

光纤非线性传输的电磁理论及其数值模拟

杨祥林 赵 阳 单雪康

(东南大学电子工程系, 南京)

摘 要

本文从 Maxwell 方程导出了光纤非线性传输方程的一般完整表示, 给出了考虑损耗与高阶色散下的孤子能量与动量方程, 从其出发得到了小损耗一般解析解, 对各种因素对光纤孤子传输的影响进行了数值研究, 得到了一些新的重要结果。

关键词: 光纤非线性传输, 孤子传输, 数值模拟

近年来, 孤子理论及其应用得到了很快的发展, 其有代表性的工程应用是美国 Bell 实验室用孤子传输来改进目前的线性光通信系统, 提高传输速率, 实现超长距通信。光纤非线性传输方程是研究孤子传输特性的源点, 早在 60 年代 Whitham^[1] 和 Karpman^[2] 就给出了一般非线性、色散系统中非稳态波的传输方程, 70 年代初, Hasegawa^[3] 采用 Whitham 和 Karpman 给出的非线性色散关系, 引入径向模式平均的概念, 首次建立了阶跃单模光纤的非线性传输方程, 并给出了一种简化解, 其后人们从这一方程出发, 从不同角度对孤子传输进行了一系列研究。

与文献[3]不同, 本文从 Maxwell 方程出发建立任意剖面结构光纤、任意模式光脉冲波的非线性传输方程, 给出其一般完整表示, 之后用数值法研究各种因素对孤子传输的影响, 得到了一些新的重要结果。

一、三维光纤系统中的非线性传输方程

设光纤中传输的波为

$$\mathbf{E} = (r, \theta, z, t) = \alpha \phi(r, \theta, z, t) e^{i(\beta z - \omega_0 t)}, \quad (1)$$

它满足的波动方程由 Maxwell 方程得到

$$\nabla \mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}(r, \theta, z, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

在非线性工作条件下, 通常圆周对称光纤纤芯的折射率分布为

$$n(r, |E|^2, \omega) = n(\omega) \rho(r) + i\chi + \sum_k n_{2k} |E|^{2k}, \quad (3)$$

式中 n_{2k} 为 $2k+1$ 阶非线性折射率, $\rho(r)$ 为纤芯折射率剖面函数, χ 为介质损耗因子, β 为

轴向传输常数, ω_0 为光载波频率. 在频域中, 电位移 D 可表为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r, \theta, z, \omega) &= n^2(r, |E|^2, \omega) \mathcal{E}(r, \theta, z, \omega) \\ &= \left(n^2(\omega) \rho^2(r) + 2in(\omega) \rho(r) \chi - \chi^2 + 2n(\omega) \rho(r) \sum_k n_{2k} |E|^{2k} \right. \\ &\quad \left. + i\chi \sum_k n_{2k} |E|^{2k} \right) \mathcal{E}(r, \theta, z, \omega), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\mathcal{E}$ 与 E , $\mathcal{D}$ 与 D 互为富氏变换. 忽略二阶小量 χ^2 和 χn_{2k} 项, 并取载波频率处的损耗与非线性, 得到

$$\begin{aligned} D &= \rho^2(r) \int N^2(t') E(r, \theta, z, t - t') dt' + 2n_0 \rho(r) \left(i\chi \right. \\ &\quad \left. + \sum_k n_{2k} |E|^{2k} \right) E(r, \theta, z, t). \end{aligned} \quad (5)$$

将上式代入(2)式, 设包络慢变, 即满足

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \ll k_0^n \phi, \quad \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} \ll \omega_0^n \phi, \quad (n = 1, 2), \quad (6)$$

并注意到脉冲谱宽远比 ω_0 小, 取

$$k^2(\omega + \omega_0) \approx k_0 \left(k_0 + 2k_0' \omega + k_0'' \omega^2 + \frac{1}{3} k_0''' \omega^3 \right) \quad (7)$$

立即得到

$$\begin{aligned} &(\nabla_\perp^2 + \rho^2(r) k_0^2 - \beta^2) \phi(r, \theta, z, t) + \left[2i\beta \frac{\partial}{\partial z} + 2i\rho(r) k_0 \gamma \right. \\ &\quad \left. + \rho^2(r) k_0 \left(2ik_0' \frac{\partial}{\partial t} - k_0'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{3} ik_0''' \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\rho(r) k_0^2}{n_0} \sum_k n_{2k} |\phi|^{2k} \right] \phi(r, \theta, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $\phi = R(r, \theta) \phi(z, t)$, $\phi(z, t)$ 为光场包络函数, $R(r, \theta) = F(r) \exp(im\theta)$ 为径向本征函数, 在孤子传输条件下, 径向本征函数受非线性影响较小, 可作线性处理, 因此上式变为

$$\begin{aligned} &\left[i\beta \frac{\partial}{\partial z} + i\rho(r) k_0 \gamma + \rho^2(r) k_0 \left(ik_0' \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} k_0'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{6} ik_0''' \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho(r) k_0^2}{n_0} \sum_k n_{2k} |\phi|^{2k} |F(r)|^{2k} \right] \phi = 0, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\left(\nabla_\perp^2 + \rho^2(r) k_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F(r) = 0, \quad (9b)$$

(9b)式决定线性本征模解, (9a)式决定包络的时空演化, 显然(9a)式中线性本征模和折射率剖面函数只影响包络幅值, 而不影响其形状, 故对(9a)式作本征模强度平均, 并取模场半径处的 $\rho(r) = \rho(\sigma)$, $\beta \approx \rho(r) k_0$, 则(9a)式变为

$$\begin{aligned} &i \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \gamma \phi + \rho(\sigma) k_0' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \rho(\sigma) k_0'' \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{6} i \rho(\sigma) k_0''' \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \\ &\quad + \frac{k_0}{n_0} \sum_k n_{2k} \alpha_{2k} |\phi|^{2k} \phi = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\gamma = \frac{\omega_0}{c} \chi$ 为光纤损耗, $k_0 = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$, $k_0' = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}$ 为载波速度的倒数, $k_0'' = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}$

为光纤色散, $k_0''' = \left(\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}\right)_{\omega_0}$ 为高阶色散, σ 为模场半径,

$$\alpha_{mk} = \int_0^a |F(r)|^{2(k+1)} r dr / \int_0^a |F(r)|^2 r dr,$$

a 为纤芯半径.

对于阶跃光纤, $\rho(r) = 1$, 方程(9b)有解 $F(r) = J_m\left(\frac{u}{a} r\right)$, 若基模低阶非线性工作, $m = 0, k = 1, \alpha_{mk} = \alpha_{01}$, 基模下 u 的取值范围为 $0 < u < 2.405$, 随着 u 的减小, α_{01} 增大, 非线性增强, 其范围为 $0.57 < \alpha_{01} < 1.0$, 文献[3]将 α_{01} 取为 0.5 显然超出了基模运用范围.

对于梯度光纤, $\rho(r) = [1 - 2\Delta(r/a)^\alpha]^{1/2}$, 取抛物线分布 $\alpha = 2$, (9b) 式有解 $F(r) = \exp(-r^2 k_0 \sqrt{\Delta}/(\sqrt{2}a)) L_p^m(\sqrt{2\Delta k_0} r^2/a)$, L_p^m 为缔合 Laguerre 函数, 基模低阶非线性工作, $L_p^m = L_0 = 1, \alpha_{01} = [1 + \exp(-\sqrt{2\Delta a k_0})]/2$, 显然 α_{01} 是光纤结构的函数, a, Δ 愈大, α_{01} 愈小, 非线性愈弱, 产生稳态包络传输的阈值愈大, α_{01} 的取值范围为 $0.5 < \alpha < 1.0$.

方程(10)即为光纤非线性传输方程, 它描述了各阶非线性、各阶色散、损耗和横向不均匀性对孤子传输的影响, 具有丰富的物理内涵. 式中若 $n_{2k} = 0$, 方程退化为一般线性情况. 若 $r, k_0''' = 0$ 且第四与第六项异号且相等, 方程具有恒幅无畸变行波解. 可见它描述了光纤孤子的全部传输行为, 与以前文献给出的形式相比, 由于它适用于任意模式、任意阶非线性、任意折射率剖面光纤, 因此是一种普适形式.

对方程(10)做归一化变换

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{t - \rho(\sigma) k_0' z}{\tau}, \quad z' = \frac{\rho(\sigma) |k_0'| z}{\tau^2}, \\ V &= \tau \left(\frac{\alpha_{mk} k_0 n_{2k}}{n_0 \rho(\sigma) |k_0''|} \right)^{1/2} \phi, \quad \Gamma = \frac{\tau^2 \gamma}{\rho(\sigma) |k_0''|}, \\ H &= k_0''' / (6 |k_0''| \tau), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

可得归一化传输方程为

$$i \frac{\partial V}{\partial z'} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + \sum_k \left(\frac{k_0 \tau^2 \alpha_{mk} n_{2k}}{n_0 |k_0''| \rho(\sigma)} \right)^{1-k} |V|^{2k} V = iH \frac{\partial^3 V}{\partial T^3} - i\Gamma V, \quad (12)$$

式中 $k_0'' > 0$ 取“-”号, 反之取“+”号. 考察(12)式可见, 仅考虑低阶非线性 ($k = 1$) 时, 任何折射率剖面分布光纤都具有相同的归一化方程

$$i \frac{\partial V}{\partial z'} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + |V|^2 V = -i\Gamma V + iH \frac{\partial^3 V}{\partial T^3}. \quad (13)$$

考虑高阶非线性时, 阶跃光纤与梯度光纤的归一化方程中, 高阶非线性项相差一个因子 $(1/\rho(\sigma))^{1-k}$, 由于 $\rho(\sigma) < 1$, 因此梯度光纤中高阶非线性效应比阶跃光纤弱的多, 这是方程(12)所具有的一个新的含义.

二、能量、动量方程及小损耗解

以前文献给出的能量方程是不考虑高阶色散的能量方程, 即以 $H = 0$ 时的(13)式为基本方程推导得到, 而动量方程是以 $\Gamma, H = 0$ 时的(13)式为基本推导方程的^[4,5], 这里同时考虑损耗与高阶色散, 采用同样的方法, 可得能量与动量方程分别为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(z', T)|^2 dT = e^{-2\Gamma z} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(0, T)|^2 dT, \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{dV^*}{dT} dT = e^{-2\Gamma z} \int_{-\infty}^{+\infty} V(z' = 0, T) \frac{dV^*(z' = 0, T)}{dT} dT. \quad (15)$$

(14)式表明, 孤子能量变化与线性情况类似, 损耗使孤子能量随距离指数衰减, 因此远距离孤子通信中必须对孤子进行放大. (14)式与不考虑 H 时的能量方程形式相同, 但由于基本推导方程不同, 因而(14)式具有新的物理涵义, 即高阶色散不影响孤子能量的变化. (15)式与理想情况下的动量方程形式不同, 它表明孤子动量与能量一样按指数衰减, 同时高阶色散对孤子动量的变化也不产生影响.

在理想情况下, 方程(13)在异常色散区变为标准非线性 Schrödinger 方程, 利用逆散射法可得到基态孤子一般解为

$$V(z', T) = V_0 \operatorname{sech}[V_0(T - Uz') - \delta] \exp \left[i \left(UT + \frac{1}{2} (V_0^2 - U^2) z' + \theta \right) \right].$$

现设小损耗时具有如下解:

$$\left. \begin{aligned} V(z', T) &= V(z') \operatorname{sech}[V(z')(T - U(z')z') - \delta] \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i \left[U(z')T - \frac{1}{2} U^2(z')z' + \int_0^z \frac{V^2(z')}{2} dz' + \theta \right] \right\}, \\ U(z' = 0) &= U_0, \\ V(z' = 0) &= V_0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将其代入能量方程与动量方程可得

$$V(z') = V_0 e^{-2\Gamma z'}, \quad U(z') = U_0, \quad (17)$$

于是得到(13)式的小损耗解为

$$\begin{aligned} V(z', T) &= V_0 e^{-2\Gamma z'} \operatorname{sech}[V_0 e^{-2\Gamma z'}(T - U_0 z') - \delta] \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i \left[U_0 T - \frac{U_0^2}{2} z' + (1 - \exp(4\Gamma z')) V_0 / (8\Gamma) + \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

可见小 Γ 时, 孤子速度不变, 而孤子幅值与能量一样按 $e^{-2\Gamma z'}$ 衰减, 所以孤子脉宽必按 $e^{2\Gamma z'}$ 增大. 由(18)式可得孤子强度半高宽 $\text{FWHM} = 1.763 e^{2\Gamma z'} / V_0$.

由此得到一个推论, 小损耗光纤系统中, 损耗对孤子脉宽与幅值的影响正好相反, 因此孤子面积守恒, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(z', T) dT = \text{const}. \quad (19)$$

该结论表明, 在孤子放大的同时, 其形状将自动趋于恢复, 因此孤子通信中, 即使孤子幅值衰减到判决电平以下, 仍可由孤子放大得到正确检测.

三、数值解与孤子传输特性

虽然理想情况与小参数情况可对非线性传输方程进行解析近似求解, 但大多数情况特别是研究光源啁啾和孤子相互作用的影响时, 解析求解就不可能了, 因此本节将用数值法对孤子传输性质进行研究.

1. 计算方法

将(13)式等效为两方程和的形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} i \frac{\partial V}{\partial z'} + |V|^2 V &= 0, \\ \frac{1}{2} i \frac{\partial V}{\partial z'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} &= -i\Gamma H + iH \frac{\partial^2 V}{\partial T^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

采用分步 Fourier 变换的基本思想^[6], 对上式进行离散化操作, 得到数值解为

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{V}(z'_n, T) &= V(z'_{n-1}, T) \exp \left[2i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j |V(z'_{n-1}, T)|^2}{\partial z'^j} (\Delta z')^{j+1} \right], \\ V(z'_n, k) &= \frac{1}{N} \sum_{m, n'=-N/4}^{N/2-1} \tilde{V}(z'_n, n') \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{N} m(n' - k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\pi^2}{p^2} m^2 \left(1 - \frac{\pi}{p} m \right) - ip \right) \Delta z' \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

式中 p 为离散 Fourier 变换的半区间, $k = -\frac{N}{2}, -(\frac{N}{2} - 1), \dots, (N/2 - 1)$, N 为离散 Fourier 变换的点数; 式中 j 的大小根据 $(\Delta z')^{j+1}$ 与 $\partial^j |V(z'_{n-1}, T)|^2 / \partial z'^j$ 的大小适当选取, 单孤子传输, 孤子在传输中形状基本不变, 且步长 $\Delta z'$ 通常取的较小, 一般可忽略导数项, 计算多孤子传输时, 孤子序列在传输中可能会出现剧烈变化, 导数项可能较大, 可取 $j=1$, 导数以中心差分近似, 离散 Fourier 变换采用 FFT 法, 为了保证精度, 计算中步长逐次分半逼近^[7].

2. 损耗的影响

取 $V(z'=0, T) = V_0 \text{sech} T$ 为初始条件, $V_0 = 1$ 为标准基态孤子, $V_0 = 1.1-1.4$ 为非标准基态孤子, 计算结果如图 1 与图 2 所示.

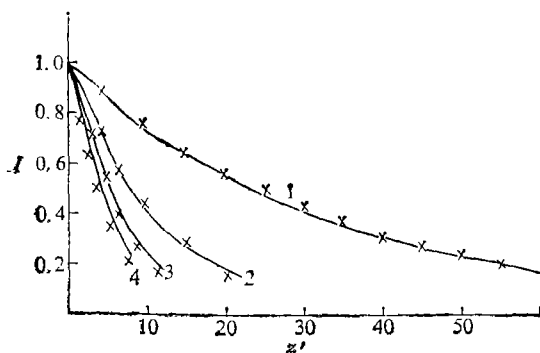


图 1 标准基态孤子的峰值强度 I 随 z' 的变化

($\times$ ——小损耗解析解; 1—— $\Gamma = 0.0073$,
2—— $\Gamma = 0.0218$, 3—— $\Gamma = 0.0364$,
4—— $\Gamma = 0.051$, $V_0 = 1$)

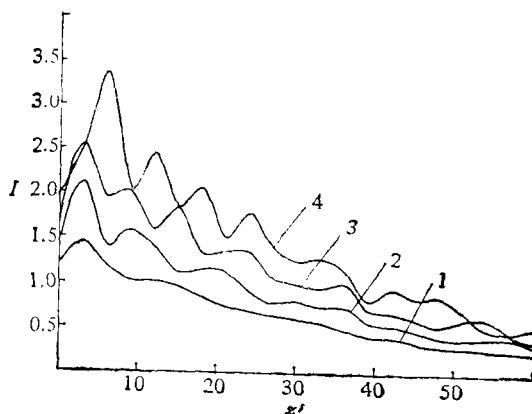


图 2 非标准基态孤子的峰值强度 I 值 z' 的变化

(1—— $V_0 = 1.1$, 2—— $V_0 = 1.2$,
3—— $V_0 = 1.3$, 4—— $V_0 = 1.4$;
 $\Gamma = 0.0073$)

可见

(1) $\Gamma < 0.036$ 时, 标准基态孤子数值解与解析解完全一致, 但 $\Gamma \geq 0.051$ 时, 数值解大

于解析解, Γ 愈大, 偏差愈大. 欲使解析解与数值解偏差 $\Delta I < 0.1$, 解析解的适用范围应限定在 $\Gamma < 0.09$, 即实际损耗 $\alpha < 0.783 |k_0''| / \tau^2$;

(2) 非标准基态孤子注入时, 孤子强度随距离波动衰减, 脉宽波动增大, V_0 愈大, 波动幅值愈大, 波动消失的距离愈长, 这表明小损耗解析解所描述的传输图象完全不适用于非标准基态孤子;

(3) 输入孤子幅值提高不大的情况下, 对于给定的判别电平, 非标准基态孤子传输距离可达到标准基态孤子传输距离的两倍以上.

文献[8]在利用和本文不同的方法(微扰法)给出了小损耗解时, 没有给出解适用的范围, 而非标准传输的研究也未见报道, 这里的计算给出了小损耗解的适用范围, 揭示了非标准基态孤子的传输图象, 给孤子系统设计带来了方便.

3. 光源啁啾的影响

已有文献研究了光源啁啾对标准基态孤子传输的影响^[9], 此处研究啁啾 Gauss 准孤子情况, 并与啁啾孤子传输进行比较. 设线性啁啾 Gauss 光源输出为

$$V(z' = 0, T) = c V_0 e^{-\frac{(V_0 T)^2}{\mu}} e^{-i \alpha_m T^2}, \quad (22)$$

式中 α_m 为啁啾强度, c, μ 为待定常数, 根据准孤子条件^[10], 可得 $c = 1.032$, $\mu = 1.497$. 考虑基态 $V_0 = 1$, 为清楚的反映啁啾对孤子传输的影响, 忽略高阶色散, 计算无损耗系统的情况. 计算结果由图 3 和图 4 给出.

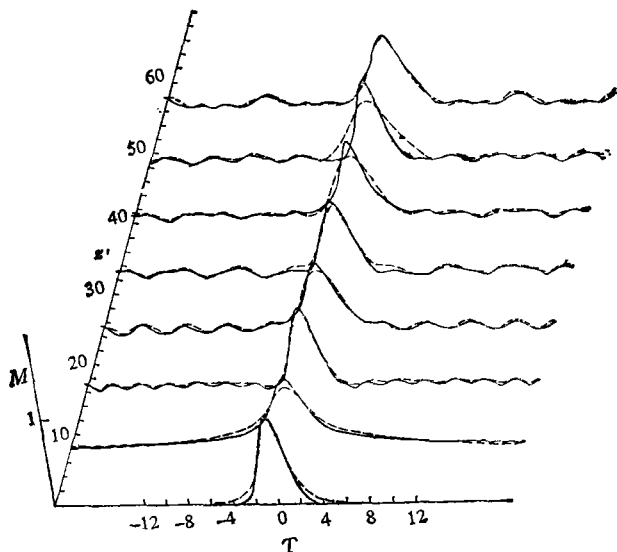


图3 啁啾对孤子传输的影响

($\alpha_m = -0.25$; 实线为啁啾 Gauss 准孤子, 虚线为啁啾孤子)

由图 3 可见, 啁啾使 Gauss 准孤子的幅值与脉宽均随距离变化, 且伴随有色散拖尾, 但这种变化和拖尾比一般啁啾孤子小, 因此 Gauss 准孤子注入更适宜孤子通信. 图 4 表明, 啁啾 Gauss 准孤子的幅值随距离波动减小, 逐渐演化为稳态波动脉冲, 波动幅值随 α_m 增大而增大, 但计算表明, 啁啾 Gauss 准孤子的波动比一般啁啾孤子的波动小, 且稳态脉冲幅值大, 因此, 在孤子通信中, 在接收机灵敏度一定, Gauss 准孤子的传输距离比一般孤子的要长.

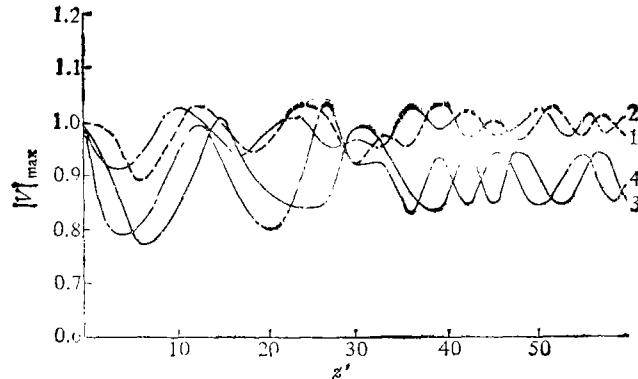


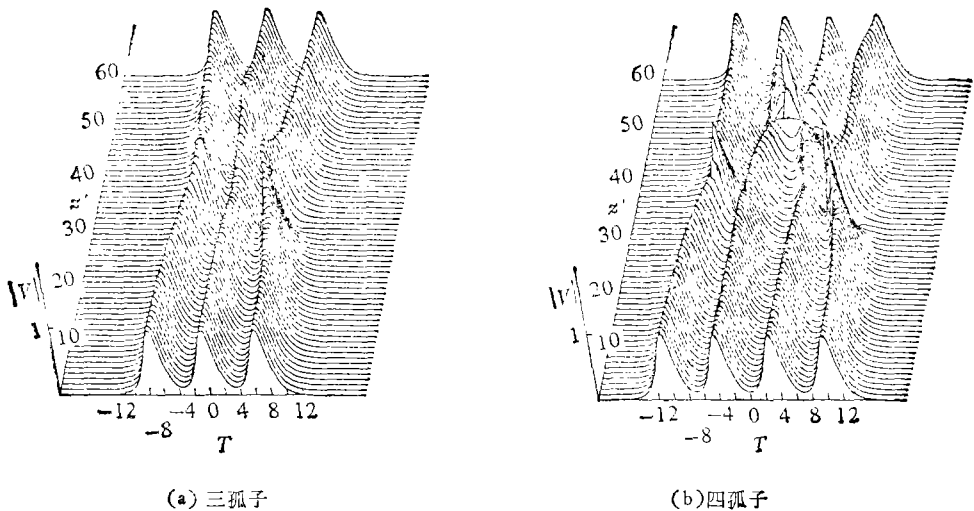
图4 啁啾 Gauss 准孤子的幅值随传输距离的变化

(1— $\alpha_m = -0.12$, 2— $\alpha_m = 0.12$, 3— $\alpha_m = -0.25$, 4— $\alpha_m = 0.25$)

现有的超快窄脉冲半导体激光器由于体积小、使用方便等优点,是孤子通信系统光源的理想选择,它的实际输出接近于啁啾 Gauss 脉冲,因此这里的计算为利用窄脉冲半导体激光器作为孤子通信系统的光源提供了依据。

4. 孤子相互作用的影响

孤子通信中,信息是以孤子脉冲序列出现的,许多文献分析了两孤子相互作用,此处研究多孤子相互作用时的传输特点。图5和图6给出计算结果。



(a) 三孤子

(b) 四孤子

图5 理想情况下 ($r, H, \alpha_m = 0$) 多孤子的传输图形(相邻孤子间隔 $\Delta T = 7$)

由图5可见,多孤子的传输图形与两孤子^[4]的明显不同。三孤子传输中相邻孤子间隔变化很小,孤子根本不发生重合现象,其互作用远小于两孤子;四孤子传输中,孤子组成了三对互作用,边上两对不发生重合现象,相互作用较小,中间一对产生完全重合,但重合发生时的传输距离较两孤子长,因此其互作用也小于二孤子。对更多个孤子传输的模拟表明,它们的互作用也小于二孤子。

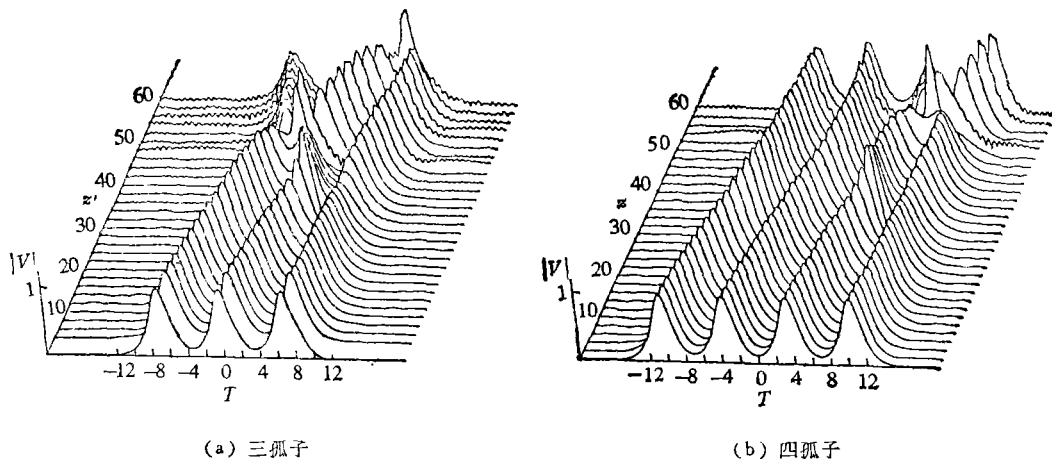


图 6 三阶色散 $H = 0.051$ 时的多孤子传输图形

此外计算表明,在理想情况下的非等幅孤子传输中,孤子互作用可完全消除,但考虑光纤损耗时 ($T \neq 0$),非等幅孤子传输将重新产生孤子互作用,导致孤子序列畸变。

在两孤子传输时,高阶色散具有扼制孤子互作用的效果^[12],但在多孤子情况下,由图 6 可见,高阶色散却使相互作用增强,甚至使孤子序列根本不能重现和无法正确检测,因此从二孤子的研究结果推论到多孤子是不能成立的,高阶色散不但不能用来消除孤子互作用,相反在实际孤子系统设计时应设法减小高阶色散。

此外,计算也指出,光源啁啾恶化多孤子互作用,使孤子序列发生不可恢复性畸变,以至无法检测^[13]。

四、结 论

1. 从 Maxwell 方程出发导出了适用于任意剖面结构光纤、任意光波模式的非线性传输方程,它是描述各阶非线性、各阶色散、横向不均匀性和光纤损耗等因素对孤子传输影响的一般完整表示;

2. 给出了基于一般非线性传输方程的能量动量方程,由此得到了小损耗解析解,运算简便,物理图象清楚;

3. 计算了各种初始注入条件下(标准基态孤子、啁啾 Gauss 准孤子、等幅及不等幅孤子序列),损耗、高阶色散、啁啾、相邻孤子对孤子传输特性的影响,得到了一些新的重要结果。对孤子传输中 Raman 散射和调制不稳定性的研究已另文发表^[14,15]。

林为干教授、吴鸿适教授对本工作的支持与鼓励作者表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Whitham, G. B., *Proc. Roy. Soc.*, A283(1965), 238.
- [2] Karpman, V. I. & Krushakal, E. M., *Zh. Eksp. Teor.*, 55(1968), 530.
- [3] Haseyawa, A. & Tuppert, F., *Appl. Phys. Lett.*, 23(1973), 142.
- [4] Lamb, G. R., *Elements of Soliton theory*, New York, 1980.

-
- [5] Nicholson, D. R. & Goldman, M. V., *Phys. Fluids*, 19(1976), 1621.
 - [6] Hardin, R. H. & Tapper, F. D., *SIAM Rev.*, 15(1989), 423.
 - [7] 杨祥林、赵阳,通信学报,10(1989),2: 64.
 - [8] Hasegawa, A. & Koclama, Y., *Proc. IEEE*, 69(1981), 1145.
 - [9] Desem, C. & Chu, P. L., *Opt. Lett.*, 11(1986), 249.
 - [10] Chu, P. L. & Desem, C., *Electro. Lett.*, 19(1983), 956.
 - [11] Hermansson, B. & Yevick, D., *ibid.*, 19(1983), 570.
 - [12] Desem, C. & Chu, P. L., *ibid.*, 23(1987), 260, 506.
 - [13] 杨祥林、赵阳, APMC 论文集, 1985.
 - [14] 赵阳、杨祥林,物理学报,38(1959),4: 541.
 - [15] 杨祥林、赵阳,物理学报,38(1989),5: 745.