

解椭圆型问题的无限元方法

应 隆 安

(北京大学数学系, 北京 100871)

摘 要

本文给了一个求解变系数椭圆型方程的无限元方法。在解具有奇性时可获得很准确的奇性数值解, 而且计算量小, 不需要事先知道方程解的奇性阶及特解的解析表达式。最后给了一个数值例子, 将它与有限元方法做了比较。

关键词: 无限元方法, 椭圆型方程, 奇性, 内边界

自从无限元方法问世以来, 它已应用到很多椭圆型问题上。首先有 Laplace 方程^[1]及线性弹性问题^[2], 后来又有 Stokes 方程^{[3], [4]}及 Helmholtz 方程^{[4], [5]}等。当这些方程的解在某些点具有奇性, 或者在无界区域上求解时, 用无限元方法都可以得到很准确的解。与求解同类问题的其他方法比较, 它有一个优点: 在求解时, 不需要知道方程的特解的解析表达式。因此, 当特解十分复杂, 很难写出解析表达式时, 它就显得特别有效。

以前的无限元方法有一个局限性, 它强烈地依赖于方程的一个性质: 在取定一个比例因子后, 作自变量的相似变换, 则方程不变。这样, 对于变系数问题, 或者方程有一些低阶项时, 应用无限元方法就有困难, 至少不能把无限阶代数方程精确地归结为一个有限阶问题。文献 [4] 中处理的 Helmholtz 方程是一个例外, 但那里的方法依赖于解对于一个参数的解析性, 不易推广, 计算时也不如原方法那样简洁。

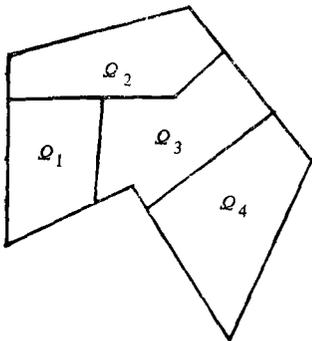


图 1

本文的目的是给出一个无限元方法, 它可用于一般的椭圆型方程。虽然在叙述时以一个二阶线性方程的 Dirichlet 边值问题为例, 但是这个方法也可以用于高阶方程。在求解非线性问题时, 每一步逼近只要是解一个线性问题, 也可以用本方法。本方法还有希望推广到求解发展型方程上去。

一、解的奇性

我们以一个凹角及内边界问题为例, 以 x 记平面 R^2 上的点, 设 Q 是 R^2 上一个多边形区域。在 Q 中又有有限条折线把它分割为有限个多边形子区域 Q_l , $l = 1, \dots, L$ (图 1)。设 $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq 2$, 是

本文 1990 年 8 月 11 日收到。

1) 应隆安、魏万明, 轴对称 Stokes 流的无限元逼近(二), 待发表。

$C^1(\bar{Q})$ 中函数, $a_{21}(x) = a_{12}(x)$, 满足椭圆型条件

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

其中常数 $\alpha > 0$, 设函数 $p(x)$ 在每一子区域 Q_l 上取正的常数值, 函数 $a_0(x)$ 在 Q 上有界、非负, $f \in L^2(Q)$. 考虑如下变分问题: 求 $u \in H_0^1(Q)$, 使

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} p \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 u v \right) dx = \int_Q f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(Q), \quad (1.1)$$

本文采用通常的 Sobolev 空间的记号, 即以 $H^1(Q)$, $H_0^1(Q)$ 记空间, 以 $\|\cdot\|$ 记范数. 由 Lax-Milgram 定理容易证明问题(1.1)有唯一解.

u 可能在以下各种点上有奇性: 内边界线交点、内边界线转折点、内边界线与区域边界 ∂Q 的交点、边界 ∂Q 上内角大于 π 的点. 在这些点附近, 解的一阶微商可能无界. 以后我们将这些点统称为奇点.

关于上述问题解的奇性, 如今理论已十分完整. 但是为了下面求解的需要, 我们用稍微不同的形式进行叙述.

人所共知, 解 u 在每一子区域 Q_l 上满足方程

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) p(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x) u = f(x), \quad (1.2)$$

在边界 ∂Q 上满足条件

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad (1.3)$$

在内边界上满足条件

$$\begin{cases} u \text{ 在内边界上连续,} \\ p \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \text{ 在内边界上连续,} \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 n_i 表示内边界上单位法向量的分量.

以 $x^{(m)}$, $m = 1, \dots, M$, 表示奇点, 我们以 $Q^{(m)}$ 表示包含 $x^{(m)}$ 且不包含其他奇点的一个邻域, 记 $Q^* = Q \setminus \bigcup_{m=1}^M \bar{Q}^{(m)}$, 则有

定理 1. u 在每一个 $Q^* \cap Q_l$ 上属于 H^2 , 在 $Q^{(m)}$ 上, $u = v + w$. $v \in H^1(Q^{(m)})$, 满足方程

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x^{(m)}) p(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (1.5)$$

以及与(1.3)式相应的边界条件. w 在每一个 $Q^{(m)} \cap Q_l$ 上属于 H^2 .

证. 我们用文献中的结果. 在文献[6]中已证 u 在 $Q^* \cap Q_l$ 上属于 H^2 . 下面在一个子区域 $Q^{(m)}$ 中讨论.

由文献[6], 只要适当取 $Q^{(m)}$, 就有一个一一的 C^1 映射 $F: x \rightarrow y$, 将 $Q^{(m)}$ 映为 y 平面上零点的一个邻域, $y(x^{(m)}) = 0$. F 在除了 $x^{(m)}$ 点以外属于 C^2 , 而且二阶导数一致有界. 每条由 $x^{(m)}$ 出发的内边界线与边界线都映为 y 平面上的直线. 在此变换下, $u(x(y)) = v_1(y) + w_1(y)$. $v_1 \in H^1$, 是方程

$$-\nabla(p(x(y))) \nabla v_1 = 0 \quad (1.6)$$

的弱解, $w_1(y)$ 在每个子区域上属于 H^2 .

令 $G: x \rightarrow y$ 为 F 在 $x^{(m)}$ 点的 Frechet 微商, 则因为 G 是线性映射, 它也映上述内边界线与边界线为直线, 并且在 $y = 0$ 处两族直线的斜率一致, 于是这些直线重合, 即映射 F 与 G 将 $Q^{(m)} \cap Q_l$ 映为相同的子区域.

由文献[6], 变换 F 将方程(1.2)在边界线及内边界线上变为方程(1.6), 由于变换 G 为上述变换的线性主要部分, 不难看出, 它将方程(1.5)在整个区域上变为方程(1.6). 于是函数 $v_1 \circ G$ 在 $Q^{(m)}$ 上满足方程(1.5). 因为 $w_1 \circ F$ 在每个子区域上都属于 H^2 , 为证明本定理, 我们只要证明, 在每个子区域上 $v_1 \circ F - v_1 \circ G$ 也属于 H^2 就够了.

由文献[6], 在极坐标下, v_1 是形如 $r^a \Theta(\theta)$ 的函数的有限和, 其中 $a < 1$, $\Theta(\theta)$ 是相应的 Sturm-Liouville 问题的解, 它是分段充分光滑的. 又因为 $v_1 \in H^1$, 所以 $a > 0$. 我们计算二阶微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_1(F(x)) &= \sum_{k,l} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial v_1}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_1(G(x)) &= \sum_{k,l} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_k \partial z_l} \frac{\partial z_k}{\partial x_i} \frac{\partial z_l}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

其中 $y = F(x)$, $z = G(x)$. 由 F 的光滑性

$$|y - z| \leq Cr^2, \quad \left| \frac{\partial y_k}{\partial x_i} - \frac{\partial z_k}{\partial x_i} \right| \leq Cr,$$

再利用 v_1 的表达式得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_k \partial y_l} \right| &\leq Cr^{a-2}, \quad \left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_k \partial z_l} \right| \leq Cr^{a-2}, \\ \left| \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_k \partial y_l} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_k \partial z_l} \right| &\leq Cr^{a-3} |y - z|. \end{aligned}$$

于是

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_1(F(x)) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_1(G(x)) \right| \leq Cr^{a-1}$$

它属于 L^2 . 定理证毕.

二、无限元方法

本节叙述求问题(1.1)数值解的无限元方法. 以线性三角形单元为例. 取每一个奇点的邻域 $Q^{(m)}$ 为多边形, 并且 $Q^{(m)}$ 关于 $x^{(m)}$ 点是星形的, 即联结 $Q^{(m)}$ 内每一点与 $x^{(m)}$ 的线段都整个地在 $Q^{(m)}$ 内. 以 $\partial Q^{(m)}$ 记 $Q^{(m)}$ 的边界. 在 $Q^{(m)}$ 中, 按照定理 1 的启发, 作两种剖分. 其一为无限元剖分, 它给出方程(1.5)的解 v 的一个近似, 其二为通常的有限元剖分, 它给出 w 的一个近似(图 2). 在 $Q^* = Q \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Q^{(m)}$ 上作通常的有限元剖分. 我们要求这些剖分互相协调, 即在 $\partial Q^{(m)}$ 上它们的节点是一致的. 在 $Q^{(m)}$ 上以两套网格的函数的和作为近似解.

关于无限元剖分, 很多论文中已有描述. 为完整起见, 重述如下: 取一个常数 $\xi \in (0, 1)$, 以 $x^{(m)}$ 为相似中心, 以 $\xi, \xi^2, \dots, \xi^k, \dots$ 为比例常数, 作 $\partial Q^{(m)}$ 的相似形. 于是 $Q^{(m)}$ 被分割为无限多“层”, 在每一层内作三角形剖分. 要求各层的剖分皆几何相似, 而且整个区域 $Q^{(m)}$ 的

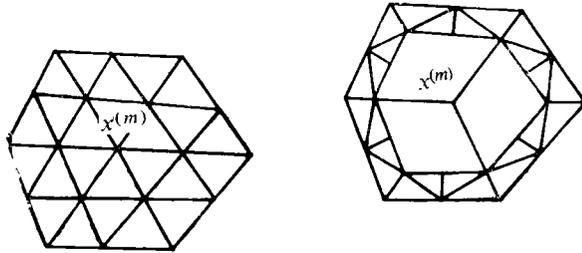


图 2

剖分是正规的。

以 y_0, \dots, y_k, \dots 记各多边形上节点值作成的向量, 则利用方程, 当 y_0 给定以后, y_1, \dots, y_k, \dots 都被它唯一确定。在计算中, 起关键作用的是两个矩阵。一个是组合刚度矩阵 K_x , 它是对称半正定的, 当 y_0 给定后, 在 $\Omega^{(m)}$ 上的“应变能”就是 $\frac{1}{2} y_0^T K_x y_0$, 其中 T 表示转置。另一个是转移矩阵 X , 它的作用表现在如下关系式中:

$$y_k = X^k y_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

已有很多工作研究了 K_x 与 X 的求法, 读者可以参看文献[2, 7, 8]。

对于 $\Omega^{(m)}$, 我们作两个 $H^1(\Omega^{(m)})$ 的有限维子空间 $V^{(m)}$ 与 $W^{(m)}$, $V^{(m)}$ 对应于无限元剖分, 其中节点值 y_0 为任意, $y_k, k = 1, 2, \dots$, 由(2.1)式确定, $W^{(m)}$ 是对应于有限元剖分的常规有限元子空间。在区域 Ω^* 上也作有限元子空间 U^* 。最后, 我们作 $H_0^1(\Omega)$ 的有限维子空间 U_h , 当 $u \in U_h$, 则 u 在 Ω^* 上的限制属于 U^* , 在 $\Omega^{(m)}$ 上, $u = v + w$, $v \in V^{(m)}$, $w \in W^{(m)}$ 。

无限元解 $u_h \in U_h$ 满足

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} p \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 u_h v \right) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in U_h. \quad (2.2)$$

容易证明, 它也有唯一解。

下面证明无限元方法的收敛性。为此, 引进加权的 Sobolev 空间。令

$$\zeta(x) = \prod_{m=1}^M |x - x^{(m)}|.$$

空间 $H^{2(\sigma)}(\Omega)$ ($\sigma < 2$) 的定义为

$$\left\{ u; \|u\|_{2(\sigma), \Omega} = \left[\|u\|_{1, \Omega}^2 + \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_l} \zeta^{2-\sigma} |\partial^2 u|^2 dx \right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

其中 $|\partial^2 u| = \sum_{\alpha+\beta=2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \right|$ 。

设有一族剖分, 它们的单元最大直径 h 趋于零, 并且区域 $\Omega^{(m)}$ 与剖分无关。我们假设剖分是正规的, 即所有单元内角有公共下界 $\theta_0 > 0$ 。以 C 记通用常数, 则有

定理 2. 在上述假设条件下, 无限元解的误差有如下估计:

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq Ch \|f\|_{0, \Omega}. \quad (2.3)$$

证. 首先我们证明, 对于问题(1.1)的解 u , 存在 $\sigma \in (0, 2)$, 使

$$\|u\|_{2(\sigma), \Omega} \leq C \|f\|_{0, \Omega}, \quad (2.4)$$

并且在每个区域 $Q^{(m)}$ 上,由定理 1 确定的函数 w 满足

$$\|w\|_{2,Q^{(m)} \cap Q_l} \leq C \|f\|_{0,Q}. \quad (2.5)$$

先证明(2.4)式. 由文献[6], $u = v_1 + w_1$,其中 w_1 满足

$$\|w_1\|_{2,Q_l} \leq C \|f\|_{0,Q}, \quad (2.6)$$

因此我们只要估计 v_1 . 按文献[6], v_1 属于一有限维空间,并且

$$\|Lv_1\|_{0,Q} \leq C \|f\|_{0,Q}, \quad (2.7)$$

其中 L 是由问题 (1.1) 确定的二阶椭圆型算子. 在每一个奇点处, v_1 的二阶导数有奇性阶 $|x - x^{(m)}|^{-2}$,因此只要取 $0 < \sigma < 2a$,就有 $v_1 \in H^{2,\sigma}(\Omega)$. 又,有限维空间上范数皆等价,所以从(2.7)式得

$$\|v_1\|_{2(\sigma),\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.8)$$

于是(2.4)式已经得到了证明. 我们再证明(2.5)式. 由定理 1, w 由两部分组成,其中一部分为 w_1 ,它的估计已由(2.6)式给出,另一部分为 $v_1 \circ F - v_1 \circ G$,由(2.8)式得

$$\|v_1 \circ F - v_1 \circ G\|_{0,Q^{(m)}} \leq C \|v_1\|_{2(\sigma),\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega}.$$

但 v_1 属于有限维空间,由有限维空间上范数的等价性即得

$$\|v_1 \circ F - v_1 \circ G\|_{2,Q^{(m)} \cap Q_l} \leq C \|f\|_{0,\Omega}.$$

(2.5)式也已经得到了证明.

我们在 $W^{(m)}$ 中作 w 的插值函数 w_I ,则有^[9]

$$\|w - w_I\|_{1,W^{(m)} \cap Q_l} \leq Ch \|w\|_{2,Q^{(m)} \cap Q_l}. \quad (2.9)$$

再在 $\partial Q^{(m)}$ 上作 v 的插值函数,得到一个节点值向量 y_0 ,然后利用(2.1)式确定 y_k ,于是可得一函数 $v_I \in V^{(m)}$. 在文献[10]中已经证明

$$\|v - v_I\|_{1,Q^{(m)}} \leq Ch \|v\|_{2(\sigma),Q^{(m)}}. \quad (2.10)$$

令 $u_I = v_I + w_I$. 在 Q^* 上也作插值函数 u_I ,也有

$$\|u - u_I\|_{1,Q^*} \leq Ch \|u\|_{2,Q^*}. \quad (2.11)$$

不难看出, $u_I \in U_h$,由(2.4),(2.5),(2.9)-(2.11)式得

$$\|u - u_I\|_{1,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.12)$$

无限元方法的抽象误差估计与有限元方法一样^[9]

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v \in U_h} \|u - v\|_{1,\Omega}. \quad (2.13)$$

合并(2.12),(2.13)式即得(2.3)式. 证毕.

对于 L^2 模,还有如下估计:

定理 3. 在定理 2 的条件下,有

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.14)$$

它的证明方法是经典的对偶分析^[9],并且利用估计式(2.4),(2.5),此处从略.

三、刚度矩阵的计算

在求解(2.2)式时,一般需要计算一些数值积分. 有些被积函数不是光滑的,甚至不是连续的,在奇点附近还是无界的. 因此,能否准确地计算这些积分,是无限元方法的一个重要问题.

为叙述方便，我们仅讨论(2.2)式的主要部分

$$\int_{\Omega^{(m)}} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} p \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad u, v \in V^{(m)} + W^{(m)}.$$

它又可以分解为四种情况：

- (a) $u \in V^{(m)}, v \in V^{(m)}$; (b) $u \in V^{(m)}, v \in W^{(m)}$;
- (c) $u \in W^{(m)}, v \in V^{(m)}$; (d) $u \in W^{(m)}, v \in W^{(m)}$.

我们逐一说明它们的计算方法。对于(a)，可以写成

$$\int_{\Omega^{(m)}} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x^{(m)}) p \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega^{(m)}} \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(x) - a_{ij}(x^{(m)})) p \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

其中第一项就是组合刚度矩阵 K_x ，它的计算方法是已知的。第二项中有一个因子 $a_{ij}(x) - a_{ij}(x^{(m)})$ ，它使被积函数在 $\Omega^{(m)}$ 上有界。可以用通常的数值积分公式。对于(b)，由于 $v \in W^{(m)}$ ，可以按有限元剖分的单元逐一计算，以 K 记一个单元，则由 Green 公式得

$$\begin{aligned} & \int_K \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} p \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= - \int_K \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} p u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial K} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} p u n_i \frac{\partial v}{\partial x_j} ds, \end{aligned}$$

其中我们利用了 $p, \frac{\partial v}{\partial x_j}$ 均为常值。右端两个积分的被积函数都是连续有界的，可以用通常的数值积分公式。(c)与(b)是一样的，由对称性，可以不计算。(d)就是通常的有限元方法的刚度矩阵计算。计算单元刚度矩阵时，因为 a_{ij} 是光滑的，区域形状也很简单，用少许几个点即可得很精确的结果。

四、数值例子

我们在一个 L 形区域上(图 3)求下列边值问题的数值解：

$$\begin{aligned} -\nabla(a(x)\nabla u) &= f, \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned}$$

以 (r, θ) 记极坐标，取 $a(x) = 1 + \frac{r^2}{8}$ ，则 $-\nabla(a(x)\nabla) = -\Delta$ 。再取 $u = r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \theta +$

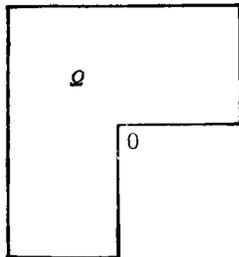


图 3

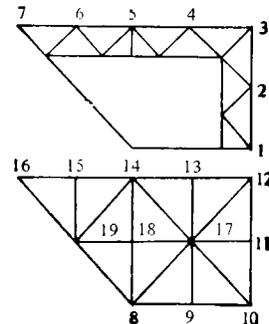


图 4

$\frac{1}{8} x_1^2 x_2^2$, 其中第一项是 Laplace 方程的一个奇性解, 它在零点的邻边上等于零, 当 $r \rightarrow 0$, 它的微商与 $r^{-\frac{1}{2}}$ 同阶. 第二项是我们有意识地添加上去的, 使 u 不是 Laplace 方程的解. 这时

$$f = -\frac{1}{6} r^{\frac{2}{3}} \cos \frac{4\theta}{3} - \frac{r^2}{4} \left(1 + \frac{r^2}{8}\right) - \frac{x_1^2 x_2^2}{8}.$$

由对称性, 只需计算 Ω 的一半. 我们作无限元与有限元两套网格如图 4, 其中取 $\xi = 0.7$. 我们在 SX-386 微机进行了计算, 得到无限元解为(按节点顺序):

$$\begin{aligned} &0, 0.1796, 0.3838, 0.3822, 0.4440, \\ &0.5505, 0.7052, 0, 0, 0, \\ &0.1793, 0.3712, 0.3739, 0.4200, 0.5333, \\ &0.6797, 0.1900, 0.2562, 0.4018 \end{aligned}$$

把两套网格上的解迭加以后, 在 17, 18, 19 三点与精确解比较, 误差为(精确解减近似解):

$$0.0018, 0.0046, -0.0173$$

精确解的变化区间为 $\left[0, 2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{8}\right] = [0, 1.3849]$. 将最大误差与最大模比, 相对误差仅 1.2% 左右. 在误差最大的第 19 节点处, 精确解为 $2^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{128} = 0.8015$, 局部的相对误差也仅 2% 左右. 注意到我们计算时仅用了 19 个节点, 这个精度是很高的.

在计算数值积分时, 用梯形公式逐次加密的办法, 控制误差为 10^{-4} , 控制迭代次数为 7 次. 这样, 仍然有一些积分的误差没有达到 10^{-4} , 最大的误差为 1.89×10^{-3} . 如果数值积分的计算进一步精确化, 解的精度还可望进一步提高.

为了作出对比, 用图 4 的有限元网格同时作了计算. 由于解有奇性, 网格又十分粗, 在 17, 18, 19 三点的误差很大, 甚至达到与解同样的数量级, 分别为

$$-0.1188, -0.0116, -0.00251.$$

最大的相对误差达 62%. 按相对误差比较, 无限元方法在这三点上的精度约为有限元方法的 31 倍.

参 考 文 献

- [1] Thatcher, R. W., *Numer. Math.*, 25(1976), 163--178.
- [2] 应隆安, *中国科学*, 1977, 6: 517--535.
- [3] Ying, L. A., *J. Comp. Math.*, 4(1986), 2: 111--120.
- [4] ———, *Proceedings of the China-France Symposium on FEM*, Science Press, Beijing, China, Gordon and Breach, Science Publishers Inc., New York, 1983, 542--565.
- [5] ———, *J. Comp. Math.*, 1(1983), 2: 130--142.
- [6] Kellogg, R. B., *Singularities in Interface Problems, Numerical Solution of Partial Differential Equations—11*, Academic Press, New York, London, 1971, 351--400.
- [7] 韩厚德、应隆安, *计算数学*, 1(1979), 1: 91--99.
- [8] 许进超、应隆安, 同上, 8(1986), 2: 164--174.
- [9] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.
- [10] 应隆安, *应用数学学报*, 2(1979), 2: 149--166.