中国科学

1982 年 9 月　　A 辑　　第 9 期

Liénard 方程在有限区间上极限环的存在唯 n 性定理

丁孙荭*

（中国科学院应用数学研究所，北京）

摘　　要

Liénard 方程是工程技术中常见的一个重要方程，因此引起数学工作者的重视. 1946年 H. J. Eckweiler 提出方程 $\ddot{x}+\mu\sin\dot{x}+x=0$ 有无限多个环的猜想. 后来 H. S. Hochstadt 与 B. Stephon, R. N. D' Heedene 等人在 μ 的特定限制下证明上述方程在 $|x|<(n+1)\pi$ 中至少存在 n 个极限环[1]. 1980 年张芷芬教授在文献[1]中证明了对任何非零常数 μ，上述方程在 $|x|<(n+1)\pi$ 中恰有 n 个极限环，使此项工作大进一步. 本文提出一类极为广泛的条件保证在一定区域内 Liénard 方程恰好存在 n 个极限环，并以过去的各条件作为特例.

我们研究的 Liénard 方程是:

$$\ddot{x}(t)+f(x)\dot{x}(t)+x(t)=0,\quad f(x)\in c^0(-\infty,\ \infty) \tag{1}$$

或其等价的方程组:

$$\dot{x}(t)=y-F(x),\quad \dot{y}=-x, \tag{1'}$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$. 类似文献[3]的作法，记

$$F_1(x)=F(x),\quad F_2(x)=F(-x),\quad 当\ x\geqslant 0. \tag{2}$$

引进方程:

$$(F_1(x)-y)dy=xdx, \tag{3}$$

$$(F_2(x)-y)dy=xdx, \tag{3'}$$

我们分别以 $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ 记方程(3)和(3′)的解.

以下各定理及引理中的 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 及 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 可作相应的交换，可得相应的结论.

引理 1. 记 $i\in\{1,\ 2\}$, $l=3-i$, $k\in\{1,\ 2,\ 3\}$. 对于方程(3),(3′)，假设:

i) 存在 $0\leqslant t_1<t_2<t_3$，使 $F_i(t_k)=0$. 当 $t_k<x<t_{k+1}$; $k\neq 3$ 时 $(-1)^{i+k}F_i(x)\leqslant 0$，等号不恒成立.

ii) 存在 $T^{(i)}>0$，使得当 $x\in[t_1,\ t_2]$ 时，$T^{(i)}+x\in[t_2,\ t_3]$，且 $(-1)^i(F_i(x+T^{(i)})$

本文 1981 年5月 15 日收到.

* 作者现在中国科学院成都分院数理研究室.

$-F_i(x))\leqslant 0$.

iii) 方程(3),(3′)的解 $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ 都与直线 $x=t_1$ $x=t_3$ 相交，且 $y_1(t_1)\leqslant y_2(t_1)$. 则 $y_1(t_3)<y_2(t_3)$.

证. 构造两个方程：

$$(F_1^*(x)-y)dy=xdx, \tag{4}$$

$$(F_2^*(x)-y)dy=xdx, \tag{4'}$$

其中

$$F_i^*(x)=\begin{cases}F_i(x), & x\in[t_1,t_2],\\ 0, & x\in(t_2,t_1+T^{(i)}],\\ F_i(x-T^{(i)}), & x\in(t_1+T^{(i)},t_2+T^{(i)}],\\ 0, & x\in(t_2+T^{(i)},t_3].\end{cases}$$

当 $y_1(t_1)<0<y_2(t_1)$, 引理的结论显然成立. 我们先设 $0<y_1(t_1)\leqslant y_2(t_1)$. 由于 $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ 都与直线 $x=t_1$, $x=t_3$ 相交，所以当 $x\in(t_1,t_3)$ 时，$F_i(x)-y_i(x)<0$. 不然至少存在 $x^*\in(t_1,t_3)$,使 $F_1(x^*)-y_1(x^*)=0$ 或 $F_2(x^*)-y_2(x^*)=0$. 此时轨线 $y=y_1(x)$ 或 $y=y_2(x)$ 的最大横坐标 $x^*<t_3$,与引理的条件矛盾.

我们又设 $y=y_1^*(x)$, $y=y_2^*(x)$ 分别是方程(4),(4′)的解,且都与直线 $x=t_1$, $x=t_3$ 相交,又 $y_1^*(t_1)=y_2^*(t_1)>0$. 由上面的讨论可知,当 $x\in(t_1,t_3)$ 时，$F_i^*(x)-y_i^*(x)<0$, 由方程 (4),(4′) 得：当 $x\in[t_1,t_2]$ 时，

$$\frac{d(y_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x))}{dx}=\frac{x+T^{(i)}}{F_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x+T^{(i)})}$$

$$-\frac{x}{F_i^*(x)-y_i^*(x)}<\frac{x(y_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x))}{(F_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x+T^{(i)}))(T_i^*(x)-y_i^*(x))},$$

$$\frac{d}{dx}\left\{[y_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x)]\exp\int_{t_1}^{x}\frac{-\xi d\xi}{(F_i^*(\xi+T^{(i)})-y_i^*(\xi+T^{(i)}))(F_i^*(\xi)-y_i^*(\xi))}\right\}<0.$$

又

$$y_i^*(t_1+T^{(i)})-y_i^*(t_1)=y_i^*(t_1+T^{(i)})-y_i^*(t_1)=\int_{t_1}^{t_1+T^{(i)}}\frac{\xi d\xi}{F_i^*(\xi)-y_i^*(\xi)}<0,$$

所以有：

$$y_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x)<0,\quad x\in[t_1,t_2]. \tag{5}$$

类似地还有结论：当 $y_1^*(t_1)=y_2^*(t_2)<0$ 时，

$$y_i^*(x+T^{(i)})-y_i^*(x)>0,\quad x\in[t_1,t_2]. \tag{5'}$$

引进函数 $\lambda(x,y)=(x^2+y^2)/2$, 则

$$d\lambda(x,y)/dx=xF(x)/(F(x)-y), \tag{6}$$

计算轨线 $y=y_1^*(x)$ 和 $y=y_2^*(x)$ 上函数 $\lambda(x,y)$ 的差. 由于 $y_1^*(t_1)=y_2^*(t_1)>0$, 故有

$$\lambda(t_1,y_1^*(t_1))=\lambda(t_1,y_2^*(t_1)),$$

所以

$$\lambda(t_3,y_1^*(t_3))-\lambda(t_3,y_2^*(t_3))=\int_{t_1}^{t_3}\frac{\xi F_1^*(\xi)d\xi}{F_1^*(\xi)-y_1^*(\xi)}-\int_{t_1}^{t_3}\frac{\xi F_2^*(\xi)d\xi}{F_2^*(\xi)-y_2^*(\xi)}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\xi F_1^*(\xi)d\xi}{F_1^*(\xi)-y_1^*(\xi)}+\int_{t_1+T^{(1)}}^{t_2+T^{(1)}}\frac{\xi F_1^*(\xi)d\xi}{F_1^*(\xi)-y_1^*(\xi)}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\xi F_2^*(\xi)d\xi}{F_2^*(\xi)-y_2^*(\xi)}$$

$$-\int_{t_1+T^{(2)}}^{t_2+T^{(1)}}\frac{\xi F_2^*(\xi)d\xi}{F_2^*(\xi)-y_2^*(\xi)}$$

$$
= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\xi F_1^*(\xi)d\xi}{F_1^*(\xi) - y_1^*(\xi)} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\xi + T^{(1)})F_1^*(\xi + T^{(1)})d\xi}{F_1^*(\xi + T^{(1)}) - y_1^*(\xi + T^{(1)})} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\xi F_2^*(\xi)d\xi}{F_2^*(\xi) - y_2^*(\xi)}
$$
$$
- \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\xi + T^{(2)})F_2^*(\xi + T^{(2)})d\xi}{F_2^*(\xi + T^{(2)}) - y_2^*(\xi + T^{(2)})}
$$
$$
= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\xi F_1^*(\xi)}{F_1^*(\xi) - y_1^*(\xi)} + \frac{\xi F_2^*(\xi)}{F_2^*(\xi) - y_1^*(\xi + T^{(1)})} - \frac{\xi F_2^*(\xi)}{F_2^*(\xi) - y_2^*(\xi)} \right.
$$
$$
- \frac{\xi F_1^*(\xi)}{F_1^*(\xi) - y_2^*(\xi + T^{(2)})} + \frac{T^{(1)}F_2^*(\xi)}{F_2^*(\xi) - y_1^*(\xi + T^{(1)})}
$$
$$
\left. - \frac{T^{(2)}F_1^*(\xi)}{F_1^*(\xi) - y_2^*(T^{(2)} + \xi)} \right) d\xi
$$
$$
= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\xi F_1^*(\xi)(y_1^*(\xi) - y_2^*(\xi + T^{(2)}))}{(F_1^*(\xi) - y_1^*(\xi))(F_1^*(\xi) - y_2^*(\xi + T^{(2)}))} \right) d\xi - \int_{t_1}^{t_2} \frac{T^{(2)}F_1^*(\xi)d\xi}{F_1^*(\xi) - y_2^*(\xi + T^{(2)})}
$$
$$
+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\xi F_2^*(\xi)(y_1^*(\xi + T^{(1)}) - y_2^*(\xi))d\xi}{(F_2^*(\xi) - y_1^*(\xi + T^{(1)}))(F_2^*(\xi) - y_2^*(\xi))} \right) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{T^{(1)}F_2^*(\xi)d\xi}{F_2^*(\xi) - y_1^*(\xi + T^{(1)})}.
$$

由 $F_1^*(x)$, $F_2^*(x)$ 的定义、引理 1 的条件,即当 $x \in (t_1, t_2)$ 时,$(-1)^i F_i(x) \geqslant 0$ 及(5)式, 可得上面积分的每一项为负,故

$$
\lambda(t_3, y_1^*(t_3)) - \lambda(t_3, y_2^*(t_3)) < 0. \tag{7}
$$

由于 $y_1^*(t_3)$, $y_2^*(t_3)$ 非负,所以

$$
y_1^*(t_3) < y_2^*(t_3). \tag{8}
$$

又由 $F_1^*(x)$ 和 $F_2^*(x)$ 在 $[t_1, t_3]$ 的定义,有 $F_1^*(x) \leqslant F_1(x)$ 和 $F_2^*(x) \geqslant F_2(x)$,故有:

$$
(dy/dx)_{(4)} \geqslant (dy/dx)_{(3)}, \quad x \in [t_1, t_3], \tag{9}
$$
$$
(dy/dx)_{(4')} \leqslant (dy/dx)_{(3')}, \quad x \in [t_1, t_3]. \tag{9'}
$$

设 $y = \bar{y}_1(x)$, $y = \bar{y}_2(x)$ 为方程(3),(3′)的解,都和 $x = t_1$, $x = t_3$ 相交,且 $\bar{y}_1(t_1) = \bar{y}_2(t_1) = y_1^*(t_1) = y_2^*(t_1)$. 那么 $y = y_1^*(x)$, $y = y_2^*(x)$ 一定与 $x = t_3$ 相交. 由方程(9),(9′)用微分不等式得:

$$
y_1^*(x) \geqslant \bar{y}_1(x), \quad t_1 \leqslant x \leqslant t_3, \tag{10}
$$
$$
y_2^*(x) \leqslant \bar{y}_2(x), \quad x \in [t_1, t_3] \cap \{x \mid F_2^*(x) - y_2^*(x) \leqslant 0\}, \tag{11}
$$

(11) 式中必有 $[t_1, t_3] \cap \{x \mid F_2^*(x) - y_2^*(x) \leqslant 0\} = [t_1, t_3]$. 否则改变初始条件 $y_1^*(t_1) = y_2^*(t_1)$,可得到 $y_2^*(t_3) < y_1^*(t_3)$,此与(8)式矛盾,故(11)式应为:

$$
y_2^*(x) \leqslant \bar{y}_2(x), \quad x \in [t_1, t_3]. \tag{11'}
$$

由(8),(10),(11′)式得:

$$
\bar{y}_1(t_3) < \bar{y}_2(t_3), \tag{12}
$$

在引理条件下,我们先取 $\bar{y}_1(t_1) = \bar{y}_2(t_1) = y_2(t_1)$,由方程(3)的解的存在唯一性,当解 $y = y_1(x)$ 与直线 $x = t_3$ 相交,那么解 $y = \bar{y}_1(x)$ 也与直线 $x = t_3$ 相交,且 $\bar{y}_1(t_3) > y_1(t_3)$. 由此得, $\bar{y}_1(t_3) < y_2(t_3)$,故而

$$
y_1(t_3) < y_2(t_3). \tag{13}
$$

同样,我们可以证明,当 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ 都与 $x = t_1$, $x = t_3$ 相交,且 $y_1(t_1) \leqslant y_2(t_1) < 0$ 时, $y_1(t_3) < y_2(t_3)$. 引理 1 证毕.

引理 2. 对于方程(3),(3′),设 $F_1(0) = F_2(0) = 0$ 存在 $t_1 > 0$, 当 $0 \leqslant x \leqslant t_1$ 时

$F_1(x) \geqslant F_2(x)$，且等号不恒成立．设 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ 分别是方程 (3),(3′) 的解，$y_1(0) = y_2(0) \neq 0$，且 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ 都与直线 $x = t_1$ 相交，则 $y_1(t_1) < y_2(t_1)$.

证．由于 $F_1(x) \geqslant F_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant t_1$，所以

$$(dy/dx)_{(3)} \leqslant (dy/dx)_{(3')}, \quad 0 \leqslant x \leqslant t_1, \tag{14}$$

(14)式中的等号不恒成立．由比较定理得：$y_1(t_1) < y_2(t_1)$．引理 2 证毕

定理 1．记 $i \in \{1, 2\}$, $l = 3 - i$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n, n+1\}$．对于方程 (3),(3′) 假设：

i) 存在 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$，使 $F_i(t_k) = 0$.

ii) 当 $t_k < x < t_{k+1} (k \neq n+1)$ 时，$(-1)^{k+i} F_i(x) \leqslant 0$ 且当 $k = 0$ 时等号不恒成立．

iii) 存在 $T_k^{(i)} > 0 (k \neq 0, n+1)$．当 $t_{k-1} \leqslant x \leqslant t_k$ 时，$t_k \leqslant T_k^{(i)} + x \leqslant t_{k+1}$，且

$$(-1)^{k+i}[F_i(x + T_k^{(i)}) - F_l(x)] \leqslant 0.$$

则方程(1′)在区间 $(-t_{n+1}, t_{n+1})$ 上至少存在 n 个周期解．

证．我们先证明：方程 (3),(3′) 的解 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$，当 $y_1(0) = y_2(0)$，且 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ 均与直线 $x = t_k$ 相交，那么

$$(-1)^k y_1(t_k) > (-1)^k y_2(t_k), \quad k \neq 0. \tag{15}$$

当 k 为奇数，在区间 $[0, t_1]$ 上应用引理 2 得 $y_1(t_1) < y_2(t_1)$．又在区间 $[t_1, t_3]$, $[t_3, t_5]$, $\cdots [t_{k-2}, t_k]$上逐次应用引理 1，则有 $y_1(t_3) < y_2(t_3)$, $y_1(t_5) < y_2(t_5)$, $\cdots$, $y_1(t_{k-2}) < y_2(t_{k-2})$, $y_1(t_k) < y_2(t_k)$．当 k 为偶数，在 $[t_0, t_2]$, $[t_2, t_4]$, $\cdots$, $[t_{k-2}, t_k]$ 上逐次应用引理 1，则有 $y_1(t_2) > y_2(t_2)$, $y_1(t_4) > y_2(t_4)$, $\cdots$, $y_1(t_{k-2}) > y_2(t_{k-2})$, $y_1(t_k) > y_2(t_k)$．(15)式得证．回到方程 (1′)，当 (1′) 的解 $y = y(x)$ 同时与直线 $x = -t_k$, $x = t_k$ 相交，则

$$(-1)^k y(-t_k) < (-1)^k y(t_k), \quad k \neq 0. \tag{15'}$$

k 为奇(偶)数，过点 $(t_k, 0)$, $(-t_k, 0)$ 作方程 (1′) 的负 (正) 轨线 $y = \bar{y}_k(x)$　$y = \underline{y}_k(x)$ $(y = \underline{y}_k(x), y = \bar{y}_k(x))$．由(15′)式得：$\bar{y}_k(-t_k) > 0$, $\underline{y}_k(t_k) < 0$ $(\underline{y}_k(-t_k) < 0, \bar{y}_k(t_k) > 0)$．因此，轨线 $= \bar{y}_k(x)$, $y = \underline{y}_k(x)$ 及直线 $x = t_k$, $x = -t_k$ 构成环域的境界线 Γ_k，方程 (1′) 的轨线穿进(出) Γ_k. Γ_k, $\Gamma_{k+1} (k \neq 0, n+1)$ 构成 n 个 Bendixson 环域．根据环域定理，在环域 Γ_k, Γ_{k+1} 中至少存在一个极限环．且最内的一个是内侧不稳定(稳定)的，最外的一个是外侧不稳定(稳定)的．方程(1′)在 $(-t_{n+1}, t_{n+1})$ 中至少存在 n 个极限环．定理 1 证毕．

引理 3．对于方程 (1′)，设 $0 \leqslant a < b$，并设方程 (1′) 的轨线 $y = y(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 相交，则轨线 $y = y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上发散量的积分为：

$$\left(\ln\left|\frac{F(b) - y(a)}{F(a) - y(a)}\right| + \int_a^b \frac{x(F(b) - F(x))dx}{(F(b) - y(x))(F(x) - y(x))^2}\right)\operatorname{sgn}(y(a) - F(a)). \tag{16}$$

证．不妨设 $y(a) - F(a) > 0$．类似引理 1 的论证，由于 $y = y(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 相交，所以 $y(x) - F(x) > 0$, $x \in (a, b)$．$y = y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的发散量积分为：

$$-\int_{[a,b]} F'(x)dt = \int_a^b \frac{F'(x)dx}{F(x) - y(x)} = \int_a^b \frac{F'(x) - y'(x) + y'(x)}{F(x) - y(x)}dx$$

$$= \ln\left|\frac{F(b) - y(b)}{F(a) - y(a)}\right| + \int_a^b \frac{y'(x)dx}{F(x) - y(x)}$$

$$= \ln\left|\frac{F(b)-y(a)}{F(a)-y(a)}\right| + \ln\left|\frac{F(b)-y(b)}{F(b)-y(a)}\right| + \int_a^b \frac{xdx}{(F(x)-y(x))^2}$$

$$= \ln\left|\frac{F(b)-y(a)}{F(a)-y(a)}\right| + \int_a^b \frac{-y'(x)dx}{F(b)-y(x)} + \int_a^b \frac{xdx}{(F(x)-y(x))^2}$$

$$= \ln\left|\frac{F(b)-y(a)}{F(a)-y(a)}\right| + \int_a^b \frac{x(F(b)-F(x))dx}{(F(b)-y(x))(F(x)-y(x))^2},$$

类似地可以证明 $y(a)-F(a)<0$ 的情况. 引理 3 证毕.

推论 1. 设方程(1′)满足引理 3 的条件,且 $F(b)-F(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$, $x\in[a,b]$, 则方程(1′)的解 $y=y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上发散量的积分非正(非负).

推论 2. 设方程 (1′) 满足引理 3 的条件,且 $F(a)=F(b)=0$, 当 $x\in[a,b]$ 时, $F(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$ 方程(1′)的轨线 $y=y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的发散量积分非负(非正),且为:

$$\left(\int_a^b \frac{xF(x)dx}{y(x)(F(x)-y(x))^2}\right)\operatorname{sgn}(y(a)). \tag{16′}$$

引理 4. 设方程(3),(3′)满足定理 1 条件,且 $F_1(x)=-F_2(x)$, $y=y(x)$ 是方程(1′)的轨线,且与直线 $x=t_k$, $x=-t_k$ 相交. 那么有:

$$d_k=(-1)^k\left(-\int_{[-t_k,-t_{k-2}]} f(x)dt-\int_{[t_{k-2},t_k]} f(x)dt\right)<0,\ k\neq 0,1. \tag{17}$$

证. 我们仅证明 k 为奇数, $y(0)>0$ 的情况. 设方程 (3), (3′) 对应于 $y=y(x)$ 的解是 $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$. 由 (15) 式得:

$$y_1(t_{k-2})<y_2(t_{k-2}), \tag{18}$$

$$y_1(t_{k-1})>y_2(t_{k-1}), \tag{18′}$$

$$y_1(t_k)<y_2(t_k). \tag{18″}$$

由于 $F(x)$ 的对称性,我们令 $T_k^{(1)}=T_k^{(2)}=T_k$. 在 $[t_{k-2},t_k]$ 上, 定义方程 (4), (4′), 设 $y=y_1^*(x)$, $y=y_2^*(x)$ 分别是 (4), (4′) 式的解, 且 $y_2(t_{k-2})=y_2^*(t_{k-2})=y_1^*(t_{k-2})$. 那么由 (5),(10),(15′)式,且注意到当 $x\in[t_{k-2},t_{k-1}]$ 时 $y_2^*(x)=y_2(x)$,则有:

$$y_1(x)>y_1(t_{k-1})>y_2(t_{k-1})>y_2(x+T_{k-1}),\ x\in[t_{k-2},t_{k-1}], \tag{19}$$

$$y_2(x)=y_2^*(x)>y_1^*(x+T_{k-1})\geqslant y_1(x+T_{k-1}),\ x\in[t_{k-2},t_{k-1}]. \tag{19′}$$

又因为 $|y(x)|\geqslant|F_i(x)|$, $|y(x)|>|F_i(x+T_{k-1})|$, 当 $x\in[t_{k-2},t_{k-1}]$ 时,所以

$$y^2(x)\geqslant|F_i(x)\cdot F_l(x+T_{k-1})|,\ x\in[t_{k-2},t_{k-1}]. \tag{21}$$

由 (16) 式,得:

$$d_k=-1\left(-\int_{[-t_k,t_{k-2}]} f(x)dt-\int_{[t_{k-2},t_k]} f(x)dt\right)=\int_{[t_{k-2},t_k]}(f_1(x)-f_2(x))dt$$

$$=\int_{t_{k-2}}^{t_k}\frac{xF_2(x)dx}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2}-\int_{t_{k-2}}^{t_k}\frac{xF_1(x)dx}{y_1(x)(F_1(x)-y_1(x))^2}$$

$$\leqslant\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\left(\frac{xF_2(x)}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2}-\frac{xF_1(x)}{y_1(x)(F_1(x)-y_1(x))^2}\right)dx$$

$$+\int_{t_{k-2}+T_{k-1}}^{t_{k-1}+T_{k-1}}\left(\frac{xF_2(x)}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2}-\frac{xF_1(x)}{y_1(x)(F_1(x)-y_1(x))^2}\right)dx$$

$$= \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{xF_2(x)dx}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2} - \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{(x+T_{k-1})F_1(x+T_{k-1})dx}{y_1(x+T_{k-1})(F_1(x+T_{k-1})-y_1(x+T_{k-1}))^2}$$

$$+ \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{(x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1})dx}{y_2(x+T_{k-1})(F_2(x+T_{k-1})-y_2(x+T_{k-1}))^2} - \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{xF_1(x)dx}{y_1(x)(F_1(x)-y_1(x))^2}$$

$$< \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \left(\frac{xF_2(x)}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2} - \frac{xF_1(x+T_{k-1})}{y_1(x+T_{k-1})(F_1(x+T_{k-1})-y_1(x+T_{k-1}))^2} \right) dx$$

$$- \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{T_{k-1}F_1(x+T_{k-1})dx}{y_1(x+T_{k-1})(F_1(x+T_{k-1})-y_1(x+T_{k-1}))^2}$$

$$+ \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \frac{(x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1})(F_1(x)-y_1(x))^2 - xF_1(x)(F_2(x+T_{k-1})-y_1(x))^2}{y_1(x)(F_2(x+T_{k-1})-y_1(x))^2(F_1(x)-y_1(x))^2} dx. \tag{21}$$

由于 $F_1(x+T_{k-1}) \geqslant F_2(x) \geqslant 0$, $x \in [t_{k-2}, t_{k-1}]$ 及 (19′) 式得:

$$y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2 > y_1(x+T_{k-1})(F_1(x+T_{k-1})-y_1(x+T_{k-1}))^2,$$

$$\frac{xF_2(x)}{y_2(x)(F_2(x)-y_2(x))^2} - \frac{xF_1(x+T_{k-1})}{y_1(x+T_{k-1})(F_1(x+T_{k-1})-y_1(x+T_{k-1}))^2} \leqslant 0. \tag{22}$$

由于 $F_2(x+T_{k-1}) \leqslant F_1(x) \leqslant 0$, $x \in [t_{k-2}, t_{k-1}]$, 所以

$$(x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1}) \leqslant xF_1(x),$$

$$y_1^2(x)[(x+T_{k-1})F_2(x+F_{k-1}) - xF_1(x)] \leqslant F_1(x)F_2(x+T_{k-1})[(x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1}) - xF_1(x)]$$

$$\times (x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1})(F_1(x)-y_1(x))^2 - xF_1(x)(F_2(x+T_{k-1})-y_1(x))^2$$
$$= (x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1})(F_1(x))^2 - xF_1(x)(F_2(x+T_{k-1}))^2$$
$$- 2T_{k-1}F_1(x)F_2(x+T_{k-1})y_1(x) + (y_1(x))^2((x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1}) - xF_1(x))$$
$$\leqslant (x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1})(F_1(x))^2 - xF_1(x)(F_2(x+T_{k-1}))^2$$
$$+ F_1(x)F_2(x+T_{k-1})[(x+T_{k-1})F_2(x+T_{k-1}) - xF_1(x)]$$
$$= T_{k-1}F_1(x)F_2(x+T_{k-1})(F_1(x)+F_2(x+T_{k-1})) \leqslant 0. \tag{22′}$$

由 (22), (22′) 式证得 (21) 式为负. k 为偶数, 证明方法一样. $y(0) < 0$ 时由 $F(x)$ 的对称性,结论自然成立. 引理 4 证毕.

引理 5. 对于方程 (1′), 存在 $0 \leqslant a < b$, 有 (1′) 的两条轨线 $\bar{L}$, $\bar{\bar{L}}$ 都与直线 $x=a$, $x=b$ 相交,各有方程 $y=\bar{y}(x)$, $y=\bar{\bar{y}}(x)$. 且 $\bar{\bar{y}}(x) > \bar{y}(x) \geqslant F(x)$ 或 $\bar{\bar{y}}(x) < \bar{y}(x) \leqslant F(x)$, $x \in [a, b]$. 又 $F(b) - F(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$, 则

$$-\int_{\bar{\bar{L}}_{[a,b]}} f(x)dt + \int_{\bar{L}_{[a,b]}} f(x)dt > 0 (<0), \tag{23}$$

证. 设 $\bar{\bar{y}}(x) > \bar{y}(x) \geqslant F(x)$, $x \in [a, b]$, 且仅证大于零的情况, (16) 式得:

$$-\int_{\bar{\bar{L}}_{[a,b]}} f(x)dt + \int_{\bar{L}_{[a,b]}} f(x)dt = \ln\left|\frac{F(b)-\bar{\bar{y}}(a)}{F(a)-\bar{\bar{y}}(a)}\right| + \ln\left|\frac{F(b)-\bar{y}(a)}{F(a)-\bar{y}(a)}\right|$$

$$+ \int_a^b x(F(b)-F(x))\left(\frac{1}{(F(b)-\bar{\bar{y}}(x))(F(x)-\bar{\bar{y}}(x))^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(F(b)-\bar{y}(x))(F(x)-\bar{y}(x))^2}\right) dx.$$

因为 $0 < (\bar{\bar{y}}(a) - F(b))/(\bar{\bar{y}}(a) - F(a)) < 1$, $\bar{\bar{y}}(a) > \bar{y}(a)$, 故

$$(\bar{\bar{y}}(a)-F(b))/(\bar{\bar{y}}(a)-F(a))>(\bar{y}(a)-F(b))/(\bar{y}(a)-F(a)),$$
$$(F(b)-\bar{\bar{y}}(x))(F(x)-\bar{\bar{y}}(x))^2<(F(b)-\bar{y}(x))(F(x)-\bar{y}(x))^2<0.$$

所以

$$1/[(F(b)-\bar{\bar{y}}(x))(F(x)-\bar{\bar{y}}(x))^2]>1/[(F(b)-\bar{y}(x))(F(x)-\bar{y}(x))^2],$$

因而
$$-\int_{\bar{\bar{L}}_{[a,b]}} f(x)dt+\int_{\bar{L}_{[a,b]}} f(x)dt>0,$$

其它情况证明类似. 引理 5 证毕.

定理 2. 设方程 (3),(3′) 满足定理 1 的条件, 又 $F_1(x)=-F_2(x)$, 且在零的任何邻域中 $F_1(x)\neq 0$. τ_k 是 $F(x)$ 在 $[t_k, t_{k+1}]$ $(k\neq 0, n\neq 1)$ 中非零极值点, $F_1(x)$ 在 $[t_k,\tau_k]$ 中广义单调. $F_1'(x)$ 在 (τ_k, t_{n+1}) 中广义单调. 则方程 (1′) 在区间 $(-t_{n+1}, t_{n+1})$ 中有且仅有 n 个极限环.

证. 当 k 为奇数,且 $k\neq n+1$. 若有极限环 L 交于区间 $[t_k,\tau_\tau]$, 我们估算 L 在 $[-t_k, t_k]$ 部分的发散量积分. 由对称性,只需估算 $y=F(x)$ 上面的部分. 由 (16′),(17) 式得:

$$-\int_{L[-t_1,t_1]} f(x)dt=-\int_{[0,t_1]} f_1(x)dt+\int_{[0,t_1]} f_2(x)dt>0,$$

$$-\int_{L[-t_k,t_k]} f(x)dt=-\int_{[-t_1,t_1]} f(x)dt+\sum_{i=1}^{[\frac{k}{2}]}\left(-\int_{[-t_{2i+1},-t_{2i-1}]} f(x)dt-\int_{[t_{2i-1},t_{2i+1}]} f(x)dt\right)$$
$$>-\sum_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} d_{2i-1}>0.$$

又因为 $x\in[t_k,\tau_k]$ 或 $x\in[-\tau_k,-t_k]$ 时, $f(x)\leqslant 0$, 所以证得

$$\oint_L(-f(x))dt>0. \tag{24}$$

因此,当有极限环交于区间 $[t_k,\tau_k]$ 时,至多有一个不稳定的极限环.

又若有两个极限环 $\bar{\bar{L}}\supset\bar{L}$ 交于区间 (τ_k, t_{k+1}). 由于当 $0\leqslant x\leqslant\tau_k$ 时 $F_1(\tau_k)\leqslant F_1(x)$, $F_2(\tau_k)\geqslant F_2(x)$, 由(23)式在 $y=F(x)$ 的上面部分的发散量积分为:

$$-\int_{\bar{\bar{L}}_{[-\tau_k,\tau_k]}} f(x)dt+\int_{\bar{L}_{[-\tau_k,\tau_k]}} f(x)dt=\left(\int_{\bar{\bar{L}}_{[0,\tau_k]}}(-f_1(x))dt-\int_{\bar{L}_{[0,\tau_k]}}(-f_1(x))dt\right)$$
$$-\left(\int_{\bar{\bar{L}}_{[0,\tau_k]}}(-f_2(x))dt-\int_{\bar{L}_{[0,\tau_k]}}(-f_2(x))dt\right)<0. \tag{25}$$

令 $v=y-F(x)$, 将(1′)式化为等价方程组:

$$\begin{cases}\dot{v}=-x-f(x)v,\\ \dot{x}=v.\end{cases} \tag{1″}$$

我们在 X-V 平面上讨论方程(1″),在带域 $t_k<x<t_{k+1}$ 中,令 $x=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$, 方程(1″)化为:

$$\dot{\theta}=-1-f(\rho\cos\theta)\sin\theta\cos\theta,$$
$$\dot{\rho}=-\rho\sin^2\theta f(\rho\cos\theta).$$

记直线 $x=\tau_k$ 与 $\bar{L}$ 之交点为 C, D $(v_C>0, v_D<0)$. 又记射线 OC, OD 与 x 正半

轴的夹角为 θ_2, θ_1，$-\pi/2 < \theta_1 < 0 < \theta_2 < \pi/2$，射线与 $\bar{\bar{L}}$ 的交点分别为 C^*, D^*．$\rho = \bar{\rho}(\theta)$，$\rho = \bar{\bar{\rho}}(\theta)$ 分别是轨线段 $\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{C^*D^*}$ 的极坐标表示．$\bar{\bar{\rho}}(\theta) > \bar{\rho}(\theta)$，当 $\theta_1 < \theta < \theta_2$．

$$-\int_{\overset{\frown}{C^*D^*}} f(x)\,dt + \int_{\overset{\frown}{CD}} f(x)\,dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(\bar{\bar{\rho}}\cos\theta)d\theta}{-1 - f(\bar{\bar{\rho}}\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}$$

$$- \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(\bar{\rho}\cos\theta)d\theta}{-1 - f(\bar{\rho}\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(f(\bar{\rho}\cos\theta) - f(\bar{\bar{\rho}}\cos\theta))d\theta}{[-1 - f(\bar{\bar{\rho}}\cos\theta)\cos\theta\sin\theta][-1 - f(\bar{\rho}\cos\theta)\cos\theta\sin\theta]}. \tag{26}$$

由于 $f(\bar{\rho}\cos\theta) - f(\bar{\bar{\rho}}\cos\theta) < 0$，故(26)式小于零．再结合(25)式得

$$\oint_{\bar{\bar{L}}} (-f(x))dt - \oint_{\bar{L}} (-f(x))dt < 0. \tag{27}$$

若有多个极限环交于区间 (τ_k, t_{k+1})，设最外一个为 L^*，L^* 外侧不稳定，所以，

$$\oint_{L^*} (-f(x)dt \geqslant 0. \tag{28}$$

若(28)式不等于零，则由(27)式：与区间 (τ_k, t_{k+1}) 相交的极限环只能是 L^*，L^* 不稳定．若(28)式等于零，作方程：

$$\frac{dx}{dt} = y - F_\alpha(x) = y - (F(x) + R(x)),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x\left(\text{其中 } R(x) = \begin{cases}0, & |x| \leqslant \tau_k, \\ \alpha(|x| - \tau_k)^2, & |x| > \tau_k,\end{cases}\right) \tag{29}$$

当取 $0 < \alpha \ll 1$ 时，L^* 至少分裂为两个闭轨 $\bar{\bar{L}}^* \supset \bar{L}^*$，且有

$$\oint_{\bar{\bar{L}}^*} (-f_\alpha(x))dt \geqslant 0,\ \oint_{\bar{L}^*} (-f_\alpha(x))dt \leqslant 0.$$

此式与(27)式矛盾，故(28)式只能取不等号．因此只有唯一的不稳定环与区间 (τ_k, t_{k+1}) 相交．由于两个不稳定的极限环不能相邻，故只有唯一的不稳定环与 $[t_k, t_{k+1})$ 相交．

当 $k(\neq 0, n+1)$ 为偶数，若有极限环 L 交于 $[t_k, \tau_k]$，由(23)式得：

$$\int_{[-t_k, t_k]} (-f(x))dt = \sum_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} d_{2i-2} < 0.$$

余下的证明与 k 为奇数时类似，故在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 中只有唯一的稳定极限环与之相交．综上所述，在每一个区间 $[t_k, t_{k+1})$，$k \neq 0, n+1$ 中恰有一个极限环与之相交．稳定的和不稳定的相间排列．定理 2 证毕．

推论 3．对于方程(1′)，设 $F(x) = \pm h(x)\sin x$，$h(x)$ 是非负的，在 x 正半轴上不减的，二阶可微的偶函数，且满足：

$$\delta(x) = h^2(x) - h(x)h''(x) + 2(h'(x))^2 > 0,\ x > 0, \tag{30}$$

则方程(1′)在 $|x| < (n+1)\pi$ 中恰有 n 个周期解．

证．不妨设 $F(x) = h(x)\sin x$，不然只要作变换：$x_1 = -x$，$\tau = -t$ 即可．又有 $h(x) > 0$，$x > 0$．否则设有 $s > 0$，使 $h(s) = 0$，则 $h(x) \equiv 0$，$x \in (0, s]$．故 $\delta(x) = 0$，$x \in (0, s]$．这与(30)式矛盾．

定理 1 的条件显然满足,又 $F(x) = -F(x)$, 故只需验证定理 2 的其它条件. 定理 2 中定义的 τ_k 由方程 $F'(x) = h'(x)\sin x + h(x)\cos x = 0$ 或 $-h'(x)/h(x) = \operatorname{ctg} x$ 的根所确定. 由(30)式则有:

$$[-h''(x)h(x) + (h'(x))^2]/h^2(x) > -1 - (h'(x))^2/h^2(x)$$

$$(-h'(x)/h(x))'|_{x=\tau_k} > -1/\sin^2\tau_k = (\operatorname{ctg} x)'|_{x=\tau_k}$$

故曲线 $y = -h'(x)/h(x)$ 与曲线 $y = \operatorname{ctg} x$ 在带域 $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k = 0, 1, \cdots, n$ 中只相交一次,因此区间 $[k\pi, (k+1)\pi]$ 中存在且仅存在一个 τ_k.

$F(x)$ 的拐点的横坐标是方程 $F''(x) = (h''(x) - h(x))\sin x + 2h'(x)\cos x = 0$ 的根. 记 $\Sigma = \{x | x > 0, h'(x) = 0\}$ $\bar{\Sigma} = \{x | x > 0, h'(x) \neq 0\}$. $\bar{\Sigma}$是开集,若 $F(x)$ 的一个拐点的横坐标落在 $\bar{\Sigma}$中,必落在 $\bar{\Sigma}$ 的某个开区间 σ 中,它定义在 σ 中的曲线 $y=(h(x) - h''(x))/2h'(x)$ 和曲线 $y = \operatorname{ctg} x$ 一个交点的横坐标. 而 τ_k 是曲线 $y = -h'(x)/h(x)$ 和曲线 $y = \operatorname{ctg} x$ 交点的横坐标, $y = \operatorname{ctg} x$ 在 $k\pi < x < (k+1)\pi$. 中单调下降且只与曲线 $y = -h'(x)/h(x)$ 相交一次. 又由(30)式得

$$(h(x) - h''(x))/2h'(x) > -h'(x)/h(x),$$

即曲线 $y = (h(x) - h''(x))/2h'(x)$, $x \in \sigma$ 在曲线 $y = -h'(x)/h(x)$ 的上方, 故曲线 $y = (h(x) - h''(x))/2h'(x)$, $x \in \sigma$ 与曲线 $y = \operatorname{ctg} x$ 在 $k\pi < x < (k+1)\pi$ 中的一枝的交点的横坐标小于 τ_k.

若 $F(x)$ 的拐点的横坐标落在 Σ 中,则有

$$\delta(x) = h^2(x) - h(x)h''(x) > 0, \quad x \in \Sigma,$$

故 $h(x) - h''(x) > 0$, $x \in \Sigma$. $F(x)$ 的拐点横坐标是

$$F''(x) = (h''(x) - h(x))\sin x = 0, \quad x \in \Sigma$$

的根,它只能是 $k\pi$.

因此当(30)式成立时,在区间 $(\tau_k, (k+1)\pi)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ 中 $F(x)$ 无拐点. 所以定理 2 的条件满足,故方程(1')在 $|x| < (n+1)\pi$ 中恰有 n 个周期解. 推论 3 证毕.

例 1. 在方程(1')中取 $F(x) = \mu|x|^\alpha \sin x$, $\mu > 0$, $\alpha \geqslant 0$, 则

$$\delta(x) = \mu^2(x^{2\alpha} + \alpha(\alpha+1)x^{2\alpha-2}) > 0, \quad x > 0.$$

例 2. 在方程(1')中取 $F(x) = e^{\alpha|x|}\sin x$, $\alpha \geqslant 0$, 则

$$\delta(x) = (1 + \alpha^2)e^{2\alpha x} > 0, \quad x > 0.$$

例 3. 在方程(1')中取 $F(x) = \ln(1 + |x|)\sin x$,

$$\delta(x) = (\ln(1+x))^2 + (\ln(1+x))/(1+x)^2 + 2/(1+x)^2 > 0, \quad x > 0,$$

故在例 1,2,3 中方程(1')在 $|x| < (n+1)\pi$ 中恰有 n 个周期解.

本文是在导师秦元勋教授指导下完成的,并得到曾宪武同志的帮助,在此谨表感谢.

参 考 文 献

[1] 张芷芬,中国科学,1980,10:941.
[2] 秦元勋,微分方程所定义的积分曲线,科学出版社,1959.
[3] 曾宪武,数学学报,**9**(1978),263—268.
[4] 黄克成,华东水利学院学报,**1**(1979),1-8.