

一种优化的交错变网格有限差分法及其在井间声波中的应用

赵海波 王秀明

(中国科学院声学研究所, 北京 100080. E-mail: zhaohaibo1019@126.com)

摘要 提出了一种优化交错变网格有限差分算法, 并在二维速度-应力关系的弹性波方程中实现. 利用频散关系守恒准则构造了四阶精度的差分算子, 该算法属于连续变网格方法, 不需要在精细网格和粗糙网格之间进行插值. 将优化算法的数值结果与解析解及八阶规则交错网格差分算法进行了比较, 验证了该算法的精度. 与基于Taylor展开的变网格有限差分算法比较可知, 优化算法的频散特性较好, 在数值模拟中可使用更粗糙的网格. 将提出的优化算法应用于复杂的井间声波模型. 该数值实例表明, 优化算法可以节省大量的计算内存和计算时间, 同时具有优良的稳定性.

关键词 有限差分 变网格 弹性波 频散关系守恒准则 井间声波

井间声波技术有效地避开了地表覆盖层的影响, 可采用高频声源, 具有比地面地震勘探高 10~100 倍的分辨率. 井间声波能够提供高精度的储层信息, 与高分辨率三维地震、多维多分量地震和四维地震一并为当今具有极大潜力的四大勘探方法^[1]. 这里所说的声波, 是指固体介质中传播的纵波和横波. 声波数值模拟也是地球物理领域十分重要的研究课题. 通过数值模拟, 可加强对声波在复杂介质中的传播规律的认识, 检验声波勘探方法技术(包括数据采集、资料处理和解释)的适用性. 声波数值模拟的方法有多种, 其中有限差分方法(FD)最为普遍, 主要是因其在处理复杂介质模型中的灵活性和计算效率. 井间声波数值模拟存在多尺度问题, 孔径、套管和水泥环的尺度在厘米级, 而井间距离一般在几百米到一公里. 对于常规均匀网格有限差分方法, 为了在数值计算中包含小尺度的井孔, 需要在离散空间时用较细的网格, 但这会造成对井间地层空间的过密采样, 近而造成不必要的计算机资源浪费. 当然其他的模拟方法, 如谱元法和伪谱法也各有自己的优势, 本文在此不做讨论, 具体参见文献^[2].

为了提高有限差分的计算效率, 减少计算内存损耗, 可以根据本地参数优化空间网格大小的布局. 基于此目的, 人们提出了变网格(或称非规则网格)方法, 变网格技术可用在很多具体问题中, 如在自由界

面附近网格的精细划分^[3~5]、井孔声波数值模拟^[6~8]、地表低速带模拟^[9,10]、非平面界面模拟^[11,12]以及断层或裂缝等物性非连续处精细配置网格^[13,14]. 通常来说, 变网格方法主要有两种: 连续变网格法(非均匀变网格)和非连续变网格法. 连续变网格方法是优化布置网格大小, 网格尺寸连续变化^[3,6,7,12,14~16]. 在给定的模型结构中, 连续变网格方法允许灵活的网格布置, 但是空间网格尺寸只能沿着坐标轴变化. 在非连续变网格方法中, 网格间距不同的区域之间有一部分重叠. 在重叠的区域通过线性插值实现不同网格间距区域之间的波场变量传递^[9,17], 或者利用波动方程实现波场变量连续^[10,18]. 当处理三维问题时, 后者同样需要在某一个方向进行变量插值. 非连续变网格方法可以最大程度地提高计算效率, 但线性插值有时会降低数值模拟的精度^[17]. 另一种方法可以避免上述的插值, 在网格重叠区域使用有限元法, 在网格均匀的区域使用有限差分法, 但这种技术的实现较为复杂, 因为它需要两个根本不同的计算方法^[19]. 此外, 基于对截断Taylor级数展开采用局部插值补偿, 最近Yang等人^[20,21]提出了一种ONADM(optimal nearly analytic discrete method)数值算法, 该方法在粗糙网格下仍能保持很小的数值频散, 在大尺度的声场模拟中可以用来提高计算效率.

对二维井间声波的正演模拟, 其空间尺度的较

大变化主要是在水平方向,只需在井孔附近进行网格的精细划分,这时采用连续变网格方法较为方便.对于连续变网格有限差分算法,差分算子的系数求取可以利用Taylor展开^[12,15]或者Langrange插值方法^[22,23].实际上,利用这两种方法得到的差分算子系数是一致的.Tam和Webb^[24]提出了频散关系守恒准则(DRP),该思想的主要内涵是通过给定的波数范围内匹配数值波数和真实波数来求取有限差分算子系数.Ye和Chu^[25]利用DRP思想求取二阶差分算子系数,并用在声波方程的数值模拟中.

本文在前人工作基础上,利用DRP方法构建了一阶空间差分算子系数,首次建立了一种优化的速度-应力关系的交错变网格有限差分算法,文中详细地分析了这种优化算法的精度和计算效率,还把该算法的计算结果和目前流行的差分算法以及解析式结果进行了比较,并模拟一例复杂的井间声波模型.

1 交错网格的波动方程有限差分格式

在介绍本文提出的算法之前,首先回顾一下目前流行的弹性波波动方程的差分格式.一般地,各向同性完全弹性介质的弹性动力学方程为

$$\rho \dot{v}_i = \tau_{ij,j}, \quad (1)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \lambda \delta_{ij} v_{l,l} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (2)$$

式中 v_i 为质点运动速度; τ_{ij} 为应力张量; 变量上方的点表示对时间求导; λ 和 μ 为拉梅系数; ρ 为介质密度; δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

如时间导数采用二阶精度的差分近似,在二维 x - z 平面情况下,方程(1)和(2)交错网格形式的离散方程可写为^[26]

$$v_{x(i+1/2,j+1/2)}^{(n+1/2)} = v_{x(i+1/2,j+1/2)}^{(n-1/2)} + \Delta t \left[D_x \tau_{xx(i+1/2,j+1/2)}^{(n)} + D_z \tau_{xz(i+1/2,j+1/2)}^{(n)} \right] / \rho, \quad (3)$$

$$v_{z(i,j)}^{(n+1/2)} = v_{z(i,j)}^{(n-1/2)} + \Delta t \left[D_x \tau_{xz(i,j)}^{(n)} + D_z \tau_{zz(i,j)}^{(n)} \right] / \rho, \quad (4)$$

$$\tau_{xx(i,j+1/2)}^{(n+1)} = \tau_{xx(i,j+1/2)}^{(n)} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu) D_x v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} + \lambda D_z v_{z(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} \right], \quad (5)$$

$$\tau_{zz(i,j+1/2)}^{(n+1)} = \tau_{zz(i,j+1/2)}^{(n)} + \Delta t \left[\lambda D_x v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} + (\lambda + 2\mu) D_z v_{z(i,j+1/2)}^{(n+1/2)} \right], \quad (6)$$

$$\tau_{xz(i+1/2,j)}^{(n+1)} = \tau_{xz(i+1/2,j)}^{(n)} + \Delta t \mu \left[D_x v_{z(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} + D_z v_{x(i+1/2,j)}^{(n+1/2)} \right]. \quad (7)$$

在上述方程中,变量的上角标 n 代表时间离散指数,下脚标括弧中的 i 和 j 分别为 x 和 z 方向的空间位置节点指数, Δt 为时间采样步长, D_x 和 D_z 分别代表 x 和 z 方向空间差分算子.根据具体需要,我们可以构造不同精度阶数的差分算子,本文基于DRP准则构造了四阶精度的差分算子,下面将给予详细介绍.交错网格方法将速度和应力分量放置在不同位置处,如图1. dx_i 是 x 方向上第 i 个和第 $i+1$ 个网格点之间的间距, dz_j 是 z 方向上第 j 个和第 $j+1$ 个网格点之间的间距.

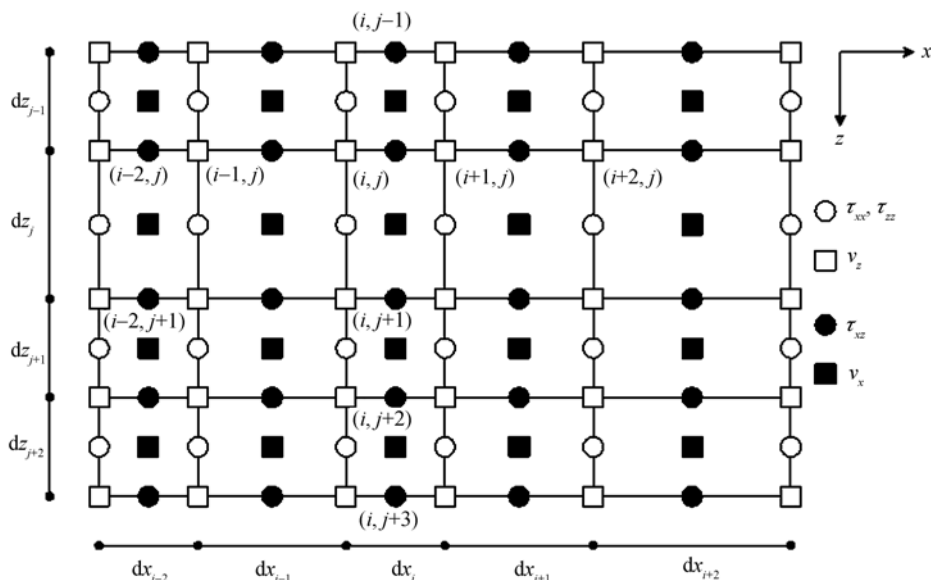


图1 空间网格非规则分布下,交错网格算法中场变量相对位置示意图

2 优化的变网格有限差分算子系数

令 f 代表质点速度分量 (v_x 和 v_z) 或者应力张量分量 (τ_{xx} , τ_{zz} 和 τ_{xz}). 根据有限差分方法构造空间微分的思想, 对于四阶精度的有限差分, 变量 f 的 x 方向空间一阶偏导数可写为如下形式:

$$D_x f(x, z) = c_1 f(x + \Delta_1, z) + c_2 f(x - \Delta_2, z) + c_3 f(x + \Delta_3, z) + c_4 f(x - \Delta_4, z), \quad (8)$$

式中 D_x 为四阶精度差分算子, c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为待定的差分算子系数. 上式中的 Δ_i 可以利用图 2 给出的模板计算 [15]. 由于在交错网格有限差分算法中, 速度和应力的空间采样点的位置不同, 因此要分两种情况确定 Δ_i . 图 2(a) 显示了差分算子的中心位于第 i 和 $i+1$ 个节点之间时确定 Δ_i 的模板, 即场变量的空间位置在两个节点中间时如何计算 Δ_i (图 2(a)). 图 2(b) 中的差分算子中心在第 i 个网格节点处, 即场变量的空间位置在节点上的情况 (图 2(b)). 与上面的做法类似, 对于四阶精度的差分算子 D_z , 变量 f 的 z 方向空间一阶偏导数可写为

$$D_z f(x, z) = c_1 f(x, z + \Delta_1) + c_2 f(x, z - \Delta_2) + c_3 f(x, z + \Delta_3) + c_4 f(x, z - \Delta_4), \quad (9)$$

只要将图 2 中的 x 换为 z 即可实现 (9) 式中空间步长 Δ_i 的计算.

从上面的论述可以看到, 处理 D_x 和 D_z 的方法是一致的. 现以 D_x 为例, 说明如何利用 DRP 准则确定差分算子系数. 由于目前仅考虑变量 f 的 x 方向导数, 基于平面波分析, 可令 $f(x, z) = f_z e^{ikx}$, 其中 k 是 x 方向的波数, f_z 为平面波幅度, 仅与 z 方向有关. 将此关系代入到 (8) 式中, 得到

$$ik_e = c_1 e^{ik\Delta_1} + c_2 e^{-ik\Delta_2} + c_3 e^{ik\Delta_3} + c_4 e^{-ik\Delta_4}, \quad (10)$$

式中 k_e 是 x 方向差分算子的有效数值波数. 实际上, 对 (8) 式进行关于 x 变量的空间 Fourier 变换可得到上

式. 网格间距相同的情况下, 利用图 2 中的对称模板计算出的有效波数是实数. 而当空间网格尺寸不一致时, 有效波数将是一复数. 在给定的波数域中, 为保证有限差分算子的 Fourier 变换更好地近似于变量偏导数的 Fourier 变换, 需要优化选择差分算子系数 c_i , 使得如下积分误差 E 最小 [24,25].

$$E = \xi \int_0^\eta [k - \text{Re}(k_e)]^2 dk + (1 - \xi) \int_0^\eta [\text{Im}(k_e)]^2 dk, \quad (11)$$

式中 $\eta = 2\pi/N$ 是预先给定的波数优化范围上限, N 是 Nyquist 频率处最小波长采样点数 (本文中, $N = 3$). ξ 是加权系数, 主要是用于平衡有效数值波数的实部和虚部, 使得数值波数较好地与真实波数相匹配. 积分误差 E 最小的必要条件为

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (12)$$

上式给出了关于 c_i 的线性方程组, 解如下方程组可以计算得到 c_i :

$$a_{ij} c_j = b_i, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{i+j} \int_0^\eta \sin(k\Delta_i) \sin(k\Delta_j) dk \\ &\quad + (1/\xi - 1) \int_0^\eta \cos(k\Delta_i) \cos(k\Delta_j) dk, \\ b_i &= (-1)^{i+1} \int_0^\eta k \sin(k\Delta_i) dk. \end{aligned}$$

在实际数值模拟中, 当空间网格的布局确定之后, 就可以计算出空间上每个节点位置处的差分算子系数 (包括 x 和 z 方向), 可把这些差分算子系数作为预先确定的参数存储, 以便在每次迭代循环中使用. 对于加权系数 ξ , 一些实际计算表明, $\xi = 0.8$ 是较好的选择.

Pitarka [15] 提出了一种基于 Taylor 展开的变网格有限差分法 (本文称为 Taylor 变网格算法), 其主要做法为: 对 (10) 式右端的指数进行 Taylor 展开, 误差为

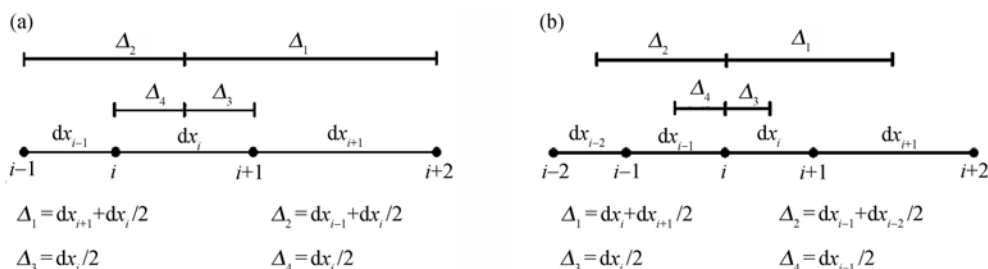


图 2 计算差分算子中的 Δ_i 示意图

(a) 差分算子的中心位于第 i 个和第 $i+1$ 个节点之间; (b) 差分算子的中心在第 i 个节点上

$O(\Delta_i^4)$, 并令两边系数相等, 可得到如下 4 个线性方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Delta_1 & -\Delta_2 & \Delta_3 & -\Delta_4 \\ -\Delta_1^2 & -\Delta_2^2 & -\Delta_3^2 & -\Delta_4^2 \\ -\Delta_1^3 & \Delta_2^3 & -\Delta_3^3 & \Delta_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

解此线性方程组即可得到差分算子系数 c_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

表 1 比较了本文的优化算法和 Taylor 算法的差分系数, 网格模版使用的是图 2(b), 第一列中的比值为 $dx_{i-2}:dx_{i-1}:dx_i:dx_{i+1}$. 无论是优化算法还是 Taylor 算法, 当模版上的间距分布均匀时, 计算出的差分系数是对称的(c_1 和 c_2 , c_3 和 c_4). 但是当间距不一致时, 差分系数的分布没有规则. 从差分算子系数分布上, 不能直接比较出两者的优劣. 接下来我们从谱误差角度分析. 图 3 给出了优化差分算子的谱误差, 并与相同精度阶数的 Taylor 变网格有限差分算子((14)式)作了比较. 如果曲线越靠近精确解($Re(k_e)\Delta_{\min} = k\Delta_{\min}$), 说明频散误差越小. 图 3 中显示了两种方法在相同的网格模版(图 2(a))下的 $Re(k_e)\Delta_{\min}$ 与 $k\Delta_{\min}$ 的关系, r 代表粗网格和细网格之间比例. 在相同的网格配置下, 图 3 表明了本文的优化算法要比 Taylor 算法的频散误差小. 在考虑网格变化的比例时, 优化算法允许使用较大的网格尺寸变化比例. 因此, 与 Taylor 算法相比, 优化变网格方法在采用相同的网格配置下可以给出更精确的数值结果, 或使用较少的网格单元提高计算效率.

表 1 优化算法和 Taylor 算法的差分系数

		c_1	c_2	c_3	c_4
1:1:1:1	Taylor	-0.0417	0.0417	1.1250	-1.1250
	优化	-0.0725	0.0725	1.1917	-1.1917
1:1:2:2	Taylor	-0.0397	-0.0889	0.7000	-0.5714
	优化	-0.1419	-0.1015	0.9065	-0.6798
1:1:3:3	Taylor	-0.0250	-0.2083	0.4583	-0.2250
	优化	0.2392	-0.3343	0.5005	-0.8039

3 数值算例

在如下的数值模拟中, 采用的声源为 Ricker 子波函数:

$$S(t) = [1 - 2(\pi f_p t)^2] e^{-(\pi f_p t)^2}, \quad (15)$$

式中 f_p 为峰值频率, 该声源的最大频率是峰值频率的 3 倍, Nyquist 频率是峰值频率的 2 倍. 同时, 本文所

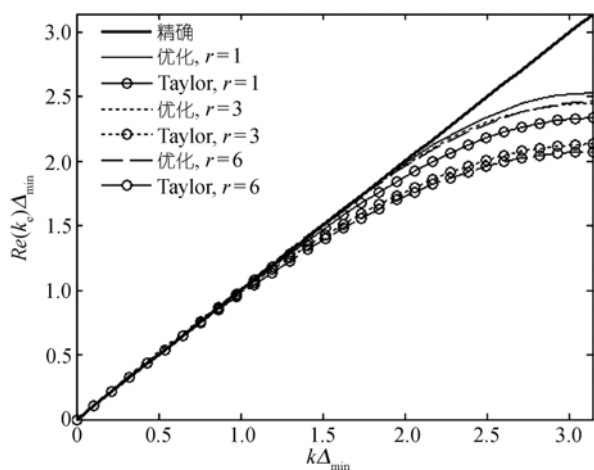


图 3 优化变网格方法与 Taylor 变网格方法的谱误差比较

使用的吸收边界条件是完美匹配层技术, 在交错网格有限差分算法中实现此技术可参见文献 [27].

变网格有限差分首先要确定空间网格尺寸, 然后再确定时间步长的大小. 对于四阶精度的交错变网格有限差分而言, 为了保证数值算法的精度, 当满足如下频散条件 [15] 时, 空间频散可大大减小, 即

$$h_{\max} < \frac{v_{\min}}{5f_{\max}}, \quad (16)$$

式中 $f_{\max}$ 是声源的最高频率, $v_{\min}$ 是本区域的速度最小值, $h_{\max}$ 为本区域所能使用的网格尺寸的最大值. 可见, (16) 式是一个本地化条件. 在下面的数值算例中可以看到, 优化算法拥有更优的数值频散特性, 最小波长内需要的网格点数从 5 个可以降到 4 个. 本文的优化算法采用全局时间步长, 即时间步长对所有的网格点都是一致的. 时间步长由稳定性条件来确定 [16]:

$$\Delta t < \frac{0.606h_{\min}}{v_{\max}}, \quad (17)$$

式中 $v_{\max}$ 和 $h_{\min}$ 分别代表整个计算区域中的最大速度和最小网格尺度. 对于非均匀介质模型来说, 方程(17)给出的是稳定性条件的下限.

3.1 优化变网格有限差分算法精度

在实际的数值模拟中, 首先考虑模型小尺度区域(或者低速区域)的网格精细划分, 其他区域使用粗糙网格. 然后在精细网格和粗糙网格之间建立过渡带, 过渡带内网格尺寸是逐渐变化的, 变化的比例是整数. 为了避免网格尺寸的较大变化引起的计算误差, 一般选择的变化比例为 2×或 3×. 为了考察我们

提出的优化变网格算法的精度,下面将优化变网格算法的数值结果与Pilant^[28]解析解进行对比,同时也对比了八阶精度的规则交错网格有限差分算法^[29]的数值结果.二维空间下,Pilant推导了均匀无限大弹性介质中垂直力源产生声场的解析解,得出时间域中的质点位移具体表达式为

$$u(x, z, t) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{2\pi\rho v_p^2} H\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \int_{r/v_p}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (r/v_p)^2}} d\tau$$

$$+ \frac{\cos \theta \sin \theta}{\pi\rho r^2} H\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \int_{r/v_p}^t f(t-\tau) \sqrt{\tau^2 - (r/v_p)^2} d\tau$$

$$- \frac{\cos \theta \sin \theta}{2\pi\rho v_s^2} H\left(t - \frac{r}{v_s}\right) \int_{r/v_s}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (r/v_s)^2}} d\tau$$

$$- \frac{\cos \theta \sin \theta}{\pi\rho r^2} H\left(t - \frac{r}{v_s}\right) \int_{r/v_s}^t f(t-\tau) \sqrt{\tau^2 - (r/v_s)^2} d\tau, \quad (18)$$

$$v(x, z, t) = \frac{\cos^2 \theta}{2\pi\rho v_p^2} H\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \int_{r/v_p}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (r/v_p)^2}} d\tau$$

$$+ \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2\pi\rho r^2} H\left(t - \frac{r}{v_p}\right) \int_{r/v_p}^t f(t-\tau) \sqrt{\tau^2 - (r/v_p)^2} d\tau$$

$$+ \frac{\sin^2 \theta}{2\pi\rho v_s^2} H\left(t - \frac{r}{v_s}\right) \int_{r/v_s}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (r/v_s)^2}} d\tau$$

$$+ \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2\pi\rho r^2} H\left(t - \frac{r}{v_s}\right) \int_{r/v_s}^t f(t-\tau) \sqrt{\tau^2 - (r/v_s)^2} d\tau, \quad (19)$$

式中 u 和 v 分别代表质点水平和垂直位移, ρ 为介质密度, v_p 和 v_s 分别为纵波和横波速度. (18)和(19)式中的 $H(\cdot)$ 为 Heaviside 阶跃函数, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ 为接收点与声源的距离, $\theta = \tan^{-1}(x/z)$.

图 4(a)是一个均匀弹性介质模型,模型的长和宽均为 168 m, 纵波速度 $v_p = 4200$ m/s, 横波速度 $v_s = 2700$ m/s, 介质密度 $\rho = 2490$ kg/m³, 其中 S 代表声源, R_1 和 R_2 代表接收器. 图 4(b)是图 4(a)中网格间距过渡带的网格尺寸变化示意图, 平行于 x 方向和 z 方向的过渡带配置相同. 声源为一垂向力源, 峰值频率为 400 Hz. 声源放置在(18 m, 18 m)处, R_1 接收器的位置坐标为(48 m, 48 m), R_2 接收器的位置坐标为(78 m, 78 m). 数值模拟中, 时间步长为 10^{-6} s, 除过渡带外, x 和 z 方向的空间网格步长均为 0.6 m. 过渡带中的网格尺寸从 0.01 m 渐变到 0.27 m, 整个过渡带宽度为 2.4 m. 图 5 和 6 分别是接收器 R_1 和 R_2 处的波形对比结果, 波形曲线给出的是质点速度. 无论在接收器 R_1 点还是在接收器 R_2 点, 优化变网格算法的计算结果与八阶规则交错网格有限差分算法(空间步长为 0.6 m)的结果基本重合, 与解析解的吻合也是令人满意的, 验证了优化变网格算法的合法性. 在目前的离散参数下, $v_{\min}/(h_{\max} \cdot f_{\max}) \approx 4$, 说明优化变网格算法具有较为理想的计算结果, 空间频散特性很小.

图 7 是 0.036 s 时刻质点水平速度分量波场时间快照. 此模型与图 4 的物性及数值离散参数一致, 唯一不同的是 x 和 z 方向的空间步长取为 0.8 m(除过渡

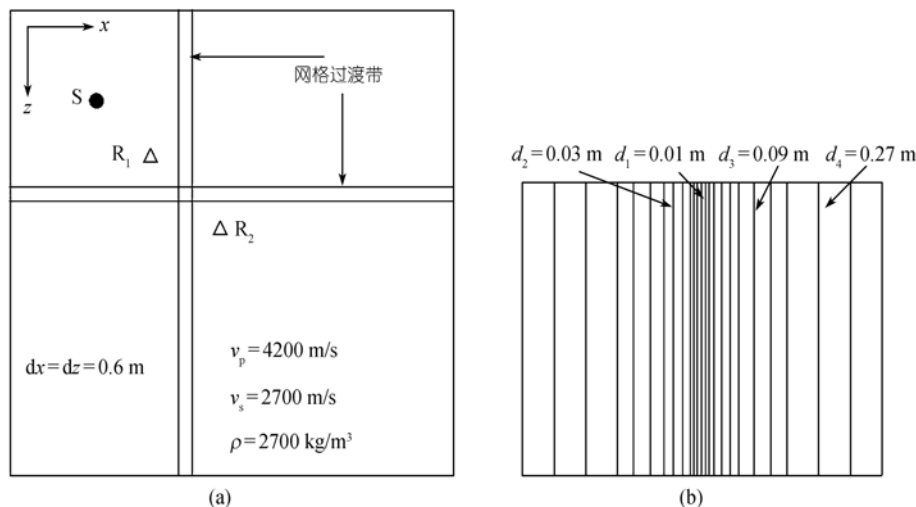
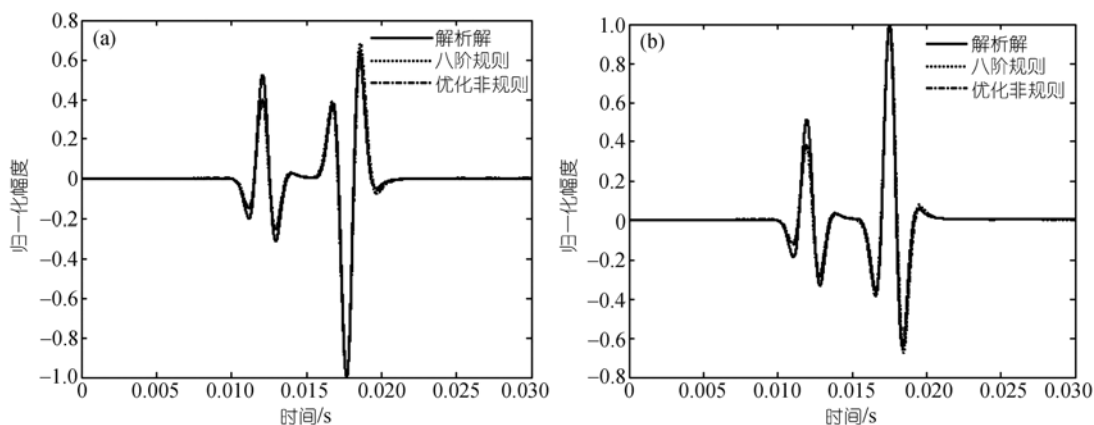
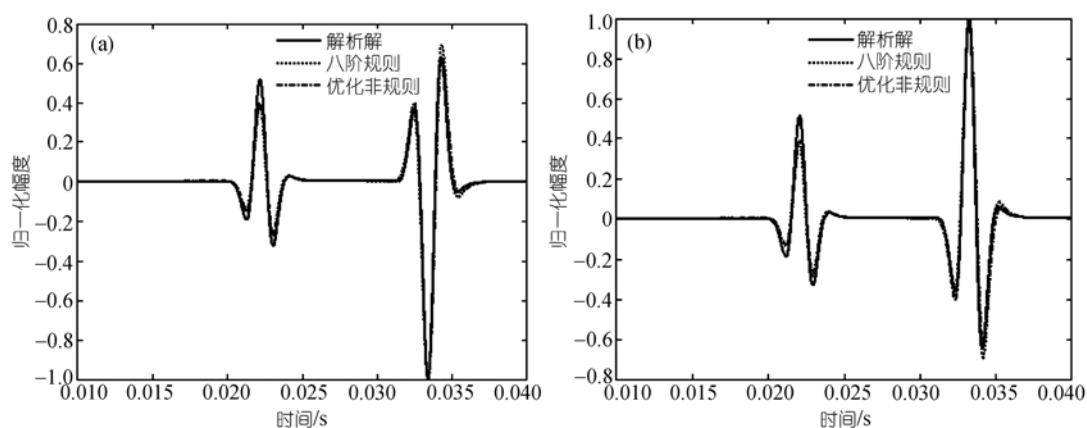


图 4 模型示意图

(a) 均匀弹性介质模型; (b) 过渡带网格间距配置

图5 接收点 R_1 处数值解与解析解对比

(a) 质点速度水平分量; (b) 质点速度垂直分量

图6 接收点 R_2 处数值解与解析解对比

(a) 质点速度水平分量; (b) 质点速度垂直分量

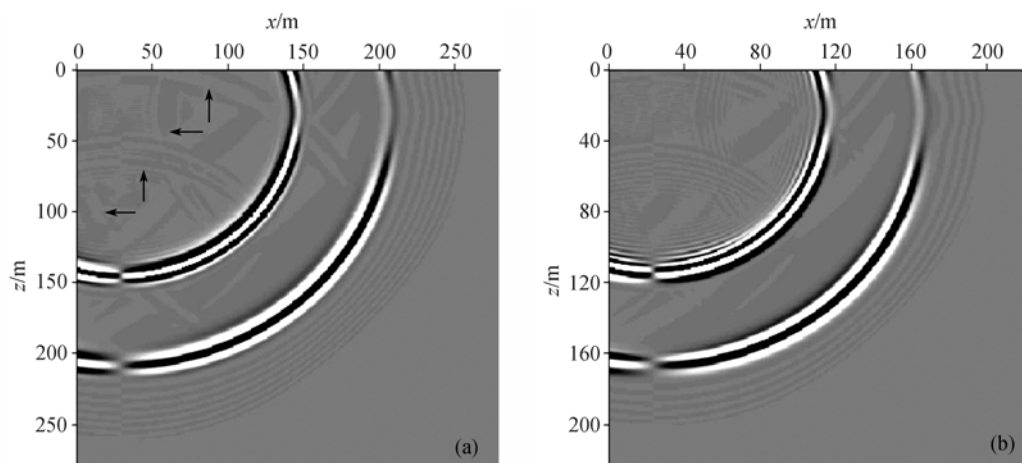


图7 0.036 s 时刻质点速度水平分量波场快照图

(a) 优化变网格算法; (b) Taylor 变网格算法

带区域外). 图 7(a)是利用优化变网格算法得到的快照图, 而图 7(b)对应的是 Taylor 变网格有限差分算法. 可以看到, Taylor 算法的频散比较严重, 而优化算法的频散误差较小. 本例中, 我们采用 $v_{\min}/(h_{\max} \cdot f_{\max}) \approx 3$, 对于优化变网格算法, 这就允许数值模拟计算中可采用更粗糙的网格, 进一步提高计算效率. 图 7 中的箭头指出了由于空间网格尺寸的变化引起的虚假反射, 其产生的原因是由于网格尺寸的变化, 引起了不同网格间距区域的频散关系 $\omega(k)$ 的不同, 从而导致了数值速度上的微小差别. 这些虚假的反射波幅度远远小于直达波的幅度, 虚假信号所引起的误差小于 0.1%.

3.2 井间声波应用

井间声波使用的是井下声源, 声源除了激发体波外, 还激发出很强的管波(低频Stoneley波). 管波沿着发射井的井孔传播, 在阻抗不连续处(井径改变或射孔)形成二次声源, 二次声源激发出与管波相关的模式波向地层中辐射能量, 这些模式波将会在接收井中被接收到^[30,31]. 此外, 体波也会在接收井的阻抗不连续处激发出管波. 一般, 接收器接收到的信号中有很强的管波, 它们常常掩盖了低幅度的反射和透射波信号. 一般地, 在勘探地球物理中, 人们把井间声波在井内产生的管波看成是噪声. 利用数值模拟可以认识声波在井间的传播规律. 同时可以研究管波的传播特征, 有利于提出更好的压制管波的方法, 提高井间声波的解释精度. 下面将利用优化变网格有限差分算法模拟一个非均匀介质的井间模型, 模拟中包括了井孔、套管、水泥环以及射孔. 图 8(a)

是一个井间声波实验方案, 其中包括了两个射孔. 图 8(a)中给出了各种模式波的传播路径, 图 8(b)是相应的人工合成的共炮点道集, 其中字母代表的波至意义如下: T为管波; P为直达纵波; S为直达横波; PT为由P转换的管波; ST为由S转换的管波; TP为由T转换的纵波; TS为由T转换的横波; TPT为由TP转换的管波; TST为由TS转换的管波.

图 9 是某一深度下井间地层模型(垂直坐标不代表绝对深度). 从上到下, 纵波速度 v_p 分别为 4200, 4400, 4300, 4800, 4600, 4950, 5200, 5650 和 4900 m/s, 相应的横波速度为 $v_s = v_p / \sqrt{3}$ m/s, 相应的介质密度为 $\rho = 230 \times (3.28 \cdot v_p)^{0.25}$ kg/m³^[32]. 在此数值实例中, 井孔中的流体、套管和水泥环的纵波速度分别取为 1500, 5500 和 3080 m/s, 密度分别为 1000, 7800 和 1900 kg/m³. 套管和水泥环的横波速度分别为 3200 和 1760 m/s. 井孔的直径为 20 cm, 套管厚度为 2 cm, 水泥环厚度为 4 cm. 采用峰值频率为 500 Hz 的涨缩声源, 位于发射井垂直深度 40 m 处. 一列接收器放置于接收井的井轴上. 用一个矩形代表射孔, 该矩形穿过了套管和水泥环, 并占据了一小部分地层, 射孔中充满与井孔中相同的流体. 其中一个射孔位于发射井垂直深度的 120 m 处, 另一个位于接收井垂直深度的 60 m 处. 在数值模拟中, 时间步长为 0.4 μ s, 垂直方向上的空间采样间距为 0.4 m. 水平方向上, 在井孔附近用 5 mm 的细网格划分, 井间区域的空间步长为 0.4 m. 对于细网格区域与粗网格区域之间的过渡带, 网格间距由 5 mm~0.4 m 变化(3 $\times$).

图 10 分别给出了 0.018 和 0.066 s 时刻的应力水

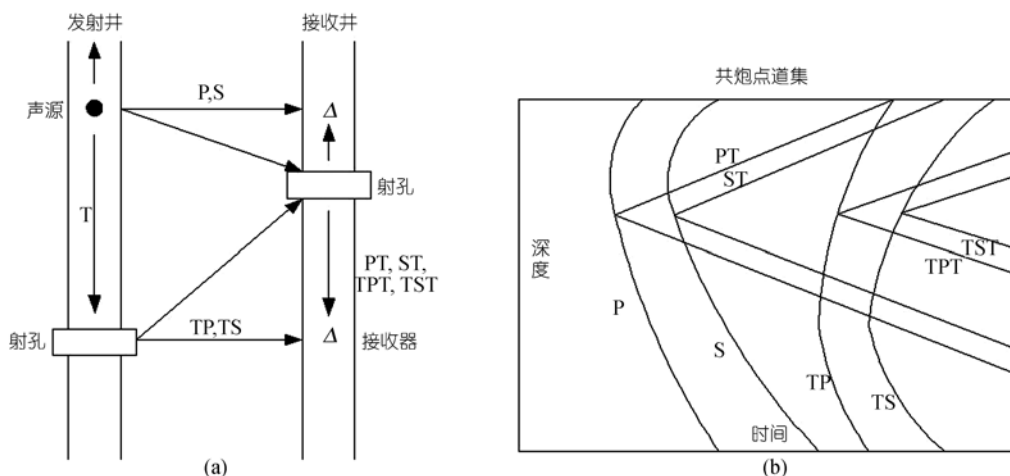


图 8 井间声波模型简图

(a) 波的传播路径; (b) 合成记录波至草图(引自Mo和Harris^[31])

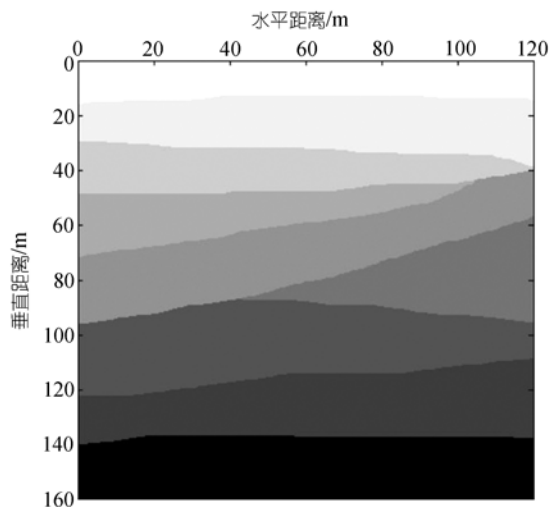
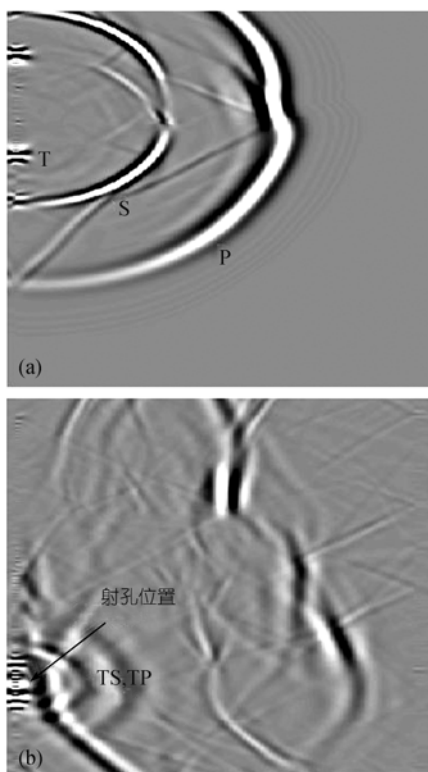


图9 井间地层结构图

图10 应力水平分量波场时间快照图
(a) 18 ms 时刻; (b) 66 ms 时刻

分量波场时间快照图。除了直达纵波和横波外,从波场快照中可以清晰地看到很强的管波在发射井中的传播,管波在射孔处形成的二次声源并产生与管波相关的模式波向地层中传播。图11是人工合成的共炮点道集,显示了与图8中相应的各种波至。图11中可以观察到,与管波有关的模式波具有很强的能量,特别是PT,TP和TS。如果不对它们进行处理,将

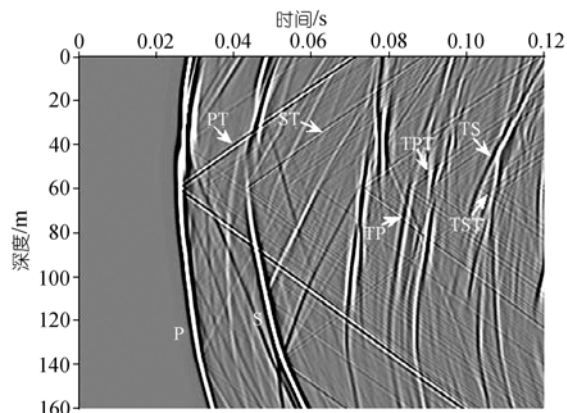


图11 人工合成的共炮点道集

对井间声波层析成像(特别是反射波层析成像)造成影响,降低成像的精度。如果利用均匀网格在井孔附近加密网格,那么井间地层需要网格点数为 400×24000 。然而在相同的条件下,利用优化变网格算法需要的网格点数为 400×300 ,内存只占规则网格的 $1/80$ 左右,因此计算效率大大地提高了。此外,计算中时间迭代次数为 30 万次,可充分说明提出的优化变网格算法的稳定性。

4 结论

基于 DRP 思想,本文提出了一种优化变网格算法,该方法建立在速度-应力交错网格有限差分基础之上,算法具有二阶时间精度和四阶空间精度。将数值结果与解析解及八阶规则交错网格有限差分算法进行了比较,验证了本文提出的优化变网格算法具有较高的精度。通过谱误差分析和实际数值模拟结果比较可知,与基于 Taylor 展开的变网格有限差分相比,优化算法的频散误差小,因而允许使用更粗糙的网格,可以进一步提高计算效率。在一例井间声波模拟中应用了此优化算法,表明了该算法拥有令人满意的稳定性,与规则网格有限差分算法相比,该算法占用内存少,节省计算时间,极大地提高了计算效率。数值结果还表明,与管波相关的模式波能量较强,需要压制,否则将会降低井间声波层析成像精度。

致谢 感谢审稿人的修改和建议。

参 考 文 献

- 1 高林,孙刚. 地球物理业的市场经济浅析. 石油物探译丛, 1996, 3: 47—53
- 2 王秀明, Seriani G, 林伟军. 利用谱元法计算弹性波场的若干理论问题. 中国科学 G 辑: 物理、力学、天文学, 2007, 37(1): 41—59

- 3 Moczo P. Finite-difference technique for SH-wave in 2D media using irregular grids-application to the seismic response problem. *Geophys J Int*, 1989, 99: 321—329[DOI]
- 4 Carcione J M. Modeling anelastic singular surface wave in the earth. *Geophysics*, 1992, 57: 781—792[DOI]
- 5 Opršal I, Zahradník J. Elastic finite-difference method for irregular grids. *Geophysics*, 1999, 64: 240—250
- 6 Falk J, Tessmer E, Gajewski D. Tube wave modeling by the finite-difference method with varying grid spacings. *Pageoph*, 1996, 148: 77—93[DOI]
- 7 Wu C L, Harris J M. Single-well seismic modeling in viscoelastic media using a variable-grid finite-difference method. 71th Ann Internat Mtg Soc Expl Geophys, 2001: 1155—1158.
- 8 Wu C L, Harris J M. Borehole seismic modeling with inclusion of tube wave and other tube-wave-related arrivals. 73th Ann Internat Mtg Soc Expl Geophys, 2003: 2239—2242
- 9 Aoi S, Fujiwara H. 3D finite-difference method using discontinuous grids. *Bull Seis Soc Am*, 1999, 89: 918—930
- 10 Wang Y, Xu J, Schuster G T. Viscoelastic wave simulation in basins by a variable-grid finite-difference method. *Bull Seis Soc Am*, 2001, 91: 1741—1749[DOI]
- 11 朱生旺, 魏修成. 波动方程非规则网格任意阶精度差分法正演. *石油地球物理勘探*, 2005, 40(2): 149—153
- 12 孙卫涛, 杨慧珠. 各向异性介质弹性波传播的三维不规则网格有限差分方法. *地球物理学报*, 2004, 47(2): 332—337
- 13 Mikumo T, Miyatake T. Dynamic rupture processes on a dipping fault, and estimates of stress drop and strength excess from the results of waveform inversion. *Geophys J Int*, 1993, 112: 481—496[DOI]
- 14 Groenenboom J, Falk J. Scattering by hydraulic fractures: Finite-difference modeling and laboratory data. *Geophysics*, 2000, 65: 612—622[DOI]
- 15 Pitarka A. 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bull Seis Soc Am*, 1999, 89: 54—68
- 16 Wu C L, Harris J M, Nihei K T, et al. Two-dimensional finite-difference seismic modeling of an open fluid-filled fracture: Comparison of thin-layer and linear-slip models. *Geophys*, 2005, 70: T57—T62[DOI]
- 17 Hayashi K, Burns D, Toksöz M N. Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography. *Bull Seis Soc Am*, 2001, 91: 1750—1764[DOI]
- 18 Jastram C, Tessmer E. Elastic modeling on a grid with vertically varying spacing. *Geophys Prosp*, 1994, 42: 357—370[DOI]
- 19 Moczo P, Bystrický E, Kristek J, et al. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viselastic topographic structures. *Bull Seis Soc Am*, 1997, 87: 1305—1323
- 20 Yang D H, Lu M, Wu R S, et al. An optimal nearly analytic discrete method for 2D acoustic and elastic wave equations. *Bull Seis Soc Am*, 2004, 94: 1982—1991[DOI]
- 21 Yang D H, Peng J M, Lu M, et al. Optimal nearly analytic discrete approximation to the scalar wave equation. *Bull Seis Soc Am*, 2006, 96: 1114—1130[DOI]
- 22 Fornberg B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Math Comput*, 1988, 51(184): 699—706[DOI]
- 23 Adriano S, Oliveira M. A fourth-order finite-difference method for the acoustic wave equation on irregular grids. *Geophysics*, 2003, 68: 672—676[DOI]
- 24 Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J Comput Phys*, 1993, 107: 262—281[DOI]
- 25 Ye F, Chu C L. Dispersion-relation-preserving finite difference operators: derivation and application. 75th Ann Internat Mtg Soc Expl Geophys, 2005: 1783—1786
- 26 张海澜, 王秀明, 张碧星. 井孔的声场和波. 北京: 科学出版社, 2004. 140—150
- 27 Zhao H B, Wang X M, Zhang H L. Studies on effective and stable absorbing boundary conditions in ultrasonic wave modeling. *Proc IEEE Ultrason Symp*, 2005, 3: 1472—1475
- 28 Piliant W L. *Elastic Waves in the Earth*. Amsterdam: Elsevier Press, 1979. 59—63
- 29 赵海波, 王秀明, 王东, 等. 完全匹配层吸收边界在孔隙介质弹性波模拟中的应用. *地球物理学报*, 2007, 50(2): 581—591
- 30 White J E, Lessenger M A. Caliper effect on borehole coupling. *Expl Geophys*, 1988, 19: 201—205
- 31 Mo L W, Harris J M. Analysis and attenuation of tube waves in crosswell seismic survey. 65th Ann Internat Mtg Soc Expl Geophys, 1995: 438—441
- 32 Gardner G H F, Gardner L W, Gregory A R. The diagnostic basis for stratigraphic traps. *Geophysics*, 1974, 39: 770—780