



小展弦比超声速机翼颤振的形状敏度解析分析

杨超, 杨佑绪*, 吴志刚

北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

* E-mail: zgdy_1@163.com

收稿日期: 2012-02-27; 接受日期: 2012-05-17

国家自然科学基金(批准号: 91116005, 10902006)资助项目

摘要 颤振形状敏度指出颤振边界随机翼形状变化的移动情况. 由于气动弹性系统质量、刚度和阻尼矩阵和形状设计变量的非线性函数关系, 采用有限差分法计算颤振形状敏度耗费巨大, 且准确性较低. 本文提出一种颤振形状敏度的解析计算方法, 考虑的变量主要包括展弦比、梢根比、机翼面积和后掠角. 利用等效板模型, 并结合一阶活塞理论求解结构质量、刚度和气动矩阵关于设计变量的解析导数. 在颤振求解中采用状态空间形式运动方程, 通过跟踪气动弹性极点在复平面的轨迹确定颤振速度. 利用 Lancaster 伴随法求得特征值敏度和颤振解析形状敏度. 基于解析敏度, 利用线性 Taylor 近似预测基本设计点附近颤振速度随着形状变量的变化情况. 通过和重新分析比较发现: 本文方法能够准确预测翼面形状基本设计点附近的颤振速度, 但对机翼面积和后掠角适用范围有限. 利用颤振解析形状敏度, 设计人员能在早期阶段在兼顾颤振特性的情况下进行翼面形状设计.

关键词

颤振
形状敏度
等效板模型
活塞理论
翼面设计

对于现代飞行器, 不论是从强度、控制还是性能的角度, 柔性都成为设计人员关心的话题. 为了说明柔性对结构、气动和控制的影响, 可靠的气动弹性敏度求解成为关键.

根据机翼设计变量类型的不同, 一般将敏度分为尺寸、形状(构型)和拓扑 3 种. 尺寸类型设计变量主要有蒙皮厚度、梁/肋的横截面积、气动面弯度、控制系统增益、传递函数的系数等; 形状设计变量有展弦比、梢根比、前缘后掠角、机翼面积, 传递函数的阶次等; 拓扑设计变量包括梁/肋数量, 前后缘舵面的数量等.

颤振是由于弹性结构和气流的相互作用, 最终导致结构灾难性破坏的不稳定自激振动现象^[1]. 颤振形状敏度指出了颤振边界随形状参数变化的移动情

况. 在翼面早期设计阶段, 借助于它设计人员可以避免大量的重复分析, 从而缩短设计周期, 降低设计成本; 同时, 敏度技术是基于梯度概念的现代飞行器优化设计的基础.

颤振敏度是响应值敏度中较难的问题^[2], 颤振形状敏度更是如此.

敏度的求解方法主要有有限差分法, 解析方法和介于两者之间的半解析方法. 在翼面结构分析中, 结构的刚度和质量矩阵都是尺寸设计变量的线性函数, 但却是形状设计变量的非线性函数^[3], 差分法不能得到准确的形状敏度; 同时, 在差分敏度计算中, 需要计算不同参数时的结构质量、刚度矩阵以及气动矩阵, 甚至需要重新划分计算网格、控制网格变形等. 若采用差分法计算形状敏度, 计算耗费过于巨大; 另

外, 差分灵敏度的准确性易受所选步长的影响. 当步长较大时, 容易产生截断误差; 步长过小又易产生舍去误差^[4].

国内, 大量的研究者在从事气动弹性优化设计^[5, 6]. 高萍等研究了翼面结构/颤振主动控制律一体化设计, 采用了颤振速度关于尺寸类型设计变量的解析灵敏度^[7]. 林梦鹤等人^[2]推导了气动弹性剪裁中结构响应灵敏度的解析表达式, 设计变量考虑了复合材料结构的铺设角. 刘湘宁等人^[8]在考虑结构几何非线性和气动非线性的基础上, 推导了大展弦比复合材料机翼颤振特性关于复合材料铺设角的灵敏度. 由前述可以看出, 国内的灵敏度研究主要集中于尺寸类型灵敏度的求解, 并未涉及形状灵敏度并且由于采用有限元结构模型, 气动弹性系统矩阵关于设计变量的导数都是通过有限差分法求解.

国外对翼面形状灵敏度进行了大量的研究. Kapania 等人^[9]计算了颤振速度关于形状设计变量的解析灵敏度, 但解析只限于气动部分, 采用有限差分法计算结构矩阵的形状灵敏度. Livne^[10]采用解析方法求得机翼位移、应力和固有频率关于形状设计变量的解析灵敏度. Livne 等人^[11]采用完全解析的方法计算了超音速壁板颤振动压关于形状和尺寸设计变量的灵敏度. 但壁板结构简单, 并没有将此方法推广应用到复杂翼面结构. 在国外上述研究中, 虽然均采用 Lancaster 的伴随法求解特征值灵敏度. 但实际上特征值灵敏度的求解依赖于结构质量、刚度以及气动刚度和阻尼矩阵关于设计变量的灵敏度, 而求解此类系统矩阵灵敏度都是基于有限差分法进行的.

本文采用一阶活塞理论^[12]非定常气动力计算方法, 并结合等效板结构计算模型^[13-16], 求解真实翼面结构关于形状设计变量完全解析的颤振灵敏度, 并基于解析灵敏度, 利用线性 Taylor 近似预测基本设计点附近构型的颤振速度, 最终通过和重新分析结果比较, 研究解析颤振形状灵敏度的准确性和适用性.

1 翼面模型几何描述

为了求得气动和结构矩阵关于形状变量的解析灵敏度, 对翼面构型形状进行参数化是必要的.

1.1 翼面参数化

对翼面结构作以下简化: 整个翼面采用一个翼

型; 梁的数量及弦向无量纲站位给定; 肋的数量及展向无量纲站位给定; 按肋的位置将梁切分为多段, 近似认为每段梁的上下边缘曲线为直线方程, 并且 z 只随 y 变化, 而与 x 无关; 按基本翼型上点的位置将肋切分为多段, 近似认为每段的上下边缘曲线为直线;

这样在给定上面的参数后, 只需要 4 个形状参数就可以唯一确定整个翼面的几何结构, 它们是展弦比 λ (本文展弦比实际上指半展弦比)、梢根比 τ 、机翼面积 A 和前缘后掠角 Λ . 也可以用另外一组参数代替, 即展长 s , 根弦长 r , 梢弦长 t , 前缘后掠角 Λ . 它们之间的转化关系为

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\lambda A}, \\ t &= 2\tau s / \lambda (1 + \tau), \\ r &= 2s / \lambda (1 + \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

将肋从翼根到翼梢依次编号为 $1, \dots, n_rib$; 将梁从翼面前缘到后缘依次编号为 $1, \dots, n_spar$; 翼型上的点按先上后下, 从前缘向后缘依次编号 $1, \dots, n$. 其中 n_rib 是肋的数量; n_spar 是梁的数量; n 是定义翼型的离散数据点的数量.

翼面在 x - y 平面上的俯视图如图 1 所示.

以第 (i, j) 块蒙皮为研究对象(蒙皮上由第 $i, i-1$ 个梁以及第 $j, j+1$ 个肋围成的区域)其前后缘直线方程为

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_{i-1}(t-r) + sk}{s} y + p_{i-1}r, \\ x &= \frac{p_i(t-r) + sk}{s} y + p_i r, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 p_{i-1} 和 p_i 分别表示第 $i-1$ 和 i 根梁在单位翼型上的无量纲弦向站位; k 是 Λ 的正切值.

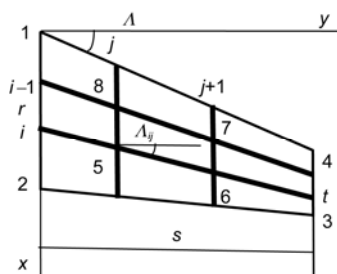


图 1 翼面结构俯视图

以第 i 个梁的第 j 段(第 i 个梁上第 j 和第 $j+1$ 个肋之间的部分)为研究对象, 其后掠角的正切为

$$\tan A_{ij} = \frac{p_i(t-r)}{s} + k. \quad (3)$$

根据假设, 其上或下凸缘的直线方程为

$$z = \frac{(t-r)z_i}{s} y + rz_i. \quad (4)$$

第 j 个肋的第 i 段(第 j 个肋上第 i 与 $i-1$ 个梁之间部分), 若 $i=1$, 则指肋的第一个梁和前缘之间的部分. 根据假设, 其上或下缘直线方程为

$$z = \frac{z_i - z_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} x - \frac{z_i - z_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} (p_i C_j + q_j s k) + C_j z_i, \quad (5)$$

其中 $C_j = r + q_j(t-r)$, 表示第 j 个肋的弦长, q_j 和 q_{j+1} 分别表示第 j 和 $j+1$ 根肋的无量纲展向站位. z_{i-1} 和 z_i 分别表示基本翼型在第 $i-1$ 和 i 根梁所在站位处的高度.

方程(2)~(5)都是关于形状设计变量的函数, 在计算结构的刚度和质量矩阵的过程中他们可作为积分的边界, 这样就使结构矩阵的每个元素都是关于形状设计变量的函数.

1.2 等效板模型

在相对厚度不是很大的情况下, 翼面结构和板的力学行为相似, 可以用一块或者多块板来等效翼面结构.

本文的等效板模型基于一阶剪切变形板理论 FSDT(first-order shear deformation plate theory), 即 Reissner-Mindlin 理论^[17, 18], 具体地可写为下面形式:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ 和 $w(x, y, z, t)$ 分别为板上任意点在 x , y 和 z 方向上的位移; $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$ 和 $w_0(x, y, t)$ 分别为板中性面上任意点在 x , y 和 z 方向上的平动位移; $\phi_x(x, y, t)$ 和 $\phi_y(x, y, t)$ 分别为中性面的法线在板变形过程中绕 y 和 x 轴的旋转位移.

使用全局 Ritz 法

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \mathbf{a}_1^T \mathbf{q}_1(t), \quad v_0(x, y, t) = \mathbf{a}_2^T \mathbf{q}_2(t), \\ \phi_x(x, y, t) &= \mathbf{a}_3^T \mathbf{q}_3(t), \quad \phi_y(x, y, t) = \mathbf{a}_4^T \mathbf{q}_4(t), \\ w_0(x, y, t) &= \mathbf{a}_5^T \mathbf{q}_5(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{a}_i^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad \dots], \quad (8)$$

多项式矢量 $\mathbf{a}_i$ 是采用的 Ritz 基底, $\mathbf{a}_i$ 可以是不同的维数. $\mathbf{q}_i$ 是对应于 $\mathbf{a}_i$ 的广义坐标. 由非保守系统的 Lagrange 方程可以得到机翼各个典型组件的刚度和质量矩阵:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = Q_j, \quad (9)$$

其中 T 和 U 分别表示动能和势能; q_j 表示第 j 个广义坐标; Q_j 是对应于 q_j 的非保守广义力, 通过计算虚功得到, 对应于虚功表达式中虚位移的系数.

等效板详细的公式推导见文献[15, 16].

通过 1.1 和 1.2 节的方法得到的机翼结构的质量和刚度矩阵均为 4 个形状设计变量的函数. 它们的任一元素均可写为下面形式:

$$\mathbf{M}(i, j) = f_M(k, t, r, s), \quad \mathbf{K}(i, j) = f_K(k, t, r, s), \quad (10)$$

它们均是简单多项式函数, 这使得解析地求解结构矩阵的导数成为可能. 其详细形式见附录.

2 颤振形状敏感度

2.1 基于活塞理论的广义非定常气动力

下面采用虚功原理推导广义非定常气动力.

根据虚功原理,

$$\delta W = \iint \delta w(x, y, t) \cdot \Delta p(x, y) dx dy, \quad (11)$$

其中 δW 为虚功; $\Delta p(x, y)$ 为升力面上 (x, y) 处的压强; $w(x, y, t)$ 为翼面上任意点处的 z 向位移.

采用 5 阶 Ritz 基函数, 即

$$w(x, y, t) = \mathbf{a}_5^T \mathbf{q}_5(t) = \mathbf{a}_5^T \mathbf{T} \mathbf{q}(t), \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{a}_5^T(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 \quad x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5];$$

$q_5(t)$ 是对应于 a_5 的广义坐标列矢量;

$$q^T = [q_1^T \ q_2^T \ q_3^T \ q_4^T \ q_5^T]; \quad T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I];$$

0 是 21×21 的全 0 行矢量; I 是 21×21 的全 1 行矢量. 结合(11)和(12)式得

$$\delta W = \iint a_5^T T \cdot \Delta p(x, y) dx dy \cdot \delta q(t). \quad (13)$$

由于 $Q_i = \delta W / \delta q_i$, 所以

$$Q = \iint T^T a_5 \cdot \Delta p(x, y) dx dy. \quad (14)$$

活塞理论是一种无粘非定常气动力计算方法, 已被成功运用于超音速和高超音速气动弹性分析中. 作为一种简化的气动力方法, 在马赫数 $2 \sim 5$ 之间用它对超音速翼面进行颤振计算, 能够得到满足工程精度要求的结果^[12].

活塞理论认为在 $M \gg 1$ 时, 扰动沿着物面的法向传播, 正如活塞运动一样. 一阶活塞理论^[12]写为

$$\Delta p(x, y) = -2\rho_\infty c_\infty \left(V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, y, t), \quad (15)$$

其中 ρ_∞ 是给定飞行高度的大气密度; c_∞ 是远前方声速; V 是飞行速度.

将(15)式代入(14)式得

$$Q = -2\rho_\infty c_\infty V_\infty Q_{\text{stiff}} q - 2\rho_\infty c_\infty Q_{\text{damp}} \dot{q}, \quad (16)$$

其中

$$Q_{\text{stiff}} = \iint T^T a_5 a_{5,x}^T T dx dy, \quad (17)$$

$$Q_{\text{damp}} = \iint T^T a_5 a_5^T T dx dy, \quad a_{5,x}^T = \frac{\partial a_5^T}{\partial x},$$

Q_{stiff} 和 Q_{damp} 分别是气动刚度和阻尼矩阵, 正如(10)式, 任一矩阵元素可写为

$$Q_{\text{stiff}}(i, j) = f_{\text{stiff}}(k, t, r, s), \quad (18)$$

$$Q_{\text{damp}}(i, j) = f_{\text{damp}}(k, t, r, s),$$

它们的具体形式见附录.

2.2 颤振方程求解

典型颤振分析方程^[12]为

$$M\ddot{q} + Kq = Q, \quad (19)$$

其中 q 是对应于 Ritz 基函数的广义坐标; Q 是广义气动力. M , K 和 Q 都是采用等效板模型计算得到.

将(16)式代入(19)式得

$$M\ddot{q} + 2\rho_\infty \frac{V}{M} Q_{\text{damp}} \dot{q} + \left(K + 2\rho_\infty \frac{V^2}{M} Q_{\text{stiff}} \right) q = 0, \quad (20)$$

记为

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q = 0, \quad (21)$$

其中 M 是自由流马赫数.

这里需要说明的是, 在方程(20)建立的过程中, 没有考虑结构阻尼.

令 $x_1 = q(t)$, $x_2 = \dot{q}(t)$, 得

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{K} & -\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

记为广义特征值问题 $Ux = \lambda Vx$, 这样一个二阶特征值问题就转化为一阶问题, 只是系统矩阵的阶数增加一倍. 假设 $x = \phi e^{\lambda t}$, 这样得到

$$U\phi = \lambda V\phi, \quad (23)$$

其对应的伴随问题为 $\psi^T U = \lambda \psi^T V$. ψ 和 ϕ 分别左右特征矢量; λ 是广义特征值.

在给定马赫数的情况下, 逐渐增加飞行速度(相当于以恒定的马赫数飞行, 同时飞行高度不断降低), 跟踪气动弹性极点在复平面的运动轨迹确定颤振点.

2.3 形状敏感度求解

根据伴随法^[19]得到特征值敏感度

$$\frac{\partial \lambda}{\partial P} = \frac{\psi^T \left[\frac{\partial U}{\partial DV} - \lambda \frac{\partial V}{\partial DV} \right] \phi}{\psi^T V \phi}, \quad (24)$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial \bar{K}}{\partial DV} & -\frac{\partial \bar{C}}{\partial DV} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial V}{\partial P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{M}}{\partial DV} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

可见, 特征值的敏感度依赖于单个矩阵关于设计变量的敏感度, 特征矢量和特征值.

将特征值写为 $\lambda = \sigma + i\omega$, 实部 σ 和虚部 ω 是飞行速度 V , 马赫数 M 和设计变量 P 的函数.

翼面在颤振点处, 特征值的实部始终为零, 不受设计变量的影响, 即

$$\frac{d\sigma}{dP} = \frac{\partial \sigma}{\partial P} + \frac{\partial \sigma}{\partial V_{\text{flutter}}} \frac{dV_{\text{flutter}}}{dP} = 0, \quad (26)$$

所以

$$\frac{dV_{\text{flutter}}}{dP} = -\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial P}}{\frac{\partial \sigma}{\partial V_{\text{flutter}}}} = -\frac{\text{Re}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial P}\right)}{\text{Re}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial V_{\text{flutter}}}\right)}, \quad (27)$$

$\frac{\partial \lambda}{\partial V_{\text{flutter}}}$ 通过计算 $\left. \frac{\partial \lambda}{\partial V} \right|_{V=V_{\text{flutter}}}$ 得到.

其中

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \lambda}{\partial V} \right|_{V=V_{\text{flutter}}} &= \frac{\psi^T \left[\frac{\partial U}{\partial V} - \lambda \frac{\partial V}{\partial V} \right] \phi}{\psi^T V \phi}, \\ \frac{\partial U}{\partial V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \bar{K}}{\partial V} & -\frac{\partial \bar{C}}{\partial V} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial V}{\partial V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (28)$$

λ , ψ , ϕ 和 V 等项均是基本构型处的变量, 通过求解特征值的主和伴随问题得到. 本文采用解析方法计算 $\partial \bar{K} / \partial P$, $\partial \bar{C} / \partial P$, $\partial \bar{M} / \partial P$, $\partial \bar{K} / \partial V$ 和 $\partial \bar{C} / \partial V$.

3 算例分析

采用一个薄的尖前缘梯形机翼作为算例, 如图 2 所示, 分别沿弦向和展向均匀布置 5 个梁和 6 个肋; 采用菱形翼型, 其相对厚度为 2.5%. 基本构型为: 展弦比 $\lambda = 0.5$, 梢根比为 $\tau = 0.4$, 前缘后掠角约 $\Lambda = 54^\circ$, 机翼面积 $A = 2.25 \text{ m}^2$.

本文作者已在文献[15, 16]中利用等效板模型准确计算翼面结构动力学和颤振特性, 这里不再和有限元计算结果进行对比.

3.1 结构动力学分析

在振动分析中, 机翼根部固支. 前四阶模态的振型和频率如图 3 所示.

3.2 基本设计点处的颤振计算

从(27)式可以看出, 首先需要求解基本构型的颤振速度和颤振频率.

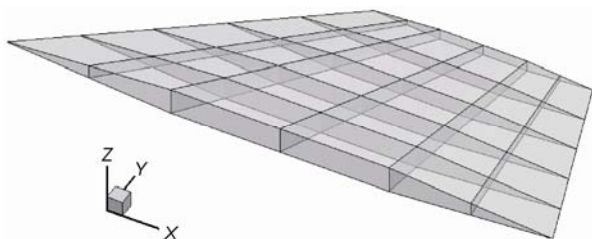


图 2 翼面结构图

基本设计点处机翼的根轨迹曲线见图 4. 在气动力计算中, 飞行 M 设定为 3.0. 从图中可以看出, 随着飞行速度的逐渐增大, 第一阶模态率先穿越, 穿越点速度为 1099 m/s, 频率为 188.68 Hz.

3.3 基本设计点处的颤振形状敏感

颤振速度关于 4 个形状设计变量的敏感度见表 1, 其中长度单位是 m, 角度单位采用度.

利用表 1 中基本设计点处的解析敏感度, 并结合一阶泰勒近似, 得到基本设计点附近状态点的颤振速度, 并和重新分析进行了比较, 详见图 5~8(图中的黑点表示基本设计点). 这里的重新分析指改变某一形状设计变量, 而其余 3 个变量保持不变进行颤振分析.

机翼面积是和翼载荷直接相关的设计参数, 一般在飞机的概念设计阶段确定. 图 5 表示了颤振速度随着机翼面积的变化曲线. 基于解析敏感度的线性

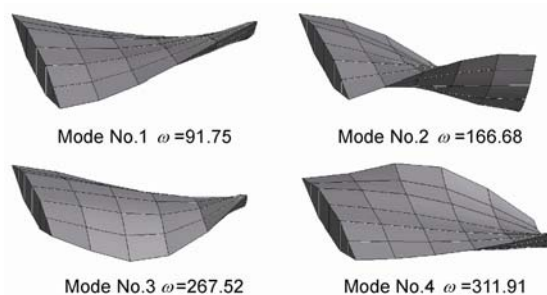


图 3 机翼的振型和频率 ω (Hz)

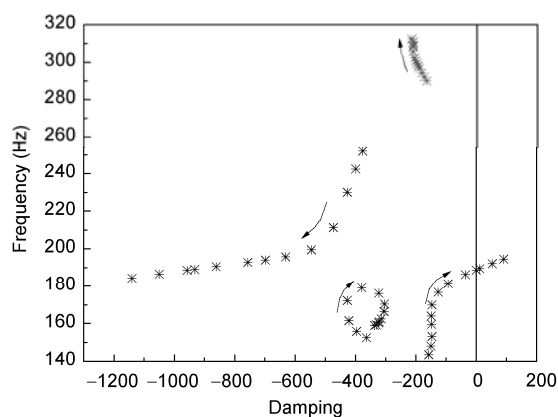


图 4 根轨迹图

表 1 颤振解析形状敏感度

	A	λ	τ	Λ
Shape sensitivities	-98.01	-31.02	1044.44	23.70

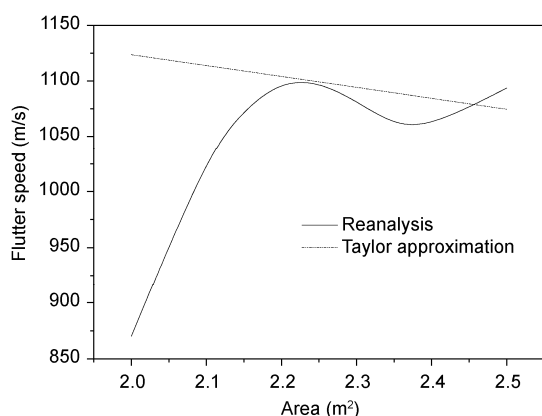


图5 颤振速度随机翼面积的变化

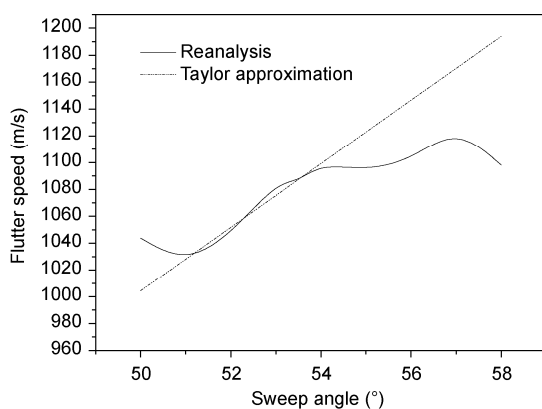


图6 颤振速度随后掠角的变化

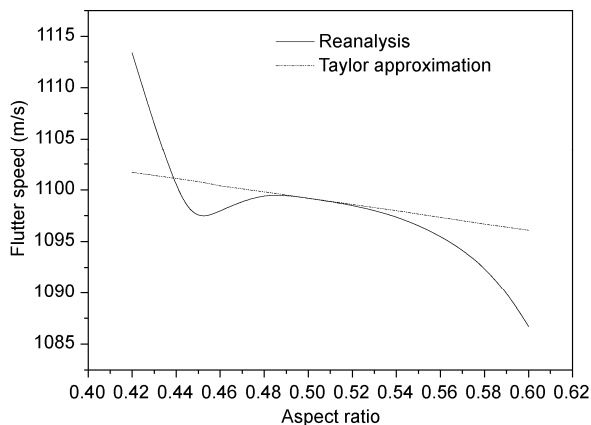


图7 颤振速度随展弦比的变化

Taylor 近似只对面积的微小变化有效. 在机翼面积为 2.0~2.1 区间, 线性近似严重背离实际颤振速度, 这主要是由于颤振形式的改变引起的.

后掠角、展弦比和梢根比是和飞机的巡航状态密

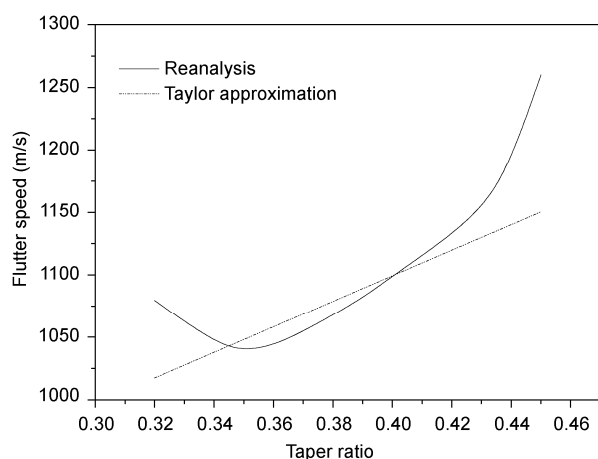


图8 颤振速度随梢根比的变化

切相关的设计变量, 一般在初步设计阶段确定.

从图6可以看出, 线性 Taylor 近似在后掠角 $51^\circ \sim 54^\circ$ 是准确的, 但在 $56^\circ \sim 58^\circ$ 出现明显的偏差. 但总的来说, 在 $51^\circ \sim 57^\circ$ 范围内, 随着后掠角的增大, 颤振速度不断增加, 这和文献[20]的结论是一致的. 文献[20]通过试验测试了展弦比和后掠角对机翼颤振特性的影响.

从图7和8可以看出, 利用颤振解析敏感度能够准确预测设计点附近的颤振速度随形状设计变量的变化, 并且适用范围较大.

在图5~8中, 颤振敏感度值都非常接近重新分析曲线在基本设计点处的斜率, 这表明解析敏感度是准确的, 因为精确的敏感度值就是真实的变化曲线的斜率. 但是, 采用基于解析敏感度的线性 Taylor 近似来预测颤振特性随设计变量的变化, 对于不同的形状设计变量, 其适用范围不同, 尤其对于后掠角和机翼面积, 适用范围较小. 这可能是由于翼面颤振速度随后掠角和面积的非线性变化特性较强, 用一阶 Taylor 级数难以近似真实特性.

4 结论

1) 基于等效板模型和活塞理论求得真实翼面的颤振速度关于形状设计变量的解析敏感度, 该方法有效可行.

2) 利用解析形状敏感度的 Taylor 线性近似能准确预测基本设计点附近的颤振速度, 但对于后掠角和机翼面积的变化, 适用的设计变量变化范围有限.

附录 结构和气动矩阵及其导数矩阵的多项式形式

整个机翼结构的刚度和质量矩阵通过将其典型组件的对应矩阵叠加得到.

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_{\text{skin}} + \sum \mathbf{K}_{\text{spar}}^{\text{cap}} + \sum \mathbf{K}_{\text{spar}}^{\text{web}} + \sum \mathbf{K}_{\text{rib}}^{\text{cap}} + \sum \mathbf{K}_{\text{rib}}^{\text{web}} + \sum \mathbf{K}_{\text{spring}}, \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_{\text{skin}} + \sum \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{cap}} + \sum \mathbf{M}_{\text{sp}}^{\text{web}} + \sum \mathbf{M}_{\text{rib}}^{\text{cap}} + \sum \mathbf{M}_{\text{rib}}^{\text{web}}, \quad (\text{A2})$$

其中下标 skin, rib 和 spar 分别表示蒙皮、肋和梁的矩阵; 上标 cap 和 web 分别表示凸缘(或长桁)和腹板矩阵. 由于本文的 Ritz 多项式阶次选为 5, 所以这些矩阵都是维数为 105 的对称阵. 它们的每个单元的都是形状设计变量的多项式函数. 为了简化, 这里只给出蒙皮矩阵的第二行第二列元素

$$\mathbf{K}_{\text{skin}}(2, 2) = \frac{cEs}{-2(1-\nu^2)}(-q_i + q_{i+1}) \times [2p_i r - 2p_{i+1} r + (q_i + q_{i+1})(p_i - p_{i+1})(-r + t)], \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{M}_{\text{skin}}(2, 2) = \frac{cds}{12[ks + p_i(t-r)]} \left\{ [kq_{i+1}s + p_{i+1}(r - q_{i+1}r + q_{i+1}t)]^4 - [kq_i s + p_i(r - q_i r + q_i t)]^4 \right\}$$

$$-\frac{cds}{12[ks + p_i(t-r)]} \times \left\{ [kq_{i+1}s + p_i(r - q_{i+1}r + q_{i+1}t)]^4 - [kq_i s + p_i(r - q_i r + q_i t)]^4 \right\}, \quad (\text{A4})$$

其中 c 表示蒙皮的厚度; E 是弹性模量; ν 是泊松比; d 是材料密度. 它们都是尺寸类型设计变量, 很明显, 它们和结构矩阵是线性函数关系.

另外, 给出气动阻尼和刚度矩阵第 86 行第 86 列的元素

$$\mathbf{Q}_{\text{stiff}}(86, 86) = \frac{1}{6}s \left\{ -k^2 s^2 + \frac{-r^3 + [r + (ks + t - r)^3]}{ks + t - r} \right\}, \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{Q}_{\text{damping}}(86, 86) = \frac{1}{12}s \left\{ -k^3 s^3 + \frac{-r^4 + [r + (ks + t - r)^4]}{ks + t - r} \right\}. \quad (\text{A6})$$

从(A1)~(A6)式可以看出, 结构和气动矩阵的任一元素都是形状设计变量的简单多项式形式, 很容易推导它们的导数矩阵. 这里不再列出具体的形式.

参考文献

- Wright J R, Cooper J E. Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2007. 167–200
- 林梦鹤, 孙宪学. 气动弹性剪裁中的响应值敏感度. 航空学报, 2001, 22: 31–34
- Youhua L, Kapania M. Modal response of trapezoidal wing structures using second order shape sensitivities. AIAA J, 2000, 38: 732–735
- Haftka R T, Gurdal Z. Elements of Structural Optimization. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992. 255–304
- 吕斌, 谭申刚, 万志强, 等. T 型尾翼气动弹性优化设计. 北京航空航天大学学报, 2007, 33: 409–413
- 吴强, 万志强, 杨超. 考虑结构动力学与颤振约束的颤振缩比模型优化设计. 航空学报, 2011, 32: 1210–1216
- 高萍, 管德. 翼面结构/颤振主动控制律一体化设计. 航空学报, 1995, 16: 521–527
- 刘湘宁, 向锦武. 大展弦比柔性复合材料机翼的气动弹性剪裁. 北京航空航天大学学报, 2006, 32: 1403–1407
- Singhvi S, Kapania R K. Shape sensitivities and approximation of modal response of laminated skew plates. J Aircraft, 1993
- Livne E. Analytical sensitivities for shape optimization in equivalent plate structural models. J Aircraft, 1994, 31: 961–969
- Livne E, Mineau D. Panel flutter constraints: analytic sensitivities and approximations including planform shape design variables. J Aircraft, 1997, 34: 558–568
- 陈桂彬, 邹丛青, 杨超. 气动弹性设计基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004
- Giles G L. Equivalent plate analysis of aircraft wing box structures with general planform geometry. J Aircraft, 1986, 23: 859–864
- Livne E. Equivalent plate structural modeling for wing shape optimization including transverse shear. AIAA J, 1994, 32: 1278–1288
- 杨佑绪, 吴志刚, 杨超. 基于等效板模型的弹翼颤振分析. 航空学报, 2011, 32: 833–840
- 杨佑绪, 吴志刚, 杨超, 等. 一种面向翼面设计的气动弹性分析模型. 航空学报, 2011, 32: 1860–1868
- Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Mech, 1945, 12: A69–A77
- Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J Appl Mech, 1951, 18: 31–38
- Murthy D V, Haftka R T. Survey of methods for calculating sensitivity of general eigenproblems. NASA CP-2457, 1987
- Molyneux W G, Hall H. The aerodynamic effects of aspect ratio and sweepback on wing flutter. ARC R&M 3011, 1955