定理 1.1 是上述结论在 Sasaki 几何中的推广和改进. 此外, 我们考虑除去假设 $C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi) = \lambda[d\eta]_B$ 的唯一性结论. 在文献 [20] 中, 本文第二作者证明了任意具有常数量曲率的 Sasaki 度量, 其横截全纯双截面曲率是拟正定的, 则该 Sasaki 度量必定是横截 Kähler-Einstein 的. 在本文中, 我们将证明具有常横截 σ_k 曲率的 Sasaki 度量也有类似的唯一性结论. 我们得到下面定理.

定理 1.2 令 (M,ξ,η,Φ,g) 是一个 Sasaki 流形, 具有拟正定的横截全纯双截面曲率. 假设 $\sigma_k(\rho^T) \equiv C$, 则 (ξ,η,Φ,g) 必定是横截 Kähler-Einstein 的.

对于 Kähler 情形, 上述唯一性定理已经得到证明[21]. 本文分为以下几部分: 第 2 节给出一些关于 Sasaki 几何的预备结果; 第 3 节介绍 E_k 泛函并导出其 Euler-Lagrange 方程; 第 4 节证明定理 1.1 和 1.2.

2 Sasaki 几何中的预备结果

令 (M,ξ,η,Φ,g) 是 $2m+1$ 维 Sasaki 流形, $\mathcal{F}_\xi$ 是由 ξ 生成的特征叶状结构 (characteristic foliation). 记叶状结构 $\mathcal{F}_\xi$ 的商丛为 $\nu(\mathcal{F}_\xi) = TM/L\xi$. 度量 g 给出了 $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ 和切触子丛 $\mathcal{D}$ 之间的丛同构 σ. 在此同构下, $(\mathcal{D}, \Phi|_{\mathcal{D}}, d\eta)$ 给出了 M 的一个横截 Kähler 结构, 具有横截 Kähler 形式 $\omega^T = \frac{1}{2}d\eta$, 度量 g^T 由 $g^T(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}d\eta(\cdot, \Phi\cdot)$ 定义.

在 Sasaki 流形 (M,g) 上的 p- 形式称为基本的 (basic), 如果满足

$$i_\xi\theta = 0, \quad L_\xi\theta = 0, \tag{2.1}$$

其中 i_ξ 是指与 Killing 向量场 ξ 作缩并, L_ξ 是指对 ξ 的 Lie 导数. 容易看出, 外微分保持基本形式. 即, 如果 θ 是基本形式, 则 $d\theta$ 也是基本形式. 记 $\wedge_B^p(M)$ 为基本 p- 形式的芽层, $\Omega_B^p(M)=\Gamma(M,\wedge_B^p(M))$ 为所有 $\wedge_B^p(M)$ 的光滑截面的集合. 基本上同调 (basic cohomology) 可由通常的方法来定义 (见文献 [22]). 令 $\mathcal{D}^C$ 是子丛 $\mathcal{D}$ 的复化, 且关于 $\Phi|_D$ 的特征空间可分解为两部分, 即

$$\mathcal{D}^C=\mathcal{D}^{1,0}\oplus\mathcal{D}^{0,1}. \tag{2.2}$$

类似地, 可以得到 M 上基本 1- 形式的复化丛 $\wedge_B^1(M)$ 的分解

$$\wedge_B^1(M)\otimes C=\wedge_B^{1,0}(M)\oplus\wedge_B^{0,1}(M). \tag{2.3}$$

令 $\wedge_B^{i,j}(M)$ 记为 (i,j) 型的基本形式丛. 从而, 有下面的分解

$$\wedge_B^p(M)\otimes C=\bigoplus_{i+j=p}\wedge_B^{i,j}(M). \tag{2.4}$$

分别定义 ∂_B 和 $\overline{\partial}_B$ 为

$$\begin{aligned}&\partial_B:\wedge_B^{i,j}(M)\to\wedge_B^{i+1,j}(M);\\&\overline{\partial}_B:\wedge_B^{i,j}(M)\to\wedge_B^{i,j+1}(M).\end{aligned} \tag{2.5}$$

令 $d_B^c=\frac{1}{2}\sqrt{-1}(\overline{\partial}_B-\partial_B)$, $d_B=d|_{\wedge_B^p}$, 容易验证:

$$d_B=\overline{\partial}_B+\partial_B,\quad d_Bd_B^c=\sqrt{-1}\partial_B\overline{\partial}_B,\quad d_B^2=(d_B^c)^2=0.$$

基本上同调群 $H_B^{i,j}(M,\mathcal{F}_\xi)$ 是 Sasaki 结构的基本不变量, 其与 Kähler 结构中的 Dolbeault 上同调的性质类似[17]. 在 Sasaki 流形中, 下面基本形式的 $\partial\overline{\partial}$- 引理成立.

引理 2.1[22] 令 θ 和 θ' 是紧致 Sasaki 流形 (M,ξ,η,Φ,g) 上的两个 $(1,1)$ 型实的闭基本形式. 如果 $[\theta]_B=[\theta']_B\in H_B^{1,1}(M,\mathcal{F}_\xi)$, 则存在实的基本函数 φ 使得下式成立,

$$\theta=\theta'+\sqrt{-1}\partial_B\overline{\partial}_B\varphi.$$

根据横截度量 g^T, 我们可定义 $\mathcal{D}$ 上横截 Levi-Civita 联络 ∇^T 为

$$\nabla_X^TY=\begin{cases}(\nabla_XY)^p, & X\in\mathcal{D},\\ [\xi,Y]^p, & X=\xi,\end{cases} \tag{2.6}$$

其中 Y 是 $\mathcal{D}$ 的截面, X^p 是 X 到 $\mathcal{D}$ 上的投影. 容易验证横截 Levi-Civita 联络是无挠的, 且与度量是相容的. 由上面横截联络所决定的横截曲率记为 $R^T(V,W)Z$, 对所有的 $V,W\in TM$ 和 $Z\in\mathcal{D}$, 有

$$R^T(V,W)Z=\nabla_V^T\nabla_W^TZ-\nabla_W^T\nabla_V^TZ-\nabla_{[V,W]}^TZ. \tag{2.7}$$

定义横截 Ricci 曲率为

$$\mathrm{Ric}^T(X,Y)=\langle R^T(X,e_i)e_i,Y\rangle_g, \tag{2.8}$$

其中 e_i 是 $\mathcal{D}$ 的标准正交基, $X,Y\in\mathcal{D}$. 容易验证: 对所有的 $X,Y\in\mathcal{D}$, 有

$$\mathrm{Ric}^T(X,Y)=\mathrm{Ric}(X,Y)+2g^T(X,Y), \tag{2.9}$$

和

$$S^T = Tr_{g^T}\mathrm{Ric}^T = S + 2n, \tag{2.10}$$

这里的 Ric, S 分别指通常 Riemann 联络所对应的 Ricci 曲率和纯量曲率.

令 $\rho^T = \mathrm{Ric}^T(\Phi\cdot,\cdot)$, ρ^T 称为横截 Ricci 形式. 容易验证 ρ^T 是闭的基本 $(1,1)$- 形式, 且基本上同调类 $\frac{1}{2\pi}[\rho^T]_B = C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi)$ 就是基本第一 Chern 类.

定义 2.2 Sasaki 流形 (M,ξ,η,Φ,g), 若对于某个常数 c, 成立

$$\mathrm{Ric}^T = cg^T, \quad 或 \quad \rho^T = c\left(\frac{1}{2}d\eta\right),$$

则该流形称为横截 Kähler-Einstein 的.

Sasaki 流形 (M,ξ,η,Φ,g), 如果其度量 g 是 Riemannian Einstein 度量, 则该流形称为 Sasaki-Einstein 流形, 即对某个常数 c, 满足 $\mathrm{Ric}_g = cg$. 容易看出必有 $c = 2m$. 由 (2.9), 易证 (ξ,η,Φ,g) 是 Sasaki-Einstein 的, 当且仅当 $\rho^T = (m+1)d\eta$. 根据定义, (M,ξ,η,Φ,g) 为横截 Kähler-Einstein 的必要条件是 $C_1^B(M,\mathcal{F}_\xi) = c[d\eta]_B$.

在 $\mathcal{D}_x \subset T_xM$ 中给定两个 Φ- 不变平面 Σ_1,Σ_2, 横截全纯双截面曲率 $H^T(\Sigma_1,\Sigma_2)$ 定义为

$$H^T(\Sigma_1,\Sigma_2) = \langle R^T(X,JX)JY,Y\rangle_g, \tag{2.11}$$

其中 X 是 Σ_1 中单位向量, Y 是 Σ_2 中单位向量. 容易验证 $\langle R^T(X,JX)JY,Y\rangle$ 只依赖于 Σ_1 和 Σ_2, 不依赖于 X 和 Y 的选取. 在 $x\in M$ 点处, 横截全纯双截面曲率是正定的 (半正定) 是指对于在 $\mathcal{D}_x\subset T_xM$ 中的任意两个 Φ- 不变平面 Σ_1,Σ_2, $H^T(\Sigma_1,\Sigma_2)$ 是正定的 (非负的). 如果横截全纯双截面曲率是处处半正定的, 且至少一点处是严格正定的, 我们称其为拟正定的. 由定义容易看出, 在任意 Sasaki 流形上, 横截全纯双截面曲率的正定性隐含了横截 Ricci 曲率的正定性.

最后, 我们回顾一下 Sasaki 流形上特殊的局部坐标系. 在文献 [23] 中, 已经证明每一个 Sasaki 度量局部可以由 $2n$ 个自由变量的实函数生成. 该函数与 Kähler 几何中的 Kähler 势函数类似. 更确切地, 令 (M,ξ,η,Φ,g) 是 Sasaki 流形, 对于 M 中的任意点 p, 可以选取 p 的一个小邻域 U 上的局部坐标系 $(x,z^1,z^2,\dots,z^n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$, 使得

$$\begin{aligned}
&\xi = \frac{\partial}{\partial x};\\
&\eta = dx - \sqrt{-1}(h_j dz^j - h_{\bar{j}}d\bar{z}^j);\\
&\Phi = \sqrt{-1}\{X_j\otimes dz^j - \overline{X}_j\otimes d\bar{z}^j\};\\
&g = \eta\otimes\eta + 2h_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^l,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $h: U\to\mathbb{R}$ 是局部定义的基本函数, 即

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad h_i = \frac{\partial h}{\partial z^i}, \quad h_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^i\partial\bar{z}^j},$$

且

$$X_j = \frac{\partial}{\partial z^j} + \sqrt{-1}h_j\frac{\partial}{\partial x}, \quad \overline{X}_j = \frac{\partial}{\partial\bar{z}^j} - \sqrt{-1}h_{\bar{j}}\frac{\partial}{\partial x}.$$

上面我们令 $2dz^i d\overline{z}^j = dz^i \otimes d\overline{z}^j + d\overline{z}^j \otimes dz^i$. 在这样的局部坐标系下, $\mathcal{D}\otimes\mathcal{C}$ 由 X_i 和 $\overline{X}_i$ 张成, 容易验证

$$\begin{aligned}&\Phi X_i = \sqrt{-1}X_i, \quad \Phi\overline{X}_i = -\sqrt{-1}\overline{X}_i,\\&[X_i, X_j] = [\overline{X}_i, \overline{X}_j] = [\xi, X_i] = [\xi, \overline{X}_i] = 0,\\&[X_i, \overline{X}_j] = -2\sqrt{-1}h_{i\overline{j}}\xi.\end{aligned} \tag{2.13}$$

显然, $\{\eta, dz^i, d\overline{z}^j\}$ 是 $\{\frac{\partial}{\partial x}, X_i, \overline{X}_j\}$ 的对偶基, 且

$$d\eta = 2\sqrt{-1}h_{i\overline{j}}dz^i \wedge d\overline{z}^j, \tag{2.14}$$

横截度量可表达为

$$g^T = 2g^T_{i\overline{j}}dz^i d\overline{z}^j = 2h_{i\overline{j}}dz^i d\overline{z}^j, \tag{2.15}$$

其中 $g^T_{i\overline{j}} = g^T(X_i, \overline{X}_j) = h_{i\overline{j}}$. 度量 g 的 Laplace 算子可以局部地表示为

$$\triangle f = \nabla df(\xi, \xi) + 2h^{i\overline{j}}\nabla df(X_i, \overline{X}_j), \tag{2.16}$$

其中 $h^{i\bar{k}}h_{j\bar{k}} = \delta_{ij}$. 特别地, 当 f 是 M 上的一个基本函数时, 我们有

$$\triangle f = 2h^{i\overline{j}}\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial\overline{z}^j}. \tag{2.17}$$

由 (2.13), 可得 $\nabla^T_{\frac{\partial}{\partial x}}X_i = \nabla^T_{\frac{\partial}{\partial x}}\overline{X}_j = 0$. 对于 $A, B, C = 1, 2, \dots, n, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n}$, 定义 Γ^A_{BC} 为

$$\nabla^T_{X_B}X_C = \Gamma^A_{BC}X_C, \tag{2.18}$$

其中 $X_{\overline{j}} = \overline{X}_j$. 由于 ∇^T 是无挠的, 与度量相容的, 且 $\nabla^T J = 0$. 由 (2.13), 类似于 Kähler 情形, 容易验证只有 Γ^i_{jk} 和 $\Gamma^{\overline{i}}_{\overline{j}\overline{k}}$ 可能不为零, 其中 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. 此外

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = h^{i\bar{l}}\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial z^k}. \tag{2.19}$$

注 2.1 对于固定点 $P \in M$, 我们总能选取以 P 为中心的局部坐标系 $(x, z^1, \dots, z^n)$ 满足 $\{\frac{\partial}{\partial z^i}|_P\} \in \mathcal{D}^c$ 或等价于对任意 j, 有 $h_i(P) = 0$. 事实上, 我们只需变换坐标系为 $(y, u^1, \dots, u^n)$, 其中

$$y = x - \sqrt{-1}h_i(P)z^i + \sqrt{-1}h_{\overline{j}}(P)\overline{z}^j,$$

$u^k = z^k$ 对所有 $k = 1, \dots, n$, 变换势函数为 $h^* = h - h_i(P)u^i - h_{\overline{j}}(P)\overline{u}^j$. 进一步, 和 Kähler 情形中的方法一样, 我们还可选取坐标系 $(x, z^1, \dots, z^n)$ 使得 $h_i(P) = 0$, $h_{i\overline{j}}(P) = \delta^i_j$, 且 $d(h_{i\overline{j}})|_P = 0$. 即对所有的 i, j, k, 有 $\Gamma^i_{jk}|_P = 0$. 该局部坐标系也称作 Sasaki 流形上的法坐标系.

取上述的局部坐标系 $(x, z^1, \dots, z^n)$, 我们有

$$\begin{aligned}R^T_{i\overline{j}k\bar{l}} &= g^T(R^T(X_i, \bar{X}_j)X_k, \bar{X}_l)\\&= -\frac{\partial^2 h_{i\overline{j}}}{\partial z^k \partial\overline{z}^l} + h^{s\bar{m}}\frac{\partial h_{i\overline{m}}}{\partial z^k}\frac{\partial h_{s\overline{j}}}{\partial\overline{z}^l},\end{aligned} \tag{2.20}$$

和

$$R^T_{i\overline{j}} = \mathrm{Ric}^T(X_i, \overline{X}_j) = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial\overline{z}^j}\log\det(h_{m\overline{n}}). \tag{2.21}$$

所以, 在这样的局部坐标系中, 横截全纯双截面曲率是非负定的等价于

$$R^T_{i\bar{i}j\bar{j}} \geqslant 0 \tag{2.22}$$

对所有的 i, j 成立, 并且横截 Ricci 形式可以表示成

$$\rho^T = -\sqrt{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log\det(h_{m\bar{n}}) dz^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{2.23}$$

3 Sasaki 度量空间中的 E_k 泛函

令 $\varphi \in \mathcal{H}$, 为了记号的简单, 记

$$b_{d\eta}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \int_M \varphi (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta)^{n-i} \wedge \eta, \tag{3.1}$$

和

$$\begin{aligned} a_{k,d\eta}(\varphi) = & \sum_{i=0}^{n-k-1} \int_M \varphi (d\eta_\varphi)^i \wedge \rho^T (d\eta)^{k+1} \wedge (d\eta)^{n-i-k-1} \wedge \eta \\ & + \sum_{i=0}^{k} \int_M \log\left(\frac{(d\eta)^n \wedge \eta}{(d\eta_\varphi)^n \wedge \eta_\varphi}\right) \rho^T (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta_\varphi)^{n-k} \wedge \rho^T (d\eta)^{k-i} \wedge \eta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

则我们有以下表示式,

$$E_{k,d\eta}(\varphi) = -\frac{1}{V} a_{k,d\eta}(\varphi) + \frac{(n-k)\mu_k}{V(n+1)} b_{d\eta}(\varphi). \tag{3.3}$$

令 $\varphi(t) \in \mathcal{H}$ 是 Sasaki 度量空间中的一条光滑道路, 且记 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_{d\eta}(\varphi) &= \sum_{i=0}^{n} \int_M \dot{\varphi} (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta)^{n-i} \wedge \eta + \sum_{i=0}^{n} \int_M \varphi \frac{d}{dt} (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta)^{n-i} \wedge \eta \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_M \dot{\varphi} (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta)^{n-i} \wedge \eta + \sum_{i=1}^{n} \int_M i\varphi (\sqrt{-1}\partial_B \bar{\partial}_B \dot{\varphi}) \wedge (d\eta_\varphi)^{i-1} \wedge (d\eta)^{n-i} \wedge \eta. \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{k,d\eta}(\varphi) = & \sum_{i=0}^{n-k-1} \int_M \dot{\varphi} (d\eta_\varphi)^i \wedge \rho^T (d\eta)^{k+1} \wedge (d\eta)^{n-i-k-1} \wedge \eta \\ & + \sum_{i=1}^{n-k-1} \int_M i\varphi (\sqrt{-1}\partial_B \bar{\partial}_B \dot{\varphi}) \wedge (d\eta_\varphi)^{i-1} \wedge \rho^T (d\eta)^{k+1} \wedge (d\eta)^{n-i-k-1} \wedge \eta \\ & - \sum_{i=0}^{k} \int_M \frac{1}{4} \triangle_\varphi \dot{\varphi} \rho^T (d\eta_\varphi)^i \wedge (d\eta_\varphi)^{n-k} \wedge \rho^T (d\eta)^{k-i} \wedge \eta \\ & - \sum_{i=1}^{k} \int_M i \log\left(\frac{(d\eta)^n \wedge \eta}{(d\eta_\varphi)^n \wedge \eta_\varphi}\right) \sqrt{-1}\partial_B \bar{\partial}_B \left(\frac{1}{4}\triangle_\varphi \dot{\varphi}\right) \wedge (d\eta_\varphi)^{n-k} \wedge \rho^T (d\eta)^{k-i} \wedge \rho^T (d\eta_\varphi)^{i-1} \wedge \eta \\ & + \sum_{i=0}^{k} \int_M \log\left(\frac{(d\eta)^n \wedge \eta}{(d\eta_\varphi)^n \wedge \eta_\varphi}\right) (n-k) \rho^T (d\eta_\varphi)^i \wedge (\sqrt{-1}\partial_B \bar{\partial}_B \dot{\varphi}) \wedge (d\eta_\varphi)^{n-k-1} \wedge \rho^T (d\eta)^{k-i} \wedge \eta. \end{aligned}$$

由分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_{k,d\eta}(\varphi)=&\sum_{i=0}^{n-k-1}\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^i\wedge\rho^T(d\eta)^{k+1}\wedge(d\eta)^{n-i-k-1}\wedge\eta\\&+\sum_{i=1}^{n-k-1}\int_M i\dot{\varphi}(\sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B\varphi)\wedge(d\eta_\varphi)^{i-1}\wedge\rho^T(d\eta)^{k+1}\wedge(d\eta)^{n-i-k-1}\wedge\eta\\&-\sum_{i=1}^{k}\int_M i(\rho^T(d\eta_\varphi)-\rho^T(d\eta))\left(\frac{1}{4}\triangle_\varphi\dot{\varphi}\right)\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\rho^T(d\eta)^{k-i}\wedge\rho^T(d\eta_\varphi)^{i-1}\wedge\eta\\&-\sum_{i=0}^{k}\int_M\left(\frac{1}{4}\triangle_\varphi\dot{\varphi}\right)\rho^T(d\eta_\varphi)^i\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\rho^T(d\eta)^{k-i}\wedge\eta\\&+\sum_{i=0}^{k}\int_M\dot{\varphi}(n-k)(\rho^T(d\eta_\varphi)-\rho^T(d\eta))\wedge\rho^T(d\eta_\varphi)^i\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge\rho^T(d\eta)^{k-i}\wedge\eta\\=&\,(n-k)\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge\rho^T(d\eta)^{k+1}\wedge\eta\\&+(n-k)\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge(\rho^T(d\eta_\varphi))^{k+1}\wedge\eta\\&-(n-k)\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge\rho^T(d\eta)^{k+1}\wedge\eta\\&-(k+1)\int_M\frac{1}{4}(\triangle_\varphi\dot{\varphi})\rho^T(d\eta_\varphi)^k\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\eta\\=&\,(n-k)\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge(\rho^T(d\eta_\varphi))^{k+1}\wedge\eta\\&-(k+1)\int_M\frac{1}{4}(\triangle_\varphi\dot{\varphi})\rho^T(d\eta_\varphi)^k\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\eta,\end{aligned}$$

和

$$\frac{d}{dt}b_{d\eta}(\varphi)=(n+1)\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta. \tag{3.4}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{k,d\eta}(\varphi)=&\,\frac{k+1}{V}\int_M\frac{1}{4}(\triangle_\varphi\dot{\varphi})(\rho^T(d\eta_\varphi))^k\wedge(d\eta_\varphi)^{n-k}\wedge\eta\\&-\frac{n-k}{V}\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^{n-k-1}\wedge(\rho^T(d\eta_\varphi))^{k+1}\wedge\eta\\&+\frac{(n-k)\mu_k}{V}\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\=&\,\frac{k+1}{V}\int_M\frac{1}{4}(\triangle_\varphi\dot{\varphi})(C_n^k)^{-1}2^{-k}\sigma_k(d\eta_\varphi)(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\&-\frac{n-k}{V}\int_M\dot{\varphi}(C_n^{k+1})^{-1}2^{-(k+1)}\sigma_{k+1}(d\eta_\varphi)(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\&+\frac{(n-k)\mu_k}{V}\int_M\dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\=&\,\frac{(k+1)!(n-k)!}{n!V}2^{-k}\int_M\dot{\varphi}\left(\frac{1}{4}\triangle_\varphi\sigma_k(d\eta_\varphi)\right)(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\&-\frac{(k+1)!(n-k)!}{n!V}2^{-(k+1)}\int_M\dot{\varphi}\sigma_{k+1}(d\eta_\varphi)(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(n-k)\mu_k}{V}\int_M \dot{\varphi}(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta\\
=&\frac{(k+1)!(n-k)!}{n!V}2^{-(k+1)}\int_M \dot{\varphi}\bigg(\frac{1}{2}\triangle_\varphi\sigma_k(d\eta_\varphi)-\sigma_{k+1}(d\eta_\varphi)\\
&+2^{k+1}\mu_k C_n^{k+1}\bigg)(d\eta_\varphi)^n\wedge\eta.
\end{aligned}
$$

所以, E_k 的临界度量 $(\xi,\Phi_\varphi,\eta_\varphi,g_\varphi)$ 满足方程

$$
\frac{1}{2}\triangle_\varphi\sigma_k(d\eta_\varphi)-\sigma_{k+1}(d\eta_\varphi)+2^{k+1}\mu_k C_n^{k+1}=0. \tag{3.5}
$$

当 $k=0$ 时, $\sigma_1=C$, 即 $k=0$ 时的临界点度量是常数量曲率的 Sasaki 度量. 对于 $k=n$, 临界度量满足: $\sigma_n(d\eta_\varphi)\equiv C$.

4 Sasaki 度量的唯一性定理

对于固定整数 $k\in[1,n]$ 和 $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, v 的 k- 阶基本对称多项式定义为

$$
\sigma_k(v)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<\cdots\leqslant n} v_{i_1}\cdots v_{i_k}.
$$

令

$$
\Gamma_k=\{v\in\mathbb{R}^n\mid \sigma_i(v)>0, i=1,\ldots,k\},
$$

称其为 R^n 中 k- 正定锥 (它是 $\mathbb{R}^n$ 中的开凸锥).

令 (ξ,η,Φ,g) 为流形 M 上的 Sasaki 结构, 对任意实的基本 $(1,1)$ 形式 $\theta\in\Lambda_B^{1,1}(M,\mathcal{F}_\xi)$, 定义

$$
\sigma_k(\theta)(d\eta)^n\wedge\eta=C_n^k 2^k\theta^k\wedge(d\eta)^{n-k}\wedge\eta. \tag{4.1}
$$

另一方面, 对于每一基本 $(1,1)$ 形式 θ, 可以由下式来诱导对应于横截 Kähler 度量 $\omega^T=\frac{1}{2}d\eta$ 的张量场 $\theta^*\in\mathrm{End}(\mathcal{D}^{1,0})$,

$$
\omega^T(\theta^*(X),\bar{Y})=\theta(X,\Phi(\bar{Y})). \tag{4.2}
$$

则 $\sigma_k(\theta)$ 就是 θ^* 特征值的 k- 阶基本对称多项式. 在局部 Sasaki 坐标系 $(x,z^1,\ldots,z^n)$ 下, 有

$$
\det(\delta_i^j+t\theta_{i\bar{k}}h^{j\bar{k}})=\sum_{k=1}^n\sigma_k(\theta)t^k, \tag{4.3}
$$

其中

$$
\theta=\sqrt{-1}\theta_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j,\quad d\eta=2\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j,\quad \sum_{i=1}^n h^{j\bar{k}}h_{i\bar{k}}=\delta_i^j.
$$

定义 4.1 对于 Sasaki 流形 (M,ξ,η,Φ,g) 上的任意实的基本 $(1,1)$ 形式 θ, 若对于所有的 $i=1,\ldots,k$, 有 $\sigma_i(\theta)>0$, 则称 $\theta\in\Gamma_k$; 若对于所有的 $i=1,\ldots,k$, 有 $\sigma_i(\theta)\geqslant 0$, 则称 $\theta\in\overline{\Gamma_k}$.

为了更进一步的讨论, 我们需要用下面 Huisken 和 Sinestrari 的论文 [24] 中的引理.

引理 4.2 $\mathbb{R}^n$ 中集合 Γ_k 与集合 $\{v\in\mathbb{R}^n,\sigma_k(v)>0\}$ 的包含正锥的的连通分支一致. Γ_n 则与正锥一致.

定理 1.1 的证明 令 (M,ξ,η,Φ,g) 是 Sasaki 流形, 且对某个常数 $\lambda\neq 0$, 有 $[\rho^T]_B=\lambda[d\eta]_B$. 由 $\partial\bar{\partial}$- 引理, 可以假设存在一个光滑实基本函数 f, 使得 $\rho^T=\lambda d\eta+\sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B f$. 令 $S_k=(C_n^k)^{-1}\sigma_k$ 为规范 k- 阶基本对称多项式函数. 若 $\rho^T\in\Gamma_k$, 则我们有下面的 Maclaurin 不等式,

$$S_k^{\frac{1}{k}}(\rho^T)\leqslant\cdots\leqslant S_2^{\frac{1}{2}}\leqslant S_1(\rho^T). \tag{4.4}$$

不妨假设 $\lambda>0$, 若 $\lambda<0$, 我们只要把 ρ^T 换成 $-\rho^T$, 就可用相同方法讨论. 首先, 我们假设 (ξ,η,Φ,g) 是能量泛函 E_k 的临界度量, 且 $\rho^T\in\overline{\Gamma_{k+1}}$, 即有

$$\sigma_{k+1}(\rho^T)-\frac{1}{2}\triangle_{\varphi}\sigma_k(\rho^T)=2^{k+1}\mu_k\cdot C_n^{k+1}. \tag{4.5}$$

由于 $[\rho^T]_B=\lambda[d\eta]_B$, 这里 $\lambda>0$, 所以对于 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 有 $\mu_k=\lambda^{k+1}$. 令 $p\in M$ 为 $\sigma_k(\rho^T)$ 的极小值点, 则有

$$\sigma_{k+1}(\rho^T)|_p\geqslant 2^{k+1}\lambda^{k+1}\cdot C_n^{k+1},$$

即 $S_{k+1}(\rho^T)|_p\geqslant 2^{k+1}\lambda^{k+1}>0$. 由假设 $\rho^T\in\overline{\Gamma_{k+1}}$, 容易看出至少在点 p 处, 有 $\rho^T\in\Gamma_{k+1}$. 所以, 在 p 点处利用 Maclaurin 不等式, 得到

$$(S_k(\rho^T))^{\frac{1}{k}}|_p\geqslant(S_{k+1}^{\frac{1}{k+1}})^{\frac{1}{k+1}}|_p\geqslant 2\lambda. \tag{4.6}$$

由于 p 是 $S_k(\rho^T)$ 的极小值点, 所以处处有 $S_k(\rho^T)^{\frac{1}{k}}\geqslant 2\lambda$. 则在 M 上处处有

$$S_1(\rho^T)\geqslant(S_2(\rho^T))^{\frac{1}{2}}\geqslant\cdots\geqslant(S_k(\rho^T))^{\frac{1}{k}}\geqslant 2\lambda.$$

又因为 $\rho^T=\lambda d\eta+\sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B f$, 我们得到

$$\sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B f\wedge(d\eta)^{n-1}\wedge\eta\geqslant 0, \tag{4.7}$$

即 $\triangle f\geqslant 0$. 所以势函数 f 为常数, 则有 $\rho^T=\lambda d\eta$, 即 (ξ,η,Φ,g) 是横截 Kähler-Einstein 度量. 从而, 我们证明了定理 1.1 的第一部分.

假设 $\sigma_k(\rho^T)$ 是常数, 则有

$$S_k(\rho^T)=(C_n^k)^{-1}\sigma_k(\rho^T)=2^k\cdot\lambda^k>0.$$

另一方面, 在 f 的极小值点, 有

$$\rho^T=\lambda d\eta+\sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B f>0, \tag{4.8}$$

即 Ricci 形式在该点是正定的. 运用引理 4.2, 得到 $\rho^T\in\Gamma_k$, 再运用 Maclaurin 不等式, 得到 $S_1(\rho^T)\geqslant 2\lambda$. 和上面的讨论一样, 我们得到势函数必定是常数, 即 (ξ,η,Φ,g) 是横截 Kähler-Einstein 的. □

定理 1.2 的证明 由假设, (M,ξ,η,Φ,g) 是具有拟正定的横截全纯双截面曲率的 Sasaki 流形, $\sigma_k(\rho^T)\equiv C$. 对于任意点 $p\in M$, 在 p 处选取 Sasaki 法坐标系 $(x,z^1,\dots,z^n)$, 不妨假设 $\rho^T_{\alpha\bar{\beta}}|_p=\lambda_\alpha\delta_\alpha^\beta$ (只需通过常系数线性变换改变坐标系 z^i). 下面的计算与文献 [21] 中的计算相仿.

令 $\rho_\alpha^\beta=\rho^T_{\alpha\bar{\gamma}}h^{\beta\bar{\gamma}}$, 注意到 $F=\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是 M 上的基本函数. 在点 p 处, 有

$$0=\frac{1}{2}\Delta\sigma_k^{\frac{1}{k}}=h^{\alpha\bar{\beta}}\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}(\sigma_k^{\frac{1}{k}})=h^{\alpha\bar{\beta}}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta}\cdot\frac{\partial\rho_\gamma^\delta}{\partial\bar{z}^\beta}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= h^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta\partial\rho_\xi^\tau}\cdot\frac{\partial\rho_\gamma^\delta}{\partial\bar z^\beta}\cdot\frac{\partial\rho_\xi^\tau}{\partial z^\alpha}+h^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta}\cdot\frac{\partial^2\rho_\gamma^\delta}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}\\
&= h^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta\partial\rho_\xi^\tau}\cdot\frac{\partial\rho_\gamma^\delta}{\partial\bar z^\beta}\cdot\frac{\partial\rho_\xi^\tau}{\partial z^\alpha}+\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta}h^{\alpha\bar\beta}\left(\frac{\partial^2\rho^T_{\gamma\bar j}}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}h^{\delta\bar j}+\rho^T_{\gamma\bar j}\frac{\partial^2 h^{\delta\bar j}}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}+\frac{\partial h^{\delta\bar j}}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\gamma\bar j}}{\partial\bar z^\beta}+\frac{\partial h^{\delta\bar j}}{\partial\bar z^\beta}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\gamma\bar j}}{\partial z^\alpha}\right)\\
&= h^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta\partial\rho_\xi^\tau}\cdot\frac{\partial\rho_\gamma^\delta}{\partial\bar z^\beta}\cdot\frac{\partial\rho_\xi^\tau}{\partial z^\alpha}+\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta}h^{\delta\bar j}\frac{\partial^2 S^T}{\partial z^\gamma\partial\bar z^j}+\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\rho_\gamma^\delta}\left(h^{\alpha\bar\beta}\rho^T_{\gamma\bar j}\frac{\partial^2 h^{\delta\bar j}}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}-h^{\delta\bar j}\rho^T_{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2 h^{\alpha\bar\beta}}{\partial z^\gamma\partial\bar z^j}\right)\\
&= \sum_\alpha\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\alpha}\cdot\frac{\partial^2 S^T}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\alpha}+\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\gamma}\lambda_\gamma R^T_{\gamma\bar\gamma\alpha\bar\alpha}-\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\gamma}\lambda_\alpha R^T_{\alpha\bar\alpha\gamma\bar\gamma}+\sum_{\gamma,\xi,\alpha}\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\gamma\partial\lambda_\xi}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\gamma\bar\gamma}}{\partial\bar z^\alpha}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\xi\bar\xi}}{\partial z^\alpha}\\
&= \sum_\alpha\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\alpha}\cdot\frac{\partial^2 S^T}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\alpha}R^T_{\gamma\bar\gamma\alpha\bar\alpha}\left(\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\gamma}-\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\alpha}\right)(\lambda_\gamma-\lambda_\alpha)+\sum_{\gamma,\xi,\alpha}\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\alpha\partial\lambda_\xi}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\gamma\bar\gamma}}{\partial\bar z^\alpha}\cdot\frac{\partial\rho^T_{\xi\bar\xi}}{\partial z^\alpha}.
\end{aligned}
$$

由函数 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 的凸性, 上述等式右边的第二项和第三项是非正定的 (见文献 [21]). 所以有

$$
\sum_\alpha\frac{\partial\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{\partial\lambda_\alpha}\cdot\frac{\partial^2 S^T}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\alpha}\geqslant 0. \tag{4.9}
$$

又因为 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是单调的, 由强极值原理, 有 $S^T\equiv C$. 根据文献 [20] 中定理 1.1 的结果, 得到 (ξ,η,Φ,g) 必定是横截 Kähler-Einstein 的, 或者是 η-Einstein 的. □

致谢 本文的完成正值第二作者访问 McGill 大学期间, 作者感谢浙江大学对于此次访问的支持; 感谢 McGill 大学所提供的科研条件; 衷心感谢管鹏飞教授给予的悉心指导和帮助. 最后作者对于审稿人所给予的帮助表示感谢.

参考文献

1 Boyer C P, Galicki K, Kollor J. Einstein metrics on spheres. Ann of Math, 2005, 162: 557–580

2 Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. Adv Theor Math Phys, 1998, 2: 231–252

3 Martelli D, Sparks J. Toric geometry, Sasaki-Einstein manifolds and a new infinite class of AdS/CFT duals. Comm Math Phys, 2006, 262: 51–89

4 Martelli D, Sparks J, Yau S T. The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds. arXiv: hep-th/0503183

5 Martelli D, Sparks J, Yau S T. Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation. Comm Math Phy, 2008, 280: 611–673

6 Cvetic M, Lu H, Page Don N, et al. New Einstein-Sasaki spaces in five and higher dimensions. Phys Rev Lett, 2005, 95: 071101

7 Martelli D, Sparks J. Toric Sasaki-Einstein metrics on $S^2\times S^3$. Phys Lett B, 2005, 621: 208–212

8 Gauntlett J P, Martelli D, Spark J, et al. Sasaki-Einstein metrics on $S^2\times S^3$. Adv Theor Math Phys, 2004, 8: 711–734

9 Gauntlett J P, Martelli D, Spark J, et al. A new infinite class of Sasaki-Einstein manifolds. Adv Theor Math Phys, 2004, 8: 987–1000

10 Gauntlett J P, Martelli D, Spark J, et al. Obstructions to the existence of Sasaki-Einstein metrics. Comm Math Phys, 2007, 273: 803–827

11 Futaki A, Ono H, Wang G. Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds. J Differ Geom, 2009, 83: 585–635

12 Guan P F, Zhang X. Regularity of the geodesic equation in the space of Sasakian metrics. arXiv: math.DG/09065591

13 Zhang X. Energy properness and Sasakian-Einstein metrics. Comm Math Phys, 2011, 306: 229–260

14 Boyer C P, Galicki K, Simanca R. Canonical Sasakian metrics. Comm Math Phys, 2008, 279: 705–733

15 Chen X X, Tian G. Ricci flow on Kähler-Einstein surfaces. Invent Math, 2002, 147: 487–544
16 Chen X X, Tian G. Ricci flow on Kähler-Einstein manifolds. Duke Math J, 2006, 131: 17–73
17 Boyer C P, Galicki K. Sasakian Geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford Univ Press, 2008
18 Tosatti V. On the critical points of the E_k functionals in Kähler geometry. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 3985–3988
19 Maschler G. Metric pairs and the Futaki character. Internat J Math, 2002, 13: 1–9
20 Zhang X. A note of Sasakian metrics with constant scalar curvature. J Math Phys, 2009, 50: 103505
21 Guan P F, Li Q, Zhang X. A uniqueness theorem in Kähler geometry. Math Ann, 2009, 345: 377–393
22 El Kacimi-Alaoui A. Operateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications. Compos Math, 1990, 79: 57–106
23 Godlinski M, Kopczynski W, Nurowski P. Locally Sasakian manifolds. Classical Quantum Gravity, 2000, 17: 105–115
24 Huisken G, Sinestrari C. Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces. Acta Math, 1999, 183: 45–70

Energy functionals and canonical metrics in Sasakian geometry

WANG Yue & ZHANG Xi

Abstract In this paper, we introduce E_k functionals in Sasakian geometry, and deduce their Euler-Lagrange equations. Then, we prove the uniqueness results for critical metrics of these functionals. We also obtain some uniqueness results for Sasakian metrics with constantly transverse σ_k curvature.

Keywords: Sasakian manifold, transverse Kähler-Einstein, constantly transverse $\boldsymbol{\sigma_k}$ curvature
MSC(2000): 53C24, 58J25
doi: 10.1360/012010-352