



结构和系统动力学与控制专刊

Volterra 级数与摄动法的内在关系研究

彭志科*, 孟光, 张文明

上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240

*联系人, E-mail: z.peng@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-08-24; 接受日期: 2012-10-23

国家杰出青年科学基金(编号: 11125209)、国家创新研究群体科学基金(编号: 51121063)和国家自然科学基金(批准号: 10902068)资助项目

摘要 摄动法是求解弱非线性方程的经典定量方法之一, 而 Volterra 级数是一种可表征弱非线性系统的经典数学模型. 研究表明, 对于受迫多项式非线性系统, 只有当其线性派生系统是阻尼耗散系统, 由对系统输入进行小参数摄动求得的稳态输出响应才和由 Volterra 级数给出的解完全一致. 结论意味着: Volterra 级数并不能表示任意的多项式非线性系统, 而仅适合表征线性派生系统是阻尼耗散系统的多项式非线性系统.

关键词 Volterra 级数, 摄动法, 多项式非线性系统, 派生线性系统

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Jh, 43.40.Ga

doi: 10.1360/132012-723

源于计算天体运动的摄动法最早由 Poisson 提出, 它的基本思想就是在线性系统的解基础上加一个小的摄动量来逼近非线性系统的解, 也称小参数法. 由摄动法求得的解是一个关于小参数的渐近级数, 只有当小参数很小时该级数才是收敛的, 因此, 摄动法只适用于弱非线性系统. 并且, 用原始摄动法求解非线性系统响应时, 如果其线性派生系统是保守系统时, 可能会出现永期项, 从而导致解发散. 为了克服该问题, 人们提出一些改进的摄动法^[1], 如 L-P 法、多尺度法和 KBM 法等. 如今, 摄动法广泛地应用于各种领域的非线性问题求解, 如电子工程^[2]、机械工程^[3]和流体力学^[4]等.

Volterra 级数是一种可表征非线性系统的数学模

型, 它是线性系统的一维卷积理论在多维空间上的推广^[5]. 对一大类在零点附近做稳定运动的非线性系统, 特别是多项式非线性系统, Volterra 级数都可进行很好地描述, 对非线性系统一些所特有的现象进行解释. Volterra 级数核的傅里叶变换常称为广义频率响应函数, 是线性系统中的频率响应函数在非线性系统中的自然推广. 给定多项式非线性系统的运动方程或离散模型, 可用 Billings 等人^[6]提出的算法依次计算出各阶广义频率函数. 由于其无穷级数的本质, Volterra 级数受到收敛问题的困扰, 因此, 像摄动法一样, 它也只能处理弱非线性问题. Peng 和 Lang 等人^[7]证明, 当 Volterra 级数收敛时, 它给出的解是另一种常用的非线性问题求解方法——谐波平衡法

引用格式: 彭志科, 孟光, 张文明. Volterra 级数与摄动法的内在关系研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 494–499

Peng Z K, Meng G, Zhang W M. A study about the relationship between the Volterra series and the perturbation method (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 494–499, doi: 10.1360/132012-723

的一个解. 现在, Volterra 级数广泛地应用于神经科学^[8]、空气动力学^[9]、电子工程^[10]和机械工程^[11]等领域中的非线性问题研究.

从不同的角度, 摄动法和 Volterra 级数都能为一大类弱非线性系统给出近似解, 其中前者属于数值计算方法而后者属于函数逼近方法. 那么这两者之间是否存在内在联系或相似性呢? 对此问题, 已有人做了初步研究, Vannucci 等人^[12]的研究表明, 对于非线性薛定谔方程原始摄动法和 Volterra 级数给出的解是完全一致的; 在研究模拟集成电路的非线性失真问题时, Buonomo 和 Schiavo^[2]发现这两种方法会给出完全相同的解. 本文将研究原始摄动法和 Volterra 级数在多项式非线性系统分析中的内在关系.

1 多项式非线性系统与 Volterra 级数模型

根据 Weierstrass 逼近理论^[13], 在封闭且有界区间上, 任何连续函数都能用一组多项式来对其进行任意精度的一致逼近, 因此多项式非线性系统实际上可表示一大类非线性系统. 受迫多项式不变非线性系统可表示为以下通用形式:

$$\sum_{z=1}^Z \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^P c_p(l_1, \dots, l_p) \prod_{i=1}^p D^{l_i} y(t) = u(t). \quad (1)$$

其中, $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别是系统输出响应和输入, 微分算子 D 定义为 $D^l y = d^l y / dt^l$, Z 是多项式最高阶次, P 是最大微分阶次. 对该类非线性系统, 稳态输出响应与输入之间的关系在时域可用 Volterra 级数^[5]表示为

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t), \\ y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{cases} \quad (2)$$

其中, $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 是第 n 阶 Volterra 核. 基于上式, Lang 和 Billings^[14]推导出了系统输出与输入之间在频域的关系式, 如下:

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\Omega), \\ Y_n(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega_1 + \dots + \Omega_n = \Omega} H_n(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \\ \times \prod_{i=1}^n U(\Omega_i) d\Omega_1 \dots d\Omega_n. \end{cases} \quad (3)$$

该关系式揭示了非线性机制如何作用在系统输入频

谱上以产生系统输出响应谱. 在式(3)中, $Y(\Omega)$ 和 $Y_n(\Omega)$ 分别是系统输出响应 y 和第 n 阶输出响应 y_n 的频谱, 并且

$$\begin{aligned} H_n(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-j(\Omega_1 \tau_1 + \dots + \Omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \end{aligned} \quad (4)$$

是第 n 阶广义频率响应函数(GFRF), 定义为第 n 阶 Volterra 核的 n 维傅里叶变换. 式(3)是线性系统中输出和输入之间的简单关系 $Y(\Omega) = H(\Omega)U(\Omega)$ 在非线性系统中的自然推广, 这里 $H(\Omega)$ 表示线性系统的频率响应函数.

根据由 Billings 等人^[6]提出的递归算法, 对方程(1)所描述的非线性系统, 其广义频率响应函数可确定如下:

$$\begin{aligned} H_n(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \\ = - \frac{\sum_{p=2}^n \sum_{l_1, \dots, l_p=0}^P c_p(l_1, \dots, l_p) H_{np}(\Omega_1, \dots, \Omega_n)}{n! \left[\sum_{l_1=0}^P c_1(l_1) (j\Omega_1 + \dots + j\Omega_n)^{l_1} \right]}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{\sum_{l_1=0}^P c_1(l_1) (j\Omega)^{l_1}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H_{np}(\cdot) &= \sum_{i=1}^{n-p+1} i! H_i(\Omega_1, \dots, \Omega_i) \\ &\times H_{n-i, p-1}(\Omega_{i+1}, \dots, \Omega_n) (j\Omega_1 + \dots + j\Omega_i)^{l_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$H_{n1}(\Omega_1, \dots, \Omega_n) = n! H_n(\Omega_1, \dots, \Omega_n) (j\Omega_1 + \dots + j\Omega_n)^{l_1}. \quad (8)$$

例如, 对如下的非线性振子

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + k_2 y^2(t) + k_3 y^3(t) = u(t), \quad (9)$$

应用方程(5)–(8), 可求得前 3 阶广义频率响应函数, 如下:

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{-m\Omega^2 + jc\Omega + k}, \quad (10)$$

$$H_2(\Omega_1, \Omega_2) = -k_2 H_1(\Omega_1) H_1(\Omega_2) H_1(\Omega_1 + \Omega_2), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \\ = -H_1(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) \times \left\{ \frac{2}{3} k_2 [H_1(\Omega_1) H_2(\Omega_2, \Omega_3) \right. \\ \left. + H_1(\Omega_2) H_2(\Omega_1, \Omega_3) + H_1(\Omega_3) H_2(\Omega_1, \Omega_2)] \right. \\ \left. + k_3 H_1(\Omega_1) H_1(\Omega_2) H_1(\Omega_3) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

2 摄动法

在应用摄动法时, 这里考虑对系统输入 $u(t)$ 进行小参数摄动, 这时非线性系统(1)常写成如下形式:

$$\sum_{i=0}^P c_i(l_i) D^{l_i} y(t) + N_Z(D^0 y(t), \dots, D^P y(t)) = \varepsilon u(t). \quad (13)$$

其中, $N_Z(\cdot)$ 是关于 $D^0 y(t), \dots, D^P y(t)$ 的 Z 次多项式函数, ε 是小参数. 在摄动法中, 先将非线性系统式(13)的解展开成为关于 ε 的幂级数, 即

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}_0(t) + \varepsilon \bar{y}_1(t) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(t) + \varepsilon^3 \bar{y}_3(t) + \dots \quad (14)$$

其中, $\bar{y}_i(t) (i=0, 1, 2, 3, \dots)$ 是和 ε 无关的函数. 将式(14)代入方程(13), 那么方程(13)左边同样可表示为一个关于 ε 的幂级数, 而方程(13)的右边可看作是 ε 的 1 阶幂级数. 根据幂级数表示唯一性原理, 方程两端 ε 同次幂的系数必须相等, 由此得到如下方程组.

$$\varepsilon^0: \sum_{i=0}^P c_i(l_i) D^{l_i} \bar{y}_0(t) = 0, \quad (15)$$

$$\varepsilon^1: \sum_{i=0}^P c_i(l_i) D^{l_i} \bar{y}_1(t) + \Psi_0(Y_0(t)) = u(t), \quad (16)$$

$$\varepsilon^2: \sum_{i=0}^P c_i(l_i) D^{l_i} \bar{y}_2(t) + \Psi_1(Y_0(t), Y_1(t)) = 0, \quad (17)$$

$$\varepsilon^3: \sum_{i=0}^P c_i(l_i) D^{l_i} \bar{y}_3(t) + \Psi_2(Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t)) = 0. \quad (18)$$

.....

其中, $Y_i(t) = \{D^0 \bar{y}_i(t), \dots, D^P \bar{y}_i(t)\} (i=0, 1, 2, \dots)$, Ψ_i 为多项式函数, 其具体形式取决于方程(13)中的 $N_Z(\cdot)$. 依次求解上述方程, 可分别确定 $\bar{y}_1(t)$, $\bar{y}_2(t)$, $\bar{y}_3(t)$, $\dots$, 进而求解得到原非线性系统的输出响应 $y(t)$. 在上述方程组中, 方程(15)常被称为原非线性方程的派生方程, 这是我们熟知的线性方程. 根据线性系统理论, 如果派生方程(15)所描述的派生系统是个阻尼耗散系统, 则其稳态响应为 0, 即 $\bar{y}_0(t)=0$, 也就是 $Y_0(t)=0$, 这使得该类非线性系统的稳态响应求解相对简单. 如对非线性振子(9), 利用摄动法求解其稳态响应时, 可简化为求解如下方程组:

$$m\ddot{\bar{y}}_1(t) + c\dot{\bar{y}}_1(t) + k\bar{y}_1(t) = u(t), \quad (19)$$

$$m\ddot{\bar{y}}_2(t) + c\dot{\bar{y}}_2(t) + k\bar{y}_2(t) = -k_2 \bar{y}_1^2(t), \quad (20)$$

$$m\ddot{\bar{y}}_3(t) + c\dot{\bar{y}}_3(t) + k\bar{y}_3(t) = -2k_2 \bar{y}_1(t) \bar{y}_2(t) - k_3 \bar{y}_1^3(t), \quad (21)$$

.....

值得一提的是, 摄动法有多种应用方式, 可以仅对非线性项进行小参数摄动, 也可经对系统输入进行摄动, 也可同时对非线性项和系统输入进行摄动, 这里选择第二种应用方法.

3 Volterra 级数与摄动法间的关系分析

根据前面描述, 对于受迫的多项式非线性系统, 其稳态输出响应和系统输入之间的关系可用 Volterra 级数来描述. 而类似地, 摄动法也可用来求解非线性方程得到输出响应, 那么这两种方法之间存在何种关系呢? 该问题答案可描述为如下命题.

命题 对于一个受迫多项式非线性系统, 如果其线性派生系统是阻尼耗散系统, 则由对系统输入进行小参数摄动求得的稳态输出响应和由 Volterra 级数给出的解是完全一致的.

为方便起见, 先不对该命题进行数学证明, 而只是以非线性振子式(9)为示例进行说明. 显然, 对方程(19), 稳态时 $\bar{y}_1(t)$ 和 $u(t)$ 间的关系在频域可表示为

$$\bar{Y}_1(\Omega) = \frac{U(\Omega)}{-m\Omega^2 + jc\Omega + k} = \bar{H}_1(\Omega)U(\Omega). \quad (22)$$

其中, $\bar{Y}_1(\Omega)$ 是 $\bar{y}_1(t)$ 的傅里叶谱, 下述的 $\bar{Y}_2(\Omega)$ 和 $\bar{Y}_3(\Omega)$ 分别为 $\bar{y}_2(t)$ 和 $\bar{y}_3(t)$ 的傅里叶谱. 显然, $\bar{H}_1(\Omega) = H_1(\Omega)$, 从而 $\bar{Y}_1(\Omega) = Y_1(\Omega)$, 即 $\bar{y}_1(t) = y_1(t)$. 因此, 由摄动法求得的 $\bar{y}_1(t)$ 与由 Volterra 级数给出的 $y_1(t)$ 完全相等.

同样, 由方程(20)可知, 在频域 $\bar{y}_2(t)$ 可表示为

$$\bar{Y}_2(\Omega) = -k_2 H_1(\Omega) \mathcal{F}[\bar{y}_1^2(t)]. \quad (23)$$

其中, $\mathcal{F}[\cdot]$ 表示傅里叶变换. 并且利用傅里叶变换乘积性质, 可得

$$\mathcal{F}[\bar{y}_1^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{Y}_1(\omega) \bar{Y}_1(\Omega - \omega) d\omega. \quad (24)$$

记 $\Omega_1 = \omega$ 和 $\Omega_2 = \Omega - \omega$, 则方程(24)可写为

$$\mathcal{F}[\bar{y}_1^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega} \bar{Y}_1(\Omega_1) \bar{Y}_1(\Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (25)$$

式(22)和式(25)代入方程(23), 并利用上述 $\bar{H}_1(\Omega) = H_1(\Omega)$ 的结论, 得到

$$\bar{Y}_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega} -k_2 \bar{H}_1(\Omega_1 + \Omega_2) \bar{H}_1(\Omega_1)$$

$$\begin{aligned} & \times \bar{H}_1(\Omega_2)U(\Omega_1)U(\Omega_2)d\Omega_1d\Omega_2 \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1+\Omega_2=\Omega} \bar{H}_2(\Omega_1, \Omega_2)U(\Omega_1)U(\Omega_2)d\Omega_1d\Omega_2. \quad (26) \end{aligned}$$

显然, $\bar{H}_2(\Omega)=H_2(\Omega)$, 从而 $\bar{Y}_2(\Omega)=Y_2(\Omega)$, 也即 $\bar{y}_2(t)=y_2(t)$. 因此, 由摄动法求得的 $\bar{y}_2(t)$ 与由 Volterra 级数给出的 $y_2(t)$ 完全相等.

类似地, 由方程(21)可知

$$\bar{Y}_3(\Omega) = -H_1(\Omega) \left(2k_2 \mathcal{F}[\bar{y}_1(t)\bar{y}_2(t)] + k_3 \mathcal{F}[\bar{y}_1^3(t)] \right). \quad (27)$$

同样利用傅里叶变换乘积性质, 可得

$$\begin{aligned} \bar{Y}_3(\Omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3=\Omega} \bar{H}_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^3 U(\Omega_i) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3. \quad (28) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{H}_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) &= -H_1(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) \\ &\quad \times [2k_2 H_1(\Omega_1)H_2(\Omega_2, \Omega_3) \\ &\quad + k_3 H_1(\Omega_1)H_1(\Omega_2)H_1(\Omega_3)]. \quad (29) \end{aligned}$$

将 $\bar{H}_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 重写成关于 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 的对称形式, 如下:

$$\begin{aligned} \bar{H}_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) &= -H_1(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) \left\{ \frac{2}{3} k_2 [H_1(\Omega_1)H_2(\Omega_2, \Omega_3) \right. \\ &\quad + H_1(\Omega_2)H_2(\Omega_1, \Omega_3) + H_1(\Omega_3)H_2(\Omega_1, \Omega_2)] \\ &\quad \left. + k_3 H_1(\Omega_1)H_1(\Omega_2)H_1(\Omega_3) \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

易见, $\bar{H}_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)=H_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, 从而 $\bar{Y}_3(\Omega)=Y_3(\Omega)$, 也即 $\bar{y}_3(t)=y_3(t)$.

类似地, 可依次证明, 对于非线性振子式(9), $\bar{y}_i(t)=y_i(t)(i=1, 2, 3, \cdots)$. 换言之, 系统输入进行小参数摄动求得的稳态输出响应和由 Volterra 级数给出的解是完全一致的.

实际上, 应用幂级数展开唯一性原理, 可更为直观简单地从数学上证明该命题. 对于一般的多项式非线性系统, 根据 Volterra 级数理论, 当输入为 $\varepsilon u(t)$ 时, 由公式(2)可知, 其系统输出是关于参数 ε 的幂级数, 并且其最小幂次是 1, 如下:

$$y(t) = \varepsilon^1 y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \varepsilon^3 y_3(t) + \cdots. \quad (31)$$

而按照摄动法, 其稳态解也可展开为关于小参数 ε 幂

级数: $y(t)=\varepsilon^0 \bar{y}_0(t)+\varepsilon^1 \bar{y}_1(t)+\varepsilon^2 \bar{y}_2(t)+\cdots$. 根据幂级数展开唯一性, 按 Volterra 级数展开的幂级数和由摄动法求得的幂级数的同次幂系数必须相等, 即 $\bar{y}_0(t)=0$, $\bar{y}_i(t)=y_i(t)(i=1, 2, 3, \cdots)$. 而要使稳态时 $\bar{y}_0(t)=0$, 则该非线性系统的线性派生系统必须是阻尼耗散系统. 另外, 如果其线性派生系统不是阻尼耗散系统, 即便是其初始条件为 0, 即 $\bar{y}_0(t)=0$, 方程(19)的稳态解在频域仍不能由方程(22)得到, 会出现周期为线性派生系统固有频率的分量.

该命题实际上意味着, Volterra 级数并不能表示任意的多项式非线性系统, 而仅适合于表示线性派生系统是阻尼耗散系统的多项式非线性系统.

4 数值验证

本节将通过非线性振子式(9)的数值仿真来验证前面所得到的结论. 显然, 当振子式(9)的线性阻尼项系数 c 为正时, 那么它的线性派生系统就是阻尼耗散系统; 而当 c 为 0, 则其线性派生系统为保守系统. 数值仿真中, 除 c 外, 系统其他参数取值: $m=1 \text{ kg}$; $k=2526.62 \text{ N/m}$; $k_2=1.28 \times 10^5 \text{ N/m}^2$; $k_3=1.61 \times 10^8 \text{ N/m}^3$; $u=\sin(4\pi t)$. 这时, 线性派生系统的固有频率为 8 Hz . 系统的真实响应由四阶 Runge-Kutta 积分方法计算得到, 积分步长取为 0.0025 .

首先考察线性派生系统为阻尼耗散系统的情况, 这时线性阻尼系数取为 $c=20.11 \text{ N s/m}$, 初始条件为 $y(0)=0.005$, $\dot{y}(0)=0$. 图 1 给出了由 Volterra 级数、摄动法和直接积分法给出的系统稳态输出响应时域波形片段. 这里, 在前两种方法的应用中, 只考虑前三阶, 而忽略了更高阶小量. 可看出来, 这三种方法给出输出响应基本完全一致, 观察不到任何差异. 为更细致地比较这三个响应, 图 2 用对数纵坐标给出了它们的频谱. 可看出, 它们的频谱表现出了一定的差异. 直接积分法给出的响应中, 出现了 4 倍频分量; 而摄动法和 Volterra 级数给出的响应中, 则没有 4 倍频分量, 这是因为这两种方法都只考虑了前三阶的缘故. 另外, 表 1 给出了由这三种方法得到的前三次倍频分量的数值结果, 可看出摄动法和 Volterra 级数给出的结果完全一致, 但与直接积分法的结果有细微差别. 该结果表明, 对线性派生系统是阻尼耗散系统的多项式非线性系统, 摄动法和 Volterra 级数都可用来求解系统的稳态输出响应, 且这两种方法给出的响应

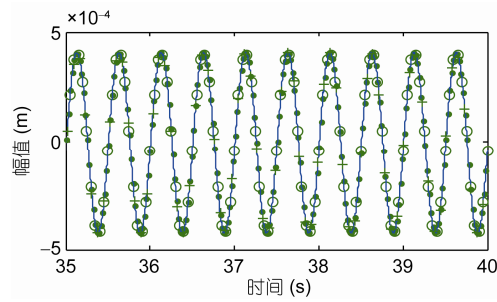


图 1 (网络版彩图)三种方法得到的稳态响应

•摄动法; ○Volterra 级数; +直接积分

Figure 1 (Color online) The steady responses for the damped dissipative derived linear system. •RP method; ○Volterra Series; +Runge-Kutta method.

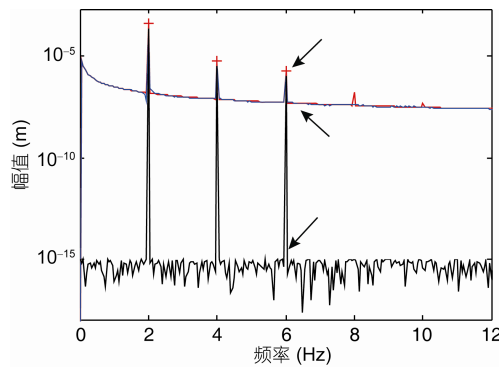


图 2 (网络版彩图)稳态响应的频谱

Figure 2 (Color online) The Fourier spectra of the steady responses.

表 1 三种方法给出的倍频分量结果比较

Table 1 The values of super-harmonic components by three different methods

方法	1 倍频分量 ($\times 10^{-4}$)	2 倍频分量 ($\times 10^{-6}$)	3 倍频分量 ($\times 10^{-6}$)
直接积分法	-0.3083-4.1515i	4.9750-2.0193i	-1.3574-1.3058i
摄动法	-0.3026-4.1511i	5.2674-2.1780i	-1.4265-1.3584i
Volterra 级数	-0.3026-4.1511i	5.2674-2.1780i	-1.4265-1.3584i

完全一致。

图 3 给出了线性派生系统为保守系统时三种方法给出的系统输出响应曲线, 即 $c=0$; 另外, 这里初始条件取为 0, 即 $y(0)=0.0$, $\dot{y}_0(0)=0.0$. 可看出在前 1.5 s, 摄动法与直接积分法给出的响应之间吻合较好, 之后它们之间的差异越来越大, 这是因为摄动法的解中存在久期项 $t \cos \omega_n t$ (这里 ω_n 是线性派生系统的固有频率)的缘故, 它会随 t 的增加而无限增大. 而 Volterra 级数给出的系统响应自始便与直接积分法给出的响应有明显的差异. 为更好地比较三者之间的差异, 图 4 给出了利用前两秒响应数据计算得到的频

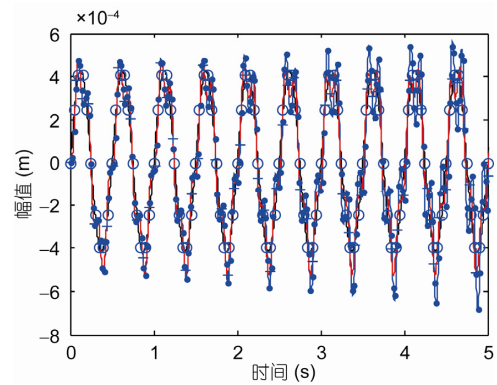


图 3 (网络版彩图)三种方法得到的稳态响应

•摄动法; ○Volterra 级数; +直接积分

Figure 3 (Color online) The steady responses for the undamped derived linear system. •RP method; ○Volterra Series; +Runge-Kutta method.

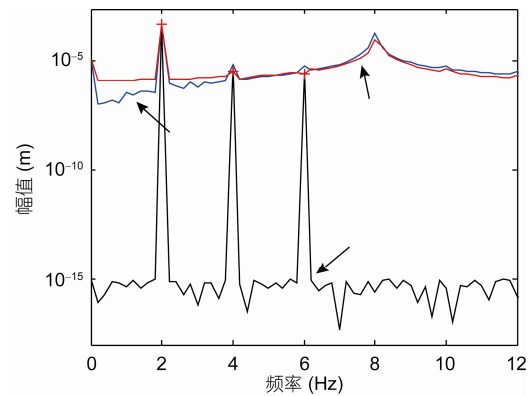


图 4 (网络版彩图)稳态响应的频谱

Figure 4 (Color online) The Fourier spectra of the steady responses.

谱. 可看出由摄动法与直接积分法得到的输出响应频谱比较一致, 而由 Volterra 级数得到的输出响应谱则和前两者之间存在显著区别, 主要体现在线性派生系统的共振频率(8 Hz)附近的区域. 该结果表明, 如果线性派生系统为保守系统, Volterra 级数不能求解多项式非线性系统的稳态输出响应.

5 结论

本文研究了 Volterra 级数和原始摄动法在求解多项式非线性系统稳态响应方面的关系. 结果揭示, 当多项式非线性系统的线性派生系统是阻尼耗散系统时, Volterra 级数和原始摄动法给出的稳态输出响应是完全一致的, 都可以很好地近似系统的真实响应. 而当线性派生系统是保守系统时, Volterra 级数和原始摄动法给出的稳态输出响应间则不再一致:

刚开始时, 原始摄动法给出的响应与系统的真实响应之间的差异较小, 但差异会随时间增加而增大, 因此原始摄动法仅在较短的时间内适用; 而 Volterra 级

数给出的响应自始便和真实响应之间存在显著差异, 因此不再适用. 研究结果可用来判断 Volterra 级数的适用性.

参考文献

- 1 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法. 北京: 科学出版社, 2009
- 2 Buonomo A, Lo Schiavo A. Perturbation analysis of nonlinear distortion in analog integrated circuits. *IEEE Trans Circuits Syst I-Regul Pap*, 2005, 52(8): 1620–1631
- 3 Zhang W, Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *Int J Nonlinear Mech*, 2002, 37(3): 505–526
- 4 Erbay H A, Erbay S, Dost S. Wave propagation in fluid filled nonlinear viscoelastic tubes. *Acta Mech*, 1992, 95(1-4): 87–102
- 5 Boyd S, Chua L. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1985, 32(11): 1150–1161
- 6 Billings S A, Jones J C P. Mapping nonlinear integro-differential equations into the frequency domain. *Int J Control*, 1990, 52 (4): 863–879
- 7 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A, et al. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *J Sound Vib*, 2008, 311 (1-2): 56–73
- 8 Friston K J, Büchel C. Attentional modulation of effective connectivity from V2 to V5/MT in humans. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2000, 97(13): 7591–7596
- 9 Chen G, Xu M, Chen S L. Reduced-order model based on Volterra series in nonlinear unsteady aerodynamics (in Chinese). *J Astronaut*, 2004, 25(5): 492–495 [陈刚, 徐敏, 陈士槽. 基于 Volterra 级数的非线性非定常气动力降阶模型. 宇航学报, 2004, 25(5): 492–495]
- 10 Wang T H, Brazil T J. Volterra-mapping-based behavioral modeling of nonlinear circuits and systems for high frequencies. *IEEE Trans Microw Theory Tech*, 2003, 51(5): 1433–1440
- 11 Wei R X, Kong X Y, Han C Z, et al. New online modeling method for a class of nonlinear system (in Chinese). *Control Decision*, 2004, 19(10): 1101–1108 [魏瑞轩, 孔祥玉, 韩崇昭, 等. 一类非线性系统的在线建模新方法. 控制与决策, 2004, 19(10): 1101–1108]
- 12 Vannucci A, Serena P, Bononi A. The RP method: A new tool for the iterative solution of the nonlinear Schrödinger equation. *J Lightwave Technol*, 2002, 20(7): 1102–1112
- 13 (美)杰拉尔德·惠特莱. 应用数值分析. 北京: 机械工业出版社, 2006
- 14 Lang Z Q, Billings S A. Output frequency characteristics of nonlinear systems. *Int J Control*, 1996, 64(6): 1049–1067

A study about the relationship between the Volterra series and the perturbation method

PENG ZhiKe*, MENG Guang & ZHANG WenMing

State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

The perturbation method is one of the classical methods for solving weak nonlinear equations, and the Volterra series is a classical mathematical tool for modeling the systems with weak nonlinearity. It is revealed in this study that, for a forced polynomial nonlinear system, only when its derived linear system is a damped dissipative system, the steady output responses calculated by using the perturbation method and by using the Volterra series would coincide with each other. This means that the Volterra series is valid for modeling only the polynomial nonlinear systems whose derived linear system is a damped dissipative system.

Volterra series, perturbation method, polynomial nonlinear system, derived linear system

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Jh, 43.40.Ga

doi: 10.1360/132012-723