

明渠和管道中层流和紊流的总规律

窦 国 仁

(水利部 交通部 南京水利科学研究所)

摘 要

本文研究了明渠和管道水流从层流向紊流的过渡状态及其结构,通过统计分析得出了层流和紊流的发生机率.在作者以前获得的紊流各流区统一规律的基础上,考虑到上述机率分布,导出了适用于从层流到紊流全部流区的时均流速分布的统一公式和阻力系数的统一公式.所有理论结果均得到了试验资料的证实,从而使明渠和管道水流的总规律得到了理论上的全面概括.

一、前 言

早在一百年前, Reynolds 通过管流试验明确了流体的两种不同运动形态,即层流和紊流^[1].当雷诺数较小时,水流处于层流状态,当雷诺数增大到某一数值后,从层流开始向紊流过渡;当雷诺数足够大时,水流完全呈紊流状态.五十年前, Nikuradse 在管道中进行了更系统的试验^[2,3],给出了从层流到紊流的全部阻力情况,其中包括层流,层流到紊流的过渡和紊流.在紊流中又随着相对糙率和雷诺数的不同,区分为水力光滑区、过渡区和粗糙区.因而 Nikuradse 的工作从试验上明确了从层流到紊流的总规律.其后的试验,包括明渠的试验,都与 Nikuradse 试验结果基本一致(如文献[4,5]).然而由于上述规律极其复杂,致使这个重要问题一直没有得到理论上的全面阐释和概括.

不久前,本文作者提出了河床紊流的随机理论^[6],并阐述了壁面附近的绕流结构^[7],从而使明渠和管道中的紊流在光滑区、过渡区和粗糙区的脉动结构和时均结构得到了理论上的概括,导出了适用于紊流全部三个流区的流速分布的统一公式和阻力系数的统一公式^[8].虽然前述研究尚未涉及到层流向紊流过渡时的流速分布和阻力问题,但已为研究和解决层流向紊流过渡时的水流结构问题提供了必要条件.

二、层流和紊流的流速分布

众所周知,宽明渠和圆管中的层流运动方程式可以写做

$$v_*^2 \left(1 - \frac{y}{H}\right) = v \frac{dv_t}{dy}. \quad (2.1)$$

式中 v_* 为摩阻流速, 即 $v_* = \sqrt{gRJ}$, 其中 g 为重力加速度, R 为水力半径(对于宽明渠近似等于水深, 对于圆管等于半径的一半), J 为水力比降; y 为自底壁垂直向上的坐标, 零点位于壁面上; H 为宽明渠的水深或圆管的半径; ν ——流体的运动粘滞系数; v_l 为层流在 y 点的流速. 将 (2.1) 式积分并考虑到边界条件后, 可得

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \left(1 - \frac{y}{2H}\right). \quad (2.2)$$

对于充分发展的紊流, 其运动方程式应为:

$$v_*^2 \left(1 - \frac{y}{H}\right) = \nu \frac{d\bar{v}_i}{dy} - \overline{v'_x v'_y}. \quad (2.3)$$

式中 \bar{v}_i ——紊流在 y 点的时均流速; $\overline{v'_x v'_y}$ ——纵向和竖向脉动流速相关矩; 其余符号同前. 由于紊流结构复杂, 脉动流速相关矩问题长期没有得到很好的解决. 以往在应用各种半经验理论表示此相关矩时, 也都是在忽略粘滞应力项的前提下推导时均流速分布规律的. 因而以前导出的时均流速分布公式都只能适用于远离壁面边界层的区域. 正是由于缺少对壁面附近绕流结构的认识, 致使紊流由光滑到粗糙的过渡区中的流速分布问题和阻力问题长期得不到解决.

不久前作者提出了紊流的随机理论, 并基于这一理论导得了确定脉动流速相关矩的公式如下^[6]:

$$\frac{\overline{v'_x v'_y}}{v_*^2} = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \frac{y}{v_*} \frac{d\bar{v}_i}{dy} - \frac{k^2}{8} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \frac{2\delta y - y^2}{v_*^2} \left(\frac{d\bar{v}_i}{dy}\right)^2, \quad (2.4)$$

式中 k ——常数 ($= 0.4$), δ ——反映壁面影响的参数 ($= 11.6\nu/v_*$).

作者还对壁面的绕流情况进行了分析并指出^[7], 出现光滑区、过渡区和粗糙区的原因在于水流绕过壁面糙率时是否发生分离. 当糙率雷诺数 $v_*\Delta/\nu$ 较小时 (其中 Δ 为壁面糙率高度), 水流绕过壁面糙率时并不发生分离, 因而糙率的存在与否对紊流结构无明显影响, 紊流处于光滑区; 当此雷诺数大于 1.25 后, 水流绕过糙率时, 在糙率下游底部发生部分分离, 且分离层的厚度随着雷诺数的增加而增大, 紊流处于过渡区; 当雷诺数等于和大于 100 时, 水流绕过糙率后完全分离, 分离厚度只决定于糙率高度, 而不再与雷诺数有关, 紊流处于粗糙区. 基于这一认识, 作者导出了分离层厚度的变化规律.

将 (2.4) 式代入 (2.3) 式后进行积分, 并在确定积分常数时, 考虑到上述绕流的分离条件而得紊流各流区时均流速分布的统一公式如下^[7,8]:

$$\frac{\bar{v}_i}{v_*} = 2.5 \ln \left(1 + \frac{v_* y}{5\nu}\right) + 7.05 \left(\frac{\frac{v_* y}{5\nu}}{1 + \frac{v_* y}{5\nu}}\right)^2 + 2.5 \left(\frac{\frac{v_* y}{5\nu}}{1 + \frac{v_* y}{5\nu}}\right) - B_*, \quad (2.5)$$

其中

$$B_* = 2.5 \ln \left[\frac{1 + \frac{\alpha v_* \Delta}{5\nu}}{1 + \frac{\alpha \beta v_* \Delta}{5\nu}} \right] + 7.05 \left[\left(\frac{\frac{\alpha v_* \Delta}{5\nu}}{1 + \frac{\alpha v_* \Delta}{5\nu}} \right)^2 - \left(\frac{\frac{\alpha \beta v_* \Delta}{5\nu}}{1 + \frac{\alpha \beta v_* \Delta}{5\nu}} \right)^2 \right]$$

$$+ 2.5 \left[\left(\frac{\frac{\alpha v_* \Delta}{5\nu}}{1 + \frac{\alpha v_* \Delta}{5\nu}} \right) - \left(\frac{\frac{\alpha \beta v_* \Delta}{5\nu}}{1 + \frac{\alpha \beta v_* \Delta}{5\nu}} \right) \right], \quad (2.6)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} [1 - \cos \theta], \quad (2.7)$$

$$\frac{\theta}{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \frac{v_* \Delta}{\nu} \leq 1.25, \\ \frac{\ln \left(\frac{v_* \Delta / \nu}{1.25} \right)}{\ln (100/1.25)}, & \text{当 } 1.25 \leq \frac{v_* \Delta}{\nu} \leq 100, \\ 1, & \text{当 } \frac{v_* \Delta}{\nu} \geq 100, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\beta = 1 - \frac{1 - \beta_0}{2} \left(\alpha + \frac{\theta}{\pi} \right). \quad (2.9)$$

在上述公式中, α 为分离层厚度与糙率高度之比值, β 为分离层顶部至流速为零之点的距离与分离层厚度之比值, β_0 为充分分离时的 β 值 ($\beta_0 = 0.107$). 由于当 $v_* \Delta / \nu \geq 100$ 时, 绕流已充分分离, 分离层厚度不再与雷诺数有关, 故在这种情况下使用(2.5)式时, 仍应取 $v_* \Delta / \nu = 100$, 即

$$\frac{v_* y}{5\nu} = \frac{1}{5} \frac{v_* \Delta}{\nu} \frac{y}{\Delta} = 20 \frac{y}{\Delta}. \quad (2.10)$$

三、层流向紊流过渡时的水流结构

所有试验都一致表明, 当雷诺数小于一定数值时, 水流为层流; 当雷诺数大于此数值后, 水流开始从层流向紊流过渡. 当水流处于此种过渡状态时, 紊动具有间歇性质, 一会儿产生, 一会儿消失; 反映在瞬时流速过程线上, 时而脉动强烈, 时而几乎没有脉动. Rotta 和 Jonsson^[9] 曾分别用热丝流速仪和激光流速仪对圆管中的过渡状态进行了观测, 说明处于过渡状态的水流, 一会儿为层流, 一会儿为紊流. 正如 Schlichting 所指出的那样, 处于过渡状态的水流流速分布, 一会儿符合层流分布规律, 一会儿符合紊流分布规律^[10]. 试验资料也表明, 层流与紊流交替出现的时间是不均匀的, 不规则的; 有时层流的持续时间长些, 有时紊流的持续时间长些, 其交替的频率也有时大些, 有时小些, 具有明显的随机性质.

如果令 T_t 表示在某观测时段 T 内呈现紊流的时间, T_l 表示在 T 时段内呈现层流的时间, 则有

$$T = T_t + T_l. \quad (3.1)$$

现令

$$\gamma_t = \frac{T_t}{T}, \quad \gamma_l = \frac{T_l}{T}, \quad (3.2)$$

则当取观测时段趋向无穷大时, 而有

$$\bar{\gamma}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_t}{T}, \quad \bar{\gamma}_l = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_l}{T}. \quad (3.3)$$

式中 $\bar{\gamma}_t$ 和 $\bar{\gamma}_l$ 分别为紊流和层流的出现机率. 由前述各式可以写出

$$\bar{\gamma}_t + \bar{\gamma}_l = 1. \quad (3.4)$$

现在将观测时段 T 等分成 m 个微小时间单元 Δt , 故有

$$T = m\Delta t. \quad (3.5)$$

正如前述, 在时段 T 内紊流和层流交替出现, 其每次出现时的持续时间也有长有短. 如果令 K_1 表示紊流持续时间只有 Δt 长的出现次数, K_2 表示紊流持续时间为 $2\Delta t$ 长的出现次数, 余此类推, 用 K_n 表示紊流持续时间为 $n\Delta t$ 长的出现次数, 则可写出

$$\begin{aligned} T_t &= K_1(\Delta t) + K_2(2\Delta t) + \cdots + K_n(n\Delta t) + \cdots \\ &= \Delta t \sum_{n=1}^m nK_n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

如果令 k_n 表示持续时间为 $n\Delta t$ 的紊流在单位观测时间 Δt 内相对于一个 Δt 的持续时间所出现的排列次数, 则在观测时段 $T (= m\Delta t)$ 内出现的全排列次数为 mnk_n . 另一方面, 持续时间为 $n\Delta t$ 的紊流, 由于系由 n 个时间单元组成, 因而可以出现 $n!$ 的不同排列, 所以在 T 时段内这种紊流出现的全排列次数又为 $K_n n!$. 由此可得

$$K_n = \frac{mn}{n!} k_n. \quad (3.7)$$

将 (3.7) 式代入 (3.6) 式, 并除以 T , 而得

$$\bar{\gamma}_t = \sum_{n=1}^m \frac{n^2}{n!} k_n. \quad (3.8)$$

将上式取极限, 得

$$\bar{\gamma}_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{n^2}{n!} k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \bar{k}_n, \quad (3.9)$$

式中 \bar{k}_n 为 k_n 的统计平均值, 在给定的水流条件下它应当具有稳定的数值. 此值应当是雷诺数 $R_*(=v_*H/\nu)$ 与其从层流向紊流过渡的临界值 R_{*K} 的比值的函数. 随着雷诺数的增大, \bar{k}_n 应当不断增大, 但其增长率却应不断减小, 以使 \bar{k}_n 渐近于最大值. 因而 \bar{k}_n 对雷诺数的导数应当是上述雷诺数比值的倒数的函数, 即

$$\frac{d\bar{k}_n}{dR_*} = f\left(\frac{R_{*K}}{R_*}\right).$$

假定这一函数关系可以用奇次幂级数形式表示, 即假定

$$\frac{d\bar{k}_n}{dR_*} = \alpha \left(\frac{R_{*K}}{R_*}\right)^{2n+1}, \quad (3.10)$$

式中 α 为比例系数. 将上式积分则得

$$\bar{k}_n = -\frac{\alpha R_{*K}}{2n} \left(\frac{R_{*K}}{R_*}\right)^{2n} + C_1. \quad (3.11)$$

式中 C_1 为积分常数. 当雷诺数小于或等于其临界值时, 水流完全处于层流状态, 因而不可能有紊流出现, 即当 $R_* = R_{*K}$ 时, $\bar{k}_n = 0$. 由此边界条件得

$$C_1 = \frac{\alpha R_{*K}}{2n}. \quad (3.12)$$

将(3.11)和(3.12)式代入(3.9)式,得

$$\bar{\gamma}_t = \frac{1}{2} \alpha R_{*K} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \right] - \frac{1}{2} \alpha R_{*K} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \left(\frac{R_{*K}}{R_*} \right)^{2n} \right]. \quad (3.13)$$

当雷诺数足够大时,水流就将完全处于紊动状态,因此当 $R_* \rightarrow \infty$ 时, $\bar{\gamma}_t = 1$. 由此条件得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha R_{*K} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \right] &= 1, \\ \alpha &= 2 / \left[R_{*K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

由于数列 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = e$, 故将(3.14)式代入(3.13)式,并考虑到临界条件,从而得到

$$\bar{\gamma}_t = \begin{cases} 1 - \frac{1}{e} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \left(\frac{R_{*K}}{R_*} \right)^{2n} \right], & \text{当 } R_* \geq R_{*K} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } R_* \leq R_{*K} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.15)$$

将此式代入(3.4)式,又可得到

$$\bar{\gamma}_l = \begin{cases} \frac{1}{e} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \left(\frac{R_{*K}}{R_*} \right)^{2n} \right], & \text{当 } R_* \geq R_{*K} \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } R_* \leq R_{*K} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.16)$$

试验表明,对于管道,从层流向紊流过渡的临界雷诺数 $Re_{\kappa} (= VD/\nu)$, 其中 V 为断面平均流速, D 为管道直径)约为 2,300. 由于两个临界雷诺数之间的关系为 $R_{*K} = \sqrt{2Re_{\kappa}}$ (详见第五部分), 故有 $R_{*K} = \sqrt{4600} = 67.82$. 对于明渠, 临界雷诺数 $Re_{\kappa} (= VH/\nu)$ 约为 800, 而 R_{*K} 与 Re_{κ} 之关系又为 $R_{*K} = \sqrt{3Re_{\kappa}}$ (详见第六部分), 故有 $R_{*K} = \sqrt{2400} \approx 48.99$.

为了检验(3.15)和(3.16)式,最近万声淦进行了水槽试验. 用激光流速仪测量了瞬时流速,并从瞬时流速过程线中求得各种雷诺数时,紊流和层流所占时间与总观测时间的比值,即紊流和层流发生机率的近似值(详见南京水利科学研究所研究生论文). 理论曲线与试验数据的比较见于图1. 由图1可见,两者基本上是一致的.

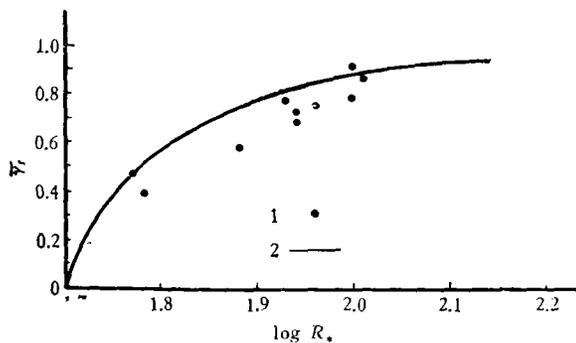


图1 紊流发生机率的理论公式与试验数据的比较
(1.万声淦试验数据, 2.本文公式(3.15))

四、层流和紊流流速分布的统一公式

前已指出,水流在从层流向紊流过渡时,时而属于层流,其流速分布符合(2.2)式,时而属于紊流,其流速分布符合(2.5)式,因而过渡状态下的时均流速分布系由这两部分综合而成并可写作:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \bar{\gamma}_l \left(\frac{v_l}{v_*} \right) + \bar{\gamma}_t \left(\frac{\bar{v}_t}{v_*} \right), \tag{4.1}$$

式中 \bar{v} 为距壁面 y 点的时均流速, $\bar{\gamma}_l$ 和 $\bar{\gamma}_t$ 分别由(3.15)和(3.16)式确定, v_l 和 \bar{v}_t 分别由(2.2)和(2.5)式确定.

前边提到的水槽试验,也提供了过渡状态下的时均流速分布资料.在图2中给出了万声淦的试验结果和按(4.1)式计算的理论曲线.由图2可见,尽管试验点据有些分散,理论与试验结果还是相当一致的.

当雷诺数较小时,即 $R_* \leq R_{*K}$ 时,由(3.15)和(3.16)式可知, $\bar{\gamma}_l = 0, \bar{\gamma}_t = 1$,因而(4.1)式自动转变为层流流速分布公式;当雷诺数足够大时,由于 $\bar{\gamma}_l \approx 0, \bar{\gamma}_t \approx 1$,而使(4.1)式转化为充分发展的紊流流速分布公式.由此可见,(4.1)式不仅适用于从层流向紊流的过渡状态,而且也适用于包括层流和紊流在内的一切情况.因而(4.1)式也是明渠和管道中层流、层流向紊流过渡和紊流各流区(包括光滑区、过渡区和粗糙区)的时均流速分布的统一公式.

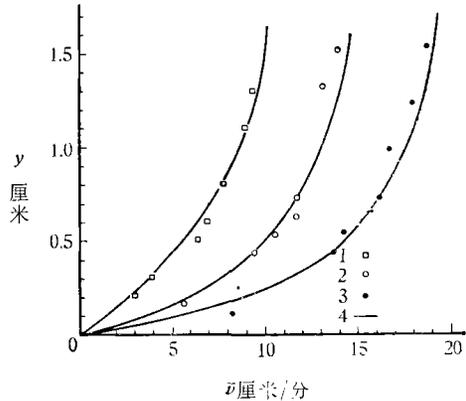


图2 过渡状态下时均流速分布公式与万声淦试验资料的比较

(1. $R_* = 58.6$; 2. $R_* = 97.9$;
3. $R_* = 138.5$; 4. 本文(4.1)式)

五、圆管中水流阻力系数的统一公式

前节获得的时均流速分布总规律,为解决阻力系数问题提供了理论基础.如将无尺度流速系数 C_0 定义为 $C_0 = V/v_*$, 式中 V 为断面平均流速, v_* 为摩阻流速,则可写出

$$C_0 = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \frac{\bar{v}}{v_*} 2\pi(r-y)dy. \tag{5.1}$$

式中 r 为圆管半径.将(4.1)式代入上式后可以得到

$$C_0 = \bar{\gamma}_l C_{0l} + \bar{\gamma}_t C_{0t}. \tag{5.2}$$

其中

$$C_{0l} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \frac{v_l}{v_*} 2\pi(r-y)dy, \tag{5.3}$$

$$C_{0t} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \frac{\bar{v}}{v_*} 2\pi(r-y)dy. \tag{5.4}$$

将(2.2)式代入(5.3)式后积分,得

$$C_{0l} = \frac{1}{4} \frac{v_* r}{\nu} \quad (5.5)$$

将(2.5)式代入(5.4)式后积分,得

$$C_{0r} = \left[2.5 - \frac{28.2}{\left(\frac{v_* r}{5\nu}\right)} - \frac{44.8}{\left(\frac{v_* r}{5\nu}\right)^2} \right] \ln \left(1 + \frac{v_* r}{5\nu} \right) + 5.8 + \frac{44.8}{\left(\frac{v_* r}{5\nu}\right)} - B_* \quad (5.6)$$

不难看出,(5.2)式适用于从层流到紊流的一切情况,其中的 C_{0l} 由(5.5)式确定, C_{0r} 由(5.6)式确定.

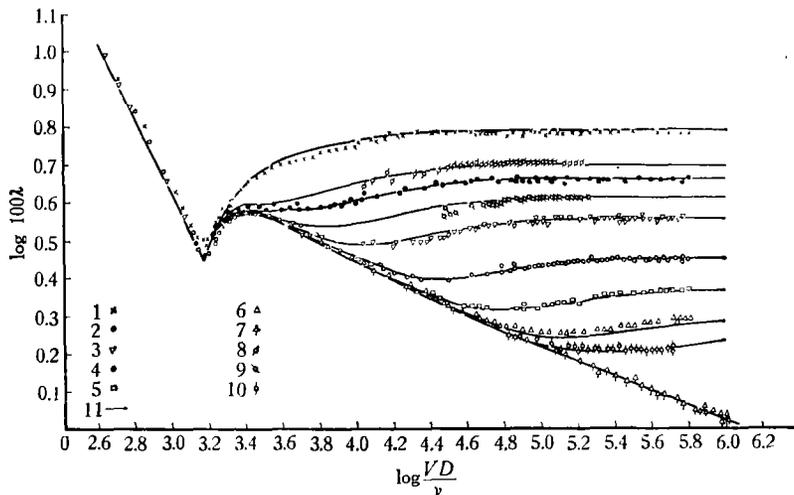


图3 圆管阻力系数理论公式与试验资料的比较

$$\left(1. \frac{r}{\Delta} = 15, \quad 2. \frac{r}{\Delta} = 30.6, \quad 3. \frac{r}{\Delta} = 60, \quad 4. \frac{r}{\Delta} = 126, \quad 5. \frac{r}{\Delta} = 252, \quad 6. \frac{r}{\Delta} = 507, \right.$$

$$\left. 7. \text{光滑}, \quad 8. \frac{r}{\Delta} = 25, \quad 9. \frac{r}{\Delta} = 42, \quad 10. \frac{r}{\Delta} = 750, \quad 11. \text{本文公式(5.8)}; \right.$$

1—7为 Nikuradse 资料, 8—10为 Шевелев 资料)

附带指出,如果将(5.5)式两边同时乘以 $v_* r / \nu$ 后再开方,则可得出层流状态下两个雷诺数之间的关系为

$$\frac{v_* r}{\nu} = \sqrt{2 \frac{VD}{\nu}} \quad (5.7)$$

式中 D 为圆管直径.

在水力学中,管道阻力系数 λ 通常表示为 $\lambda = 8/C_0^2$, 因而由(5.2)式可得

$$\lambda = \frac{8}{[\bar{\gamma}_l C_{0l} + \bar{\gamma}_r C_{0r}]^2} \quad (5.8)$$

这就是确定管道水流阻力系数的统一公式,它概括了从层流到紊流各流区阻力系数的总规律.在图3中利用 Nikuradse^[2,3] 和 Шевелев^[11] 的试验资料,对(5.8)式进行了验证.由图3可

见，理论与试验几乎完全一致，因而由 Nikuradse 提供的阻力系数图得到了理论上的全面概括。

六、明渠中阻力系数的统一公式

对于宽明渠，无尺度流速系数可表示为 $C_0 = V/v_*$ ，式中 V 为中垂线平均流速。由此可以写出

$$C_0 = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\bar{v}}{v_*} dy, \tag{6.1}$$

将 (4.1) 式代入 (6.1) 式后，得

$$C_0 = \bar{\gamma}_l C_{ol} + \bar{\gamma}_t C_{ot}. \tag{6.2}$$

其中

$$C_{ol} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{v_l}{v_*} dy, \tag{6.3}$$

$$C_{ot} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\bar{v}_t}{v_*} dy. \tag{6.4}$$

将 (2.2) 式代入 (6.3) 式，积分后得

$$C_{ol} = \frac{1}{3} \frac{v_* H}{\nu}. \tag{6.5}$$

将 (2.5) 式代入 (6.4) 式，积分后得

$$C_{ot} = \left[2.5 - \frac{14.1}{\left(\frac{v_* H}{5\nu}\right)} \right] \ln \left(1 + \frac{v_* H}{5\nu} \right) + 7.05 + \frac{7.05}{\left(1 + \frac{v_* H}{5\nu}\right)} - B_*. \tag{6.6}$$

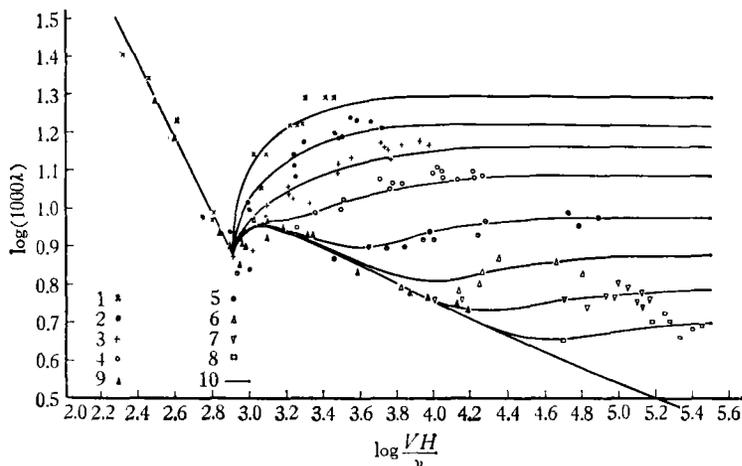


图 4 明渠阻力系数理论公式与试验资料的比较

(1. $\frac{H}{\Delta} = 5$, 2. $\frac{H}{\Delta} = 7$, 3. $\frac{H}{\Delta} = 10$, 4. $\frac{H}{\Delta} = 15$, 5. $\frac{H}{\Delta} = 30$,

6. $\frac{H}{\Delta} = 60$, 7. $\frac{H}{\Delta} = 120$, 8. $\frac{H}{\Delta} = 240$, 9. 光滑, 10. 本文公式 (6.8);

1-8 为 Зегжда 资料, 9 为 万声淦资料)

附带指出,如将(6.5)式两边同时乘以 v_*H/ν 并开方,则可得出层流状态下两个雷诺数之间的关系,

$$\frac{v_*H}{\nu} = \sqrt{3 \frac{VH}{\nu}}. \quad (6.7)$$

在水力学中,明渠阻力系数 λ 通常表示为 $\lambda = 2/C_0^2$, 因而由(6.2)式可得

$$\lambda = \frac{2}{[\bar{\gamma}_l C_{0l} + \bar{\gamma}_t C_{0t}]^2}. \quad (6.8)$$

此式就是确定明渠水流阻力系数的统一公式,它概括了从层流到紊流的阻力系数的总规律.在图4中给出了公式(6.8)与 Зегжда^[4] 和万声淦试验资料的对比.图4表明,理论曲线与试验结果相当一致.

参 考 文 献

- [1] Reynolds, O., *Trans. Roy. Soc.*, London, 1883, 74.
- [2] Nikuradse, J., *VDI*, 1932, 356.
- [3] ———, *ibid.*, 1933, 361.
- [4] Зегжда, А. П., *Гидравлические потери на трение*, Изд. Стр. и Арх., 1957.
- [5] Virk, P. S., *J. Fluid Mech.*, 45(1971), 225.
- [6] 窦国仁, *水利水运科学研究*, 1979, 1:52.
- [7] ———, 同上, 1980, 1:1.
- [8] ———, *中国科学*, 1980, 11:1115.
- [9] 窦国仁, *紊流力学*, 上册, 第三章, 人民教育出版社, 1982.
- [10] Шлихтинг, Г., *Возникновение турбулентности*, Изд. И.-Л., 1962.
- [11] Шевелев, Ф. А., *Исслед. основы гидр. закон-стей турбул. движения*, Изд. Стр. и Арх., 1953.